Commission Inter-IREM Université

Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner.

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Imprimé par l'IREM de Paris – Université Denis Diderot Paris 7

Des informations sur la CII Université, **ainsi que le contenu de cette brochure** sur le site de l'ADIREM à l'adresse suivante www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique26

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):
Université Paris-Diderot, Bâtiment Sophie-Germain,
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,
75013 Paris 13ème arrondissement
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de france)

Nous Contacter

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:
Locufier Nadine
IREM de Paris – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13

par voie électronique:
nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/ (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

Décembre 2017

Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner.

Par la Commission Inter-IREM Université

Isabelle Bloch[1], Stéphanie Bridoux [2], Viviane Durand-Guerrier[3], Denise Grenier[4], Patrick Frétigné[5], Jacqueline Mac Aleese[6], Gwenola Madec[7], Chantal Menini[8], Marc Rogalski[6], Pascale Sénéchaud[9], Fabrice Vandebrouck.[6]

[1]Université de Bordeaux
[2]Université de Mons, L.D.A.R.
[3]IREM de Montpellier
[4]IREM de Grenoble
[5]IREM de Rouen
[6]IREM de Paris
[7]IREM de Paris Nord
[8]IREM d'Aquitaine
[9]IREM de Limoges

La partie II, « Exemple d'usage en physique » a été écrite par Cécile de Hosson, Nicolas Décamp et Nathalie Lebrun. [1]

La coordination de l'ouvrage a été assurée par Pascale Sénéchaud.

1. L.D.A.R.

Table des matières

Préface

Ce document est l'émanation de plusieurs années de travail au sein de la Commission Inter-IREM Université. Il regroupe, entre autres, des textes qui ont servi de support de stages, de publications. Il s'agit d'un ouvrage collectif : les auteurs ont contribué à sa réalisation par leurs remarques et leurs interventions sur l'ensemble des sujets abordés ; ils sont membres de la commission dont la composition en fait la richesse : des enseignants des premières années d'université, des enseignants-chercheurs dans différents domaines des mathématiques ou encore des didacticiens, exerçant en Belgique ou en France.
Intéressés par les questions d'enseignement universitaire, nous nous sommes focalisés sur les problèmes liés à l'enseignement de l'analyse et plus particulièrement des notions de limites de fonctions numériques d'une variable réelle et de suites numériques.
Ces notions sont apparues, non pour résoudre de nouveaux problèmes mais pour fonder l'analyse et l'enseigner comme le souligne Cauchy [30]. De nombreuses recherches ont montré les difficultés qu'ont les élèves et les étudiants relativement à ces notions qui sont incontournables dans un cours d'analyse (voir III-6).
Cette brochure s'adresse essentiellement aux enseignants de terminale S et de premières années post-bac : aux premiers pour qu'ils soient informés de ce qui attend leurs élèves après la classe de terminale dans un cursus scientifique et aux seconds pour qu'ils sachent sur quelles connaissances de leurs étudiants s'appuyer. Elle comporte trois parties, elles-mêmes découpées en paragraphes.

Dans la première partie, nous dressons un état des lieux quant à l'enseignement de ces notions aussi bien au lycée qu'en première année d'université. Nous y soulignons (paragraphe **1**) la richesse de la notion de fonction numérique à une variable : on peut en étudier des propriétés locales, globables ou encore ponctuelles et ce dans différents registres. Comment s'articulent alors les programmes ? Comment nos élèves et nos étudiants appréhendent-ils cette multiplicité de vues ?
Dans les paragraphes suivants (**2**, **3** et **4**) nous étudions des manuels de différents niveaux. Tout d'abord des manuels de première et de terminale en ce qui concerne la notion de limites de fonctions. Il est alors clair que les définitions et les concepts même de limites de fonctions ou de suites sont traités de manière très lacunaire dans le secondaire.
Puis nous proposons une lecture des chapitres de manuels ou de polycopiés de cours concernant l'ensemble des réels. Comment est-il présenté à nos étudiants sachant que sa construction n'est plus enseignée en première d'université, ni en classes préparatoires ? Nous avons voulu répondre à cette question, avant même d'aborder une analyse des chapitres sur les limites de fonctions dans les mêmes types d'ouvrages, ce qui est proposé dans le paragraphe suivant.
Enfin nous ne pouvions pas parler de limites sans parler de limites de suites, ce qui est fait dans le dernier paragraphe de cet état des lieux. Étudier les manuels de première et de terminale, analyser les programmes, nous a permis de nous rendre compte à quel point le travail sur l'objet « suites numériques », est différent selon qu'on le regarde depuis le secondaire ou depuis la première année de sciences à l'université.

