

① Le nombre π (20 points)

1) Archimède est un géomètre de l'Antiquité, né à Syracuse, en 287 av. J.C. et mort en 212 av. J.C. (tué par un soldat romain lors du siège de Syracuse). Génial inventeur en mécanique statique et hydrostatique (poulie, roues dentées, vis sans fin), il découvre « Eureka ! » le principe qui porte maintenant son nom (poussée sur un corps plongé dans un liquide), principe et propriétés du levier... Ses travaux mathématiques portent sur les figures planes et volumes (aires et volumes), les cercles et spirales (valeur approchée de π), les sphères, cônes et cylindres. Johann Heinrich Lambert est philosophe, mathématicien et physicien. Il est né à Mulhouse en 1758 ; il passe presque toute sa vie à Berlin où il meurt en 1777. Le premier, il démontre rigoureusement en 1761 que π est un nombre irrationnel.

Leonhard Euler, né à Bâle en 1707 et mort en 1783 est l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, astronome, physicien et philosophe. Il est l'auteur de nombreux théorèmes et son œuvre est considérable (peut-être 800 pages de textes scientifiques par an !). Il découvrit de nouvelles formules concernant π . Devenu aveugle, il n'en continua pas moins ses travaux, aidé en cela par sa prodigieuse mémoire.

Ferdinand von Lindemann (1852-1939), mathématicien allemand, il démontra en 1882 la transcendance de π (pour en donner une vague idée, on pourrait dire que π est un nombre « encore beaucoup plus compliqué » qu'un nombre irrationnel).

2) $\pi = 3,1415926535897932384626433\dots$ Les valeurs habituelles que l'on donne sont 3,14 et 3,1416.

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile au sage
Glorieux Archimède, artiste ingénieux,
Toi de qui Syracuse aime encore la gloire
Soit ton nom conservé par de savants grimoires !

Sir, I send a rhyme excelling
In sacred truth and rigid spelling
Numérical sprites elucidate...

Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesen-Genie
Wie viele Tausende bewundern Giester
Himmlich wie du und göttlich !

3) Fraction de Metius : $3 + 42/(72 + 82) = 355/113 = 3,14159292035...$ (noter la curiosité de la fraction de Metius ; elle est écrite en coupant en deux le nombre 113355, d'où la facilité de la retenir ; elle avait déjà été donnée par Tsu Chung-Chih (dans les années 480).
Fraction d'Euler : $3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/293))) = 103993/33102 = 3,1415926530...$

Expressions de Ramanujan : $9/5 + \sqrt{9/5} = 3,141640$

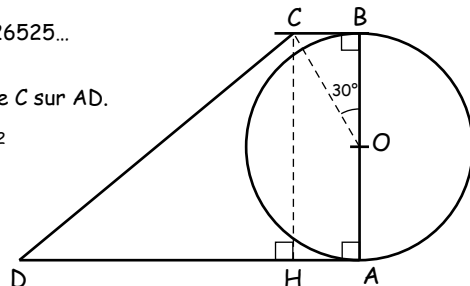
$$\text{et } 102 - \sqrt{\sqrt{2222/222}} = \sqrt{\sqrt{2143/22}} = 3,1415926525...$$

4) Construction de Kochanski (1685) :
soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur AD.

$$BC = 1/\sqrt{3}; CD^2 = CH^2 + HD^2 = AB^2 + (AD - BC)^2$$

$$CD^2 = 2^2 + (3 - 1/\sqrt{3})^2 = (40 - 6\sqrt{3})/3,$$

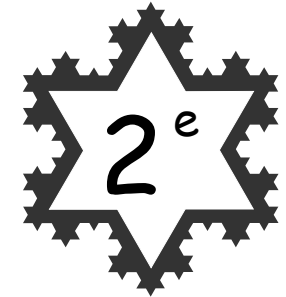
soit $CD = 3,141533\dots$ proche de π à 10^{-4} près.



Rallye Mathématique

Poitou - Charentes

4 mars 2008 - éléments de solutions



① Le nombre π (suite et fin)

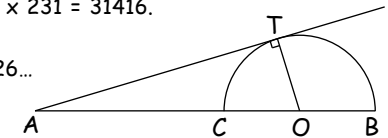
Construction de Léa Broutille (2007) :

$$AT^2 = AO^2 - OT^2 = (AO + OT)(AO - OT) = AB.AC = 136 \times 231 = 31416.$$

Un carré de côté AT a une aire de 31416 mm^2 .

Un cercle de rayon 1 a une aire valant $\pi \times 100^2 = 31415,926\dots$

Les deux aires sont proches (erreur 3.10^{-6}).



(2) Bateau sur l'eau (10 points)

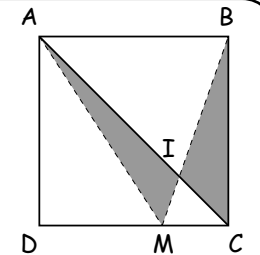
Les vitesses sont proportionnelles aux aires des voiles et ces dernières sont proportionnelles à leurs hauteurs puisque ce sont des triangles de même base. Ainsi, les vitesses 2,015 km/h et 20,15 km/h sont proportionnelles à 1 et 9 + 1, à 2015 dm² et à 201,5 dm². Ainsi, l'aire de la petite voile est de 201,5 dm² et sa hauteur est donc de 13 dm, l'aire de la grande voile est de 1813,5 dm² et sa hauteur de 117 dm.

③ Le bricoleur (10 points)

Les triangles AMB et ACB ont même base AB et même hauteur BC . Ils ont donc même aire.

$$a(AMI) = a(AMB) - a(AIB) \text{ et } a(BCI) = a(ACB) - a(AIB).$$

Puisque $a(AMB) = a(ACB)$, on en déduit que les triangles AMI et BCI ont même aire.



④ Régimorithme (10 points)

Plusieurs solutions à ce cryptarithme. les valeurs communes aux trois solutions suivantes sont R = 0 et I = 6.

$$\begin{array}{r} \text{J E U N E R} \\ + \text{J E U N E R} \\ \hline \text{M I N C I R} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 134930 \\ + 134930 \\ \hline 269860 \end{array} \quad \begin{array}{r} 382480 \\ + 382480 \\ \hline 764960 \end{array} \quad \begin{array}{r} 483780 \\ + 483780 \\ \hline 967560 \end{array}$$