

## ① Le nombre $\pi$ (20 points)

1) **Archimède** est un géomètre de l'Antiquité, né à Syracuse, en 287 av. J.C. et mort en 212 av. J.C. (tué par un soldat romain lors du siège de Syracuse). Génial inventeur en mécanique statique et hydrostatique (poulie, roues dentées, vis sans fin), « Eureka ! », il découvre le principe qui porte maintenant son nom (poussée sur un corps plongé dans un liquide), principe et propriétés du levier... Ses travaux mathématiques portent sur les figures planes et volumes (aires et volumes), les cercles et spirales (valeur approchée de  $\pi$ ), les sphères, cônes et cylindres...

**Ludolph von Ceulen** (1539-1610) est professeur à l'Université de Leyde ; il calcule 20 décimales de  $\pi$  en 1596 à partir d'un polygone de 515 396 075 520 côtés, puis 34 décimales en 1609.  $\pi$  est parfois appelé nombre de Ludolph.

**Thomas Fantet de Lagny** (1660 - 1734) est professeur royal d'hydrographie à Rochefort en 1697, et membre de l'Académie des Sciences en 1719. Calculateur habile, il obtint  $\pi$  avec 127 décimales ; mais la 113<sup>ème</sup> est fautive : c'est un 8 au lieu du 7 donné.

**John Machin** (1680-1752) est professeur d'astronomie à Londres. Il découvre en 1706 une formule mathématique qui lui permet de calculer 100 décimales de  $\pi$ . Cette formule fut utilisée plusieurs fois ensuite (en 1973 Guillou et Bouyer ont pu calculer 1 001 250 décimales).

2)  $\pi = 3,1415926535897932384626433...$

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages  
Glorieux Archimède, artiste ingénieur,  
Toi de qui Syracuse aime encore la gloire  
Soit ton nom conservé par de savants grimoires !

Des phrases en d'autres langues  
sur le site de la Régionale  
APMEP de Poitou-Charentes

Sir, I send a rhyme excelling  
In sacred truth and rigid spelling  
Numerical sprites elucidate...

Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesen-Genie  
Wie viele Tausende bewundern Geister  
Himmlisch wie du und göttlich !

3)  $22/7 = 3,1428...$  ;  $355/113 = 3,14159292035...$  Noter la curiosité : la fraction est écrite en coupant en deux le nombre 113355, d'où la facilité de la retenir ; elle avait été donnée par Tsu Chung-Chih (dans les années 480) ;  $[553/(311+1)]^2 = 3,14152...$  La fraction de Métius fournit une excellente approximation de  $\pi$ .

4) Cercle de rayon 7 cm . Le côté du dodécagone inscrit mesure environ 3,6 cm ;  $P_1 \approx 43,2$  cm. Le côté du dodécagone inscrit mesure environ 3,8 cm ;  $P_2 \approx 45,6$ . La demi-somme des périmètres donne  $P' \approx 44,4$ .  $P$ , le périmètre du cercle, et  $P'$  sont deux valeurs proches du fait de l'encadrement du cercle par les deux dodécagones.  $P'$  nous donne une valeur approchée de  $\pi$  :  $44,4/14 \approx 3,17$ .

5)  $1^2 + 2^2 + ... + 24^2 = 70^2$ , d'où  $1^2\pi + 2^2\pi + ... + 24^2\pi = 70^2\pi$ . Le rayon du grand disque est 70 cm. Par contre, la somme des périmètres est  $2\pi + 4\pi + ... + 48\pi = 600\pi$  cm, alors que le périmètre du grand disque est  $140\pi$  cm.

# Rallye Mathématique

## Poitou - Charentes

4 mars 2008 - éléments de solutions



## ② Complet ! (10 points)

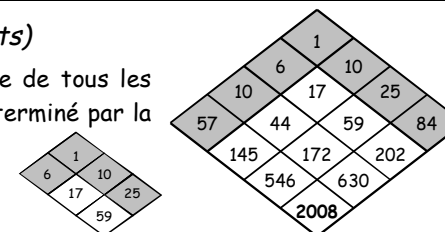
Soit  $T$ ,  $S$  et  $A$  les nombres respectifs de passagers des classes touriste, supérieure et affaire :  $S = T/2$  et  $A = T/4$ . Soit  $t$ ,  $s$  et  $a$  les prix respectifs des billets des classes touriste, supérieure et affaire :  $t = 200$  €,  $s = 200$  €  $\times$   $3/2 = 300$  € et  $a = 200$  €  $\times$   $2 = 400$  €. On a donc :  $T \times 200$  € +  $T/2 \times 300$  € +  $T/4 \times 400$  € = 72 000 €.  $T \times (200$  € +  $150$  € +  $100$  €) = 72 000 €, soit  $T = 160$ .

Il y a donc 160 passagers en classe touriste, 80 en classe supérieure et 40 en classe affaire, donc 280 passagers dans l'avion.

## ③ Le losange de Pascal (10 points)

Le nombre d'une case blanche est la somme de tous les nombres des cases d'un parallélogramme déterminé par la case du nombre cherché et celle de 1.

Ci-contre, le parallélogramme correspondant à la case 59.



## ④ Machine, attention (5 points)

Le quotient de  $\frac{31}{13}$  est une suite décimale illimitée périodique de période 6 chiffres :

$\frac{31}{13} = 2,384615\overline{384615}...$  Dans la division euclidienne de 2008 par 6, le reste est 4.

La 2008<sup>ème</sup> décimale sera donc le quatrième chiffre de la période de la suite décimale, c'est-à-dire 6.

## ⑤ Nos origines (15 points)

En ramenant les 4,5 milliards d'années à l'échelle d'une année, on cherche la durée  $x$  correspondant à 3 millions d'années à la même échelle.

1 an correspond à 31 536 000 s. On a donc l'égalité des rapports suivants :

$\frac{3 \text{ millions}}{4,5 \text{ milliards}} = \frac{x}{31 \text{ 536 000}}$  . On en déduit que  $x = 21 \text{ 024 s} = 5 \text{ h } 50 \text{ min } 24 \text{ s}$ .

À l'échelle d'une année, l'homme est apparu le 31 décembre à 18 h 9 min 24 s.