

Rallye Mathématique

Poitou - Charentes

4 mars 2008 - éléments de solutions



1 Le nombre π (15 points)

1) **Archimède** est un géomètre de l'Antiquité, né à Syracuse, en 287 av. J.C. et mort en 212 av. J.C. (tué par un soldat romain lors du siège de Syracuse). Génial inventeur en mécanique statique et hydrostatique (poulie, roues dentées, vis sans fin), « Eureka ! », il découvre le principe qui porte maintenant son nom (poussée sur un corps plongé dans un liquide), principe et propriétés du levier... Ses travaux mathématiques portent sur les figures planes et volumes (aires et volumes), les cercles et spirales (valeur approchée de π), les sphères, cônes et cylindres...

Ludolph von Ceulen (1539-1610) est professeur à l'Université de Leyde ; il calcule 20 décimales de π en 1596 à partir d'un polygone de 515 396 075 520 côtés, puis 34 décimales en 1609. π est parfois appelé nombre de Ludolph.

Thomas Fantet de Lagny (1660-1734) est professeur royal d'hydrographie à Rochefort en 1697, membre de l'Académie des Sciences en 1719. Calculateur habile, il obtint π avec 127 décimales (la 113^{ème} décimale est fautive : c'est un 8 au lieu du 7 donné).

John Machin (1680-1752) est professeur d'astronomie à Londres. Il découvre en 1706 une formule mathématique qui lui permet de calculer 100 décimales de π . Cette formule fut utilisée plusieurs fois ensuite (en 1973 Guillou et Bouyer ont pu calculer 1 001 250 décimales).

2) $\pi = 3,1415926535897932384626433... 22/7 = 3,142857... ; 355/113 = 3,14159292035...$
[noter la curiosité : la fraction est écrite en coupant en deux le nombre 113355, d'où la facilité de la retenir ; elle avait été donnée par Tsu Chung-Chih (dans les années 480)]. Cette dernière fraction donne une très bonne approximation de π .

3) Que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?

How I wish I could recollect of circle round
The exact relation Archimede unwound.

Des phrases en d'autres langues
sur le site de la Régionale
APMEP de Poitou-Charentes

4) le périmètre du grand cercle de la figure grisée est $P = 2 \times \pi \times 10 \text{ cm} = 20\pi \text{ cm}$.
Les petits cercles ont un rayon de 1 cm ; le périmètre de chacun est donc $2\pi \text{ cm}$. La somme des périmètres des 10 petits cercles est égale à $20\pi \text{ cm}$ et égale au périmètre du grand cercle.

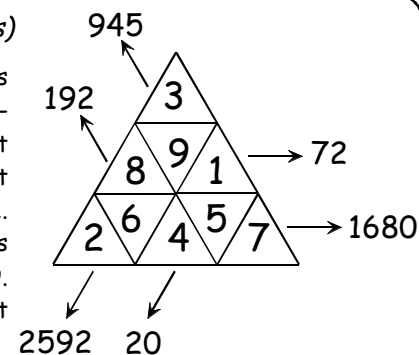
5) Cercle de rayon 7 cm. Le côté de l'octogone inscrit mesure à peu près 5,3 cm. Son périmètre P_1 est donc environ 42,4 cm. Le côté de l'octogone circonscrit mesure à peu près 5,8 cm. Son périmètre P_2 est environ égal 46,4 cm. La demi-somme des périmètres P' est d'environ 44,4 cm. Du fait de l'encadrement du cercle par les deux octogones, P' est une valeur proche de P . On obtient $44,4 / 14 \approx 3,17$ comme valeur approchée de π .

2 Palindrome à l'hippodrome (10 points)

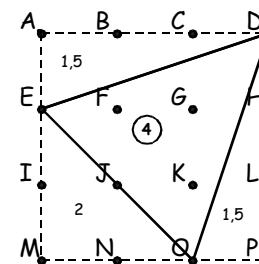
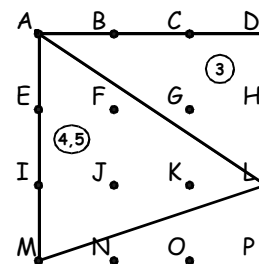
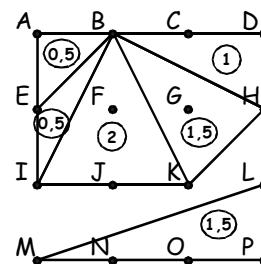
Compte tenu de la nature palindromique de tiercé : 31 - 22 - 13 par exemple, il n'y a que 9 possibilités pour le deuxième nombre : 11, 22, ... 99 et le premier nombre qui a obligatoirement ses chiffres différents définit, par symétrie, le troisième. Il y a neuf possibilités pour le premier chiffre du premier nombre 1, 2, ..., 9, et il n'y a plus que 8 possibilités pour le deuxième chiffre puisque les deux chiffres. Il y a donc $9 \times 9 \times 8 = 648$ tiercés possibles.

3 La tournée des facteurs (10 points)

Par intersection des lignes contenant des produits multiples de 5, on peut placer immédiatement le nombre 5. La ligne (20) contient obligatoirement les nombres 1 et 4, et le 1 est nécessairement aussi sur la ligne (72) : $9 \times 8 \times 1$. On en déduit la place du 4. la parité des lignes (945) et (192) permettent de placer le 8 et le 9. Un calcul permet de placer le 6, et le 2 ne peut être placé sur la ligne (945). D'où la solution.



4 Ne manquez pas d'aires ! (15 points)



5 Plantation (10 points)

L'agriculteur a planté 11 piquets en 2 h 45, ou en 165 min. Il met donc 15 min par piquet.

1^{ère} solution : le champ étant carré, il lui reste $11 + 2 \times 9 = 29$ piquets à planter. Sachant qu'il va toujours à la même cadence, il mettra $29 \times 15 \text{ min} = 435 \text{ min} = 7 \text{ h } 15$ pour faire le reste.

2^{ème} solution : il y a en tout $(11 - 1) \times 4 = 40$ piquets ; il en reste $40 - 11 = 29$ à planter. ...

