

Rallye mathématique d'Alsace 2008

26 mars 2008

Classe de Première
35^{ème} édition

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Exercice 1

Les nombres entiers de 1 à 2008 sont écrits au tableau. Parmi eux, on choisit deux nombres au hasard, on les efface et, à la place de l'un d'eux, on écrit leur différence (le plus grand moins le plus petit), l'autre nombre reste effacé.

On recommence jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un nombre écrit au tableau.

Ce dernier nombre est-il pair ou impair ?

Exercice 2

On considère une grille carrée à 2008^2 cases : 2008 lignes et 2008 colonnes. Les cases sont numérotées dans l'ordre de 1 jusqu'à 2008^2 .

On choisit 2008 nombres de cette grille en n'en prenant qu'un seul par ligne et par colonne. On s'intéresse à la somme de ces 2008 nombres.

1. Combien vaut-elle si l'on choisit les 2008 nombres sur une diagonale ?
2. Combien vaut-elle si ces 2008 nombres sont choisis au hasard dans les conditions de l'énoncé ?

1	2	3	2007	2008
2009	2010	2011		
...						
					...	2008^2

Exercice 3

Un grand hall en forme de trapèze isocèle (angles à la base de 60°) dont les côtés sont des nombres entiers en mètres est entièrement dallé avec des dalles en forme de triangles équilatéraux de côté 1 mètre. On a compté 70 280 dalles.

Quelles sont les dimensions du hall ?

<p>Indications de solution</p> <p>Rallye mathématique d'Alsace 2008</p> <p>26 mars 2008</p> <p>Classe de Premières</p>
--

Exercice 1

L'énoncé l'indique : on s'intéresse ici seulement à des questions de parité.

On étudiera comment varie la parité de la somme des nombres qui restent écrits.

A la dernière étape, il reste un seul nombre égal à cette somme.

On aura donc la parité cherchée.

Au départ, il s'agit de la somme des entiers de 1 à 2008 (1004 pairs et 1004 impairs), donc cette somme est paire.

Si deux nombres pairs sont choisis, leur différence est paire, la somme reste paire

Si deux nombres impairs sont choisis, leur différence est paire, la somme reste paire.

Si un nombre pair et un nombre impair sont choisis, leur différence est impaire, la somme reste paire.

La parité de la somme ne change pas au cours de ce processus.

La dernière somme étant le dernier entier qui reste, c'est donc un nombre pair.

Ce premier sujet a été bien traité par les candidats et l'argument de parité invariante à chaque étape souvent correctement exploité.

Le point de départ était naturellement la parité de la somme de deux entiers selon leur parité respective.

Les principales erreurs rencontrées sont le traitement de seulement quelques cas particuliers pour conclure au cas général et des fautes de calcul. Certains tentent de calculer explicitement les entiers en présence, alors que seule la parité intervient.

Tout comme l'exercice qui suit, la résolution ne nécessitait pas de « calcul » explicite pour prouver le résultat annoncé.

Exercice 2

Dans cet exercice, il s'agissait de voir que la somme obtenue était indépendante du choix des éléments dans les conditions de l'énoncé.

Pour le cas particulier des diagonales, le calcul est élémentaire et on obtient dans les deux cas 4 048 193 260.

Pour traiter le cas général, on peut par exemple procéder de la façon qui suit.

Notons que le terme situé à l'intersection de la première colonne et de la k-ième ligne est $2008(k-1)+1$ (suite arithmétique de raison 2008, k-1 variant de 0 à 2007.).

Appelons p (p dépend de k) la différence entre le terme choisi sur cette ligne et $2008(k-1)+1$: ce nombre prend chaque valeur entière entre 0 et 2007 une fois et une seule.

En notant $n = 2008$, la somme cherchée est celle des termes de la forme

$n(k-1)+1+p$ où p et k-1 prennent chaque valeur entière comprise entre 0 et 2007.

La somme cherchée est donc en notant $n=2008$ pour simplifier :

$$[1+(n+1)+(2n+1)+\dots+(n-1)n+1]+[0+1+\dots+(n-1)]=n(n^2+1)/2.$$

La somme est donc toujours 4048193260.

Cet exercice a été bien traité dans un nombre significatif de copies.

Les connaissances mobilisées étaient modestes (somme des termes d'une suite arithmétique essentiellement), mais il est relativement original pour des élèves de terminale. Il nécessite du recul et un peu d'initiative pour décrire le problème posé.

Le vocabulaire employé ne semble pas toujours clair : la seconde question demande naturellement autre chose que le traitement de quelques cas particuliers...ce qui était d'ailleurs l'objet de la première question!

La démarche proposée ici pour la résolution a été vue par quelques bons binômes et c'est avec plaisir que nous avons lu ces solutions.

Exercice 3

Cet exercice a été de loin perçu comme le moins sympathique par les participants.