Dans la deuxième partie, nous proposons des exemples d'utilisation en physique. Pour cela nous avons fait appel à des physiciens du laboratoire de didactique André Revuz afin qu'ils mettent en évidence la notion de limite dans des exemples à la portée de nos élèves et étudiants. Le sens de cette notion en physique n'est pas forcement le même que celui donné en mathématiques et il est souvent implicite. Comme nos étudiants ont à la fois des cours de mathématiques et de physique, il nous paraît important d'en être conscient.

Enfin, nous proposons des pistes pour enseigner au mieux ces notions de limites de fonctions et suites numériques à nos étudiants. La troisième partie s'appuie sur des expérimentations que certains d'entre nous avons ménées en classe (paragraphes **1**, **2** et **3**), sur des exemples que chacun peut s'approprier pour motiver l'introduction du formalisme (paragraphe **4**) et sur le discours qui peut-être tenu lors d'exercices ou de cours autour de ces notions (paragraphe **5**). Les expérimentations sont d'ordres différents : sur les notions à proprement parler avec une réactualisation de deux ingénieries (paragraphes **1** et **2**) et sur différents types de convergence pour les suites au travers l'exemple du flocon de von Koch (paragraphe **3**).
Dans le dernier paragraphe (**6**) nous avons voulons faire un point sur les publications qui ont trait de près ou de loin aux sujets traités ici. Vu l'ampleur de la bibliographie, il nous est paru raisonnable de classer ces publications.

L'objectif de ce travail est d'aider nos collègues : il est clair que la troisième partie n'est faite que de propositions et le discours (paragraphe **5**) que nous pouvons avoir quand nous parlons de limites à nos étudiants va être différent d'un enseignant à l'autre. Il nous a semblé important de souligner les choses à dire qui peuvent lever des imprécisions ou éviter des confusions. Mais il ne s'agit là que de pistes que vous pouvez choisir ou non de vous approprier.

Nous espérons que vous pourrez adapter notre travail, nos exemples et exercices à votre classe ou à votre groupe d'étudiants et que au delà de ce pragmatisme vous aurez pris conscience de toute la richesse de cette toute petite – et pourtant fondamentale – partie de l'analyse qui si elle est bien comprise des étudiants leur permettra de mieux appréhender la suite de leur cursus.

Pascale Sénéchaud
Responsable de la Commission
Inter-IREM Université.

Première partie
État des lieux

Introduction

Cette première partie établit plusieurs constats : tout d'abord sur la perception qu'ont nos étudiants de la notion de fonction numérique à une variable réelle, puis sur la manière dont sont présentées cette notion et les notions de limites de suite et de fonction dans des ouvrages.
Le premier constat repose sur une étude des résultats de questionnaires d'étudiants posés en 2007 et 2008 et s'appuie sur une synthèse des travaux menés à cette occasion : l'étude d'une fonction numérique à une variable réelle fait appel à plusieurs registres (numérique, graphique, ...) , mais aussi à des propriétés de types differents (locales, globales ou ponctuelles). Une des questions à laquelle nous tentons de répondre est comment et à quelles occasions les étudiants mobilisent ces registres et ces propriétés.
Des analyses d'ouvrages sont ensuite proposées. Tout d'abord au niveau lycée, sur l'introduction des limites de fonctions numériques à une variable réelle dans des manuels de première et de terminale. Puis au niveau universitaire avec plusieurs présentations : une de l'ensemble des nombres réels dans des manuels de première année post-bac, une des limites de fonctions numériques à une variable réelle dans des livres et des polycopiés de première année d'université. Enfin une présentation des limites de suites réelles dans les manuels de première et de terminale est proposée au sein d'une étude plus large sur les suites numériques où nous soulignons la différence de points de vue entre pré et post-bac.