Beaucoup ont introduit des inconnues nombreuses et tenté de mettre le problème en équations sans arriver de façon satisfaisante à faire véritablement le lien entre les inconnues introduites.

Appelons a la longueur d'un côté du trapèze isocèle et b celle de sa petite base.

L'angle de la base valant 60° , permet de calculer la hauteur $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

L'aire du trapèze est $\frac{b + (a + b)}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = (2b + a) \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

L'aire d'un triangle équilatéral de côté 1 est $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Le nombre de dalles nécessaires pour paver le trapèze est obtenu par quotient : il vaut $a(2b + a)$.

On est amené à résoudre l'équation $a(2b + a) = 70280$.

Ici l'exercice se ramène à une question d'arithmétique. a et b désignent des nombres entiers naturels. Cette équation à deux inconnues se résout grâce à la décomposition en produit de facteurs premiers de 70 280.

$$70280 = 2^3 \times 5 \times 7 \times 251$$

Après avoir remarqué que $2b + a > a$ et que $2b + a$ et a sont de même parité, on résout les différents systèmes possibles.

Les arguments de divisibilité ont été peu mentionnés. Il s'agissait de ne pas perdre de vue que certaines quantités introduites étaient bien des entiers naturels et pas des réels quelconques.

Comme pour le deuxième exercice d'ailleurs, le fait de prendre l'initiative de baptiser un objet (n, p, x, y, \dots) pour pouvoir ensuite le manipuler aisément ensuite dans des calculs est souvent un obstacle pour la résolution de l'exercice. Quand les notations ne sont pas imposées par un énoncé, il est nécessaire de prendre des notations claires, simples à manipuler et parlantes...

BILAN : pour l'aspect technique lié à chaque exercice, nous renvoyons aux commentaires ci-dessus. Le jury a constaté avec beaucoup de satisfaction que de nombreuses copies réussissent à allier clarté, initiative et idées originales, ce qui est très encourageant pour la suite. Elles figurent naturellement aux premières places de notre palmarès.

Rallye mathématique d'Alsace 2008

5 mars 2008

Classe de Terminale

35^{ème} édition

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Exercice 1

Le nombre 31 a pour carré 961 ; si on enlève les deux derniers chiffres de ce carré, on obtient le nombre 9 qui est lui-même un carré. Il en est de même pour le nombre 60.

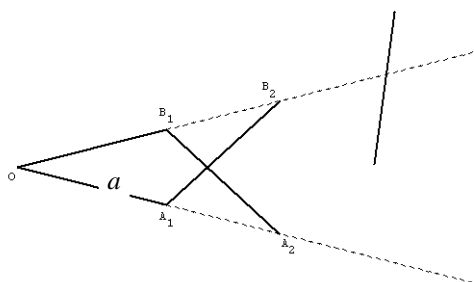
Trouver tous les nombres entiers strictement supérieurs à 9 qui vérifient la même propriété.

Exercice 2

On construit une suite de chiffres de proche en proche de la manière suivante : on part de deux chiffres a et b . Le troisième, disons c , est le chiffre des unités de la somme $a+b$. Le quatrième est le chiffre des unités de la somme $b+c$. On continue ainsi le processus.

1. Montrer que si l'on connaît deux termes consécutifs d'une telle suite alors on peut calculer tous les termes de la suite.
2. Quelles sont les deux premiers termes de la suite telle que le 2007^{ième} terme vaut 2 et le 2008^{ième} terme vaut 6 ?
3. Montrer qu'une suite construite par ce processus est toujours périodique.

Exercice 3



On dispose de 5 allumettes, toutes de même longueur, disposées comme indiqué sur le dessin.

La cinquième allumette n'a pas encore trouvé sa place.

Trouver la valeur a de l'angle $\widehat{A_1OB_1}$ pour que cette cinquième allumette relie exactement A_2 et B_2 .

Les points O, A_1 et A_2 sont alignés.

Les points O, B_1 et B_2 sont alignés.

On dispose à présent de 7 allumettes que l'on croise comme précédemment, ce qui définit les points A_3 et B_3 , avec les points O, A_1, A_2 et A_3 alignés de même que O, B_1, B_2 et B_3 .

Quelle serait alors la valeur a de l'angle $\widehat{A_1OB_1}$ pour que la septième allumette relie exactement A_3 et B_3 ?

Et si on disposait de $2n + 1$ allumettes avec n entier naturel non nul ?

Indications de solution

Rallye mathématique d'Alsace 2008

5 mars 2008

Classe de Terminale

Exercice 1

Une méthode simple de résolution, après avoir remarqué que tous les multiples de 10 conviennent est par exemple, notant x l'entier cherché, d'écrire que $x^2 = 100y^2 + r$, avec y entier et compris entre 1 et 99.