1 La notion de « perspective » dans les calculs de limites de fonctions à la transition entre le lycée et l'université

Le but de cette partie est de définir la notion de « perspective » dans l'étude des fonctions numériques à une variable, de montrer son importance en particulier dans l'approche de la définition formelle de la limite et enfin d'étudier l'usage implicite qu'en font les élèves et étudiants. Ce dernier point s'appuie sur les résultats d'un questionnaire passé en 2007-2008 dans plusieurs universités : 298 réponses ont été analysées. Cette réflexion a fait l'objet d'une communication à ICMI [131], certains paragraphes sont inspirés des articles [130] et [129] et la fin du chapitre reprend des recherches plus récentes sur le même sujet [132].

1.1 De l'importance de la notion de « perspective » sur les fonctions

La notion de fonction numérique d'une variable peut s'étudier pour elle-même comme objet mathématique, connecté à deux autres notions essentielles du champ de l'analyse : les nombres réels (en particulier les nombres réels comme limites) et les suites numériques. Elle intervient aussi dans de nombreux domaines mathématiques ou extra mathématiques, comme un outil pour modéliser des problèmes et permettre d'y apporter des réponses. Cette dialectique outil-objet, comme l'a théorisée Douady [49] est nécessaire pour la bonne compréhension de la notion de fonction mais elle est aussi et surtout le reflet de la complexité de cette notion qui justifie la difficulté de son enseignement et de son l'apprentissage.

Le travail sur et avec les fonctions fait également intervenir plusieurs systèmes de représentation. Duval en 1993 [55] parle de registres de représentation. C'est une autre des spécificités essentielles : les représentations en tableau de valeurs (registre numérique), en courbes (registre graphique), par des formules (registre algébrique), en tableau de variations (registre schématique) et les représentations formelles (registre symbolique) sont autant de façon de «parler» d'une fonction, chaque registre étant plus ou moins porteur de sens, d'informations ou de lacunes.

Les fonctions sont en cours d'apprentissage au début de l'université. Leur bonne compréhension est liée à leur mise en fonctionnement en interaction avec plusieurs domaines – extra ou intra mathématiques, comme outil et comme objet [49], à travers des tâches variées plus ou moins complexes [99] et surtout dans des registres multiples afin que l'élève arrive à dégager in fine l'objet mathématique fonction et ses diverses représentations.

Par ailleurs les études de fonctions font appel à d'autres aspects qui nous invitent à rajouter un facteur de complexité. En effet, certaines propriétés sont ponctuelles en un point x_0, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de la valeur de la fonction f au point x_0. Par exemple, énoncer $f(x_0) = 3$ est une propriété ponctuelle qui ne donne aucune information sur $f(x_1)$ lorsque $x_1 \neq x_0$. D'autres propriétés sont globales, c'est-à-dire qu'elles sont des propriétés valables sur des intervalles : parité, périodicité, croissance, continuité et dérivabilité ... D'autres enfin sont des propriétés locales d'une fonction f en un point x_0, c'est-à-dire qu'elles dépendent des valeurs de f sur un voisinage de x_0 aussi petit soit-il :

avoir une limite en x_0, être continue en x_0, être dérivable en x_0, être négligeable devant une autre fonction au voisinage de x_0, avoir un développement limité en x_0... Dans certains cas, x_0 peut être infini mais ce cas est particulier. Nous y reviendrons.

Nous pointons donc ici le fait que la bonne compréhension de la notion de fonction suppose des rencontres et des mises en fonctionnement des fonctions sous les trois aspects ponctuels, globaux, locaux et une capacité à « adopter des perspectives sur les fonctions » associée respectivement à ces trois aspects. Autrement dit par Rogalski M. [108] « un enjeu important de l'enseignement des fonctions est certainement de développer chez les étudiants une prise de conscience de l'existence de points de vue spécifiques sur les fonctions, associés à ces trois perspectives, ainsi qu'une mise en fonctionnement de toutes ces perspectives d'une fonction » (voir aussi [14], [83] et [34]).

À l'université, on pourrait certainement introduire aussi une perspective « surglobale » à travers laquelle les fonctions sont vues comme éléments d'un ensemble dans le cadre plus vaste de l'analyse fonctionnelle.

1.2 Registres de représentation et perspectives (ponctuelle, locale et globale) : quelles interactions ?

Dans [14], Bloch développe l'idée que les différents registres de représentation sont spécifiquement réducteurs ou producteurs par rapport aux aspects ponctuels ou globaux des fonctions. Ils font travailler différemment l'adoption des perspectives sur les fonctions. Par exemple, le registre numérique, et notamment la représentation en tableau de valeurs, ne fait travailler que la perspective ponctuelle sur les fonctions.

La représentation en tableau de variations fait travailler la perspective globale. Coppé et al., [37], ont montré à ce propos que des élèves de seconde ont plus de difficultés à utiliser le registre schématique des tableaux de variations que le registre numérique des tableaux de valeurs. En même temps, la conversion d'un tableau de variations à un autre système de représentation (algébrique, graphique et même numérique) semble être plus difficile que la conversion à partir d'un tableau de valeurs. Ils pointent ainsi que la complexité du tableau de variations est certainement sous-estimée dans l'enseignement. Il y a donc des difficultés inhérentes à l'adoption de la perspective globale sur les fonctions à partir des tableaux de variations en classe de seconde.

Les représentations graphiques permettent à la fois le travail ou l'adoption des perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions : en effet le graphe d'une fonction peut être tracé point par point et l'adoption de la perspective ponctuelle sur le graphe permet de manipuler les propriétés ponctuelles classiques sur les images et les antécédents. Mais le graphe peut également être considéré globalement et il traduit alors pour les fonctions simples les propriétés globales : croissance, parité, périodicité, majoration ....

Le registre algébrique (la formule) ne peut pas soutenir aisément la perspective globale sur les fonctions. Rogalski [108] explique par exemple que « *les caractères producteurs dominants - de la représentation graphique - sont essentiellement le fait que la représentation graphique fait apparaître une fonction comme unité, ce qui la différencie de l'algorithme de calcul représenté par la formule ou aux données discontinues et partielles de la table de*

valeurs ». Dans la même idée, selon Raftopoulos et Portides [94], les formules ne peuvent être interprétées globalement que par les experts.
La fonction $x \mapsto x^2$ ou la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ peuvent être interprétées globalement par des élèves car ils ont le graphe en tête (disponibilité du graphe) mais c'est plus difficile pour eux dès que les expressions algébriques deviennent plus complexes.
Dire que $x \mapsto x^2 + \sqrt{x} + e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ car somme de trois fonctions croissantes suppose l'adoption de la perspective globale à partir de la formule, ce qui demande une certaine expertise. Les élèves de première ou terminale vont bien souvent calculer une dérivée de la fonction sur $]0, +\infty[$. En général, les propriétés globales ne sont pas visibles directement à partir de la formule mais elles doivent être déduites de traitements algébriques. Comme cas extrême, citons l'exemple classique de

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{e^{-x} - 1} - 1 - \frac{x}{2}$$

qui est une fonction paire. Cependant, même en adoptant une perspective globale sur la formule, il est impossible de s'en rendre compte. C'est une recherche directe de parité par le calcul de $f(-x)$ ou bien un développement en série entière qui permet de le réaliser.
Pour le non expert, la formule ne permet donc pas en général de déduire des aspects globaux de la fonction. Elle ne permet pas la construction directe du tableau de variations. Elle permet la construction de la courbe, mais point par point, ce qui ne fait pas travailler la perspective globale sur la fonction en jeu. C'est seulement la réinterprétation d'un tableau de variations ou d'un graphe déjà construit qui peut faire adopter une perspective globale sur la fonction pour des élèves.

Remarquons que le traitement de ces propriétés globales (croissance, parité, périodicité, majoration, ...) ne permet pas toujours de faire prendre conscience de la perspective globale.
D'une part certaines propriétés globales sont en effet des propriétés ponctuelles universelles, c'est-à-dire des propriétés ponctuelles vérifiées pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle de définition -par exemple : f est paire si et seulement si son intervalle de définition est symétrique et pour tout x de cet intervalle, on a $f(x) = f(-x)$; f est t-périodique si et seulement si pour tout x de son intervalle de définition, on a $f(x) = f(x + t)$. L'établissement de ces propriétés est donc facilement accessible par un traitement mettant en jeu une seule variable x. L'absence de perspective globale peut ne pas être handicapante sauf s'il faut réinterpréter globalement des propriétés ponctuelles universelles (par exemple pour tout x, $f(x) = f(x + t)$ donc f est t-périodique).
D'autre part des propriétés globales, comme la croissance, sont liées à la variation, et sans une hypothèse de dérivabilité des fonctions, elles ne peuvent pas se traduire par une propriété ponctuelle universelle. Elles nécessitent la prise en compte de deux valences de la variable sur l'intervalle de définition de la fonction : f est croissante si et seulement si pour tout x et y tels que $x \leq y$ on a $f(x) \leq f(y)$. La perspective globale et la quantification deviennent fondamentales dans l'activité. En particulier, un traitement de la croissance sous cette forme fait sans nul doute mieux travailler la perspective globale qu'un traitement par la positivité de la dérivée. Pour plus de détails, voir [130].

En ce qui concerne la perspective locale, remarquons tout d'abord que les propriétés locales en un point x_0 ne sont rien d'autre que des propriétés globales vérifiées sur tout voisinage de x_0. L'adoption de la perspective locale suppose donc la capacité préalable à adopter la perspective globale. En outre, dans une recherche ancienne sur l'acquisition de la notion locale de limite de suites, Robert [97] met en évidence la corrélation entre une conception statique de la notion locale de limite et l'acquisition de la définition en termes formels. Elle montre que les élèves et étudiants doivent dépasser la conception intuitive et dynamique de limite en terme de points x qui s'approchent de x_0 tandis que les $f(x)$ correspondants s'approchent de la limite l étudiée. Nous en déduisons que l'adoption de la persective locale est associée à la conception statique de limite. Autrement dit, la perspective ponctuelle sur les fonctions ne semble pas permettre une conception statique de la notion de limite mais plutôt une conception dynamique, qui fait obstacle à l'acquisition de la définition. Cette perspective ponctuelle peut même sûrement rentrer en conflit avec la perspective locale. Par exemple, les représentations de la droite numérique (et donc des fonctions) associées à la perspective ponctuelle sont des représentations discrètes - même s'il y a un nombre infini de points - alors que les représentations nécessaires pour adopter la perspective locale sont des représentations continues, qui ne sont disponibles qu'avec une perspective globale sur la droite ou la fonction. Au final, on retrouve que la perspective locale sur les fonctions ne peut s'adopter sans la disponibilité préalable de la perspective globale et savoir adopter la perspective globale serait une condition nécessaire pour conceptualiser la notion fondamentale de limite.

En outre, Robert et Boschet [101] pointent l'importance pour les étudiants de disposer de connaissances disponibles dans plusieurs registres et non seulement dans un seul (qu'il soit algébrique, graphique ou symbolique notamment). D'après ces résultats et conformément aux arguments développés plus haut, adopter la perspective globale sur les fonctions ne peut se faire sans une maîtrise par les étudiants de registres de représentation différents mettant l'accent sur les propriétés globales des fonctions, d'où la nécessité de connaissances graphiques et symboliques. Le registre algébrique, seul, peut ne pas suffire pour adopter la perspective globale : par exemple des propriétés comme