Ensuite la factorisation $x^2 - 100y^2 = (x - 10y)(x + 10y)$ permet d'examiner les cas suivants :

$x - 10y = 1$, donc $x + 10y = 20y + 1 < 100$, donc y inférieur à 4.

$x - 10y = 2$, donc $x + 10y = 20y + 2 < 50$, donc y inférieur à 2.

$x - 10y = 3$ ou 4 donc de même y inférieur à 1.

$x - 10y$ supérieur à 5, est exclu car on aurait alors $20y + 5$ inférieur à 20, ce qui n'est pas.

On déduit alors qu'outre les multiples de 10, les nombres cherchés sont 11, 12, 13, 14, 21, 22, 31 et 41.

Cet énoncé a été correctement abordé par un nombre significatif de binômes. Certains ont été gênés pour formuler de manière exploitable le fait qu'un entier est un carré, ainsi que le nombre obtenu en enlevant ses deux derniers chiffres. Les raisonnements combinant à la fois l'aspect arithmétique (factorisation des entiers) et les majorations pour limiter le nombre de cas à étudier ne sont pas toujours vus de manière efficace : cela semble être peu courant chez un élève de terminale.

Exercice 2

La suite est ainsi formée : on part de deux chiffres et le suivant est le chiffre des unités de la somme des deux précédents.

Si on connaît deux termes consécutifs, il est clair que les suivants sont entièrement déterminés (inutile d'insister).

Il suffit donc de montrer que si deux termes consécutifs sont connus, le précédent l'est aussi.

Supposons u_{n+1} et u_{n+2} connus et trouvons u_n .

En effet, soit $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et alors cela suppose $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$, soit $u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$ et cela suppose $u_{n+2} - u_{n+1} < 0$. On a donc finalement $u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$ si $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$ et $u_{n+2} - u_{n+1} + 10$ si $u_{n+2} - u_{n+1} < 0$.

On applique ce procédé de calcul pour trouver les deux premiers termes de la suite proposée :

Les termes du rang 2003 au rang 2008 sont 2,6,8,4,2,6.
La première question assure une périodicité de période 4.
On a donc $u_4=u_{2008}=6$ et $u_3=u_{2007}=2$, donc $u_1=8$ et $u_2=4$.

Pour la périodicité, une possibilité de résolution est le fameux principe des « tiroirs » de Dirichlet : si $n+1$ objets sont rangés dans n boîtes, alors une des boîtes contient au moins 2 objets.

On considère une telle suite et on regarde les 202 premiers termes, regroupés en 101 couples de termes consécutifs. Nous avons 101 objets et 100 valeurs possibles ($100=10 \times 10$). On a donc deux couples égaux. Si l'un d'eux est (u_1, u_2) , c'est gagné, sinon la première question assure en remontant que le couple (u_1, u_2) est aussi répété.

Cet exercice est apparu comme difficile pour ce qui concerne les deux dernières questions. Il a été cependant bien traité dans un nombre très significatif de copies. On peut s'en réjouir.

Le vocabulaire « entièrement déterminé » n'a parfois pas été clairement compris. Là encore, ce petit exercice hors des sentiers battus nécessite un certain recul, qui a été observé dans de fort bonnes copies.

La résolution demande de la précision et la notation séquentielle simplifie considérablement la rédaction.

Exercice 3

Dans cet exercice, on disposait au départ de 5 allumettes à placer de façon à « clôturer » une figure formée de triangles isocèles consécutifs.

En utilisant les propriétés élémentaires des angles (triangles isocèles, angles supplémentaires et somme des angles d'un triangle) on détermine facilement que l'angle cherché mesure $\frac{\pi}{5}$ rad. De même si l'on dispose de 7 allumettes,

l'angle mesure $\frac{\pi}{7}$ rad. La généralisation (en utilisant les mêmes arguments) permet d'obtenir pour $2n+1$ allumettes un angle de $\frac{\pi}{2n+1}$ rad.

Il était aussi possible de résoudre cet exercice en remarquant que les angles à la base des triangles isocèles successifs étaient en progression arithmétique.

Si les deux cas particuliers ont été bien traités , la formule générale a souvent été donnée sans être démontrée, les élèves étant peu familiers avec un usage rigoureux des indices. Nous avons trouvé beaucoup de copies utilisant les formules d'Al Kashi ou celles de trigonométrie, ce qui aboutissait à des

équations trigonométriques insolubles à leur niveau.

BILAN : là encore, pour les détails de chaque exercice, on se reportera aux commentaires ci-dessus. Les énoncés proposés cette année aux terminales étaient d'un bon niveau et les copies produites fort satisfaisantes. Les deux derniers exercices nécessitaient de la rigueur, de l'imagination et de l'initiative. Elles ont été au rendez-vous, dans les copies primées en particulier. Nous en félicitons les auteurs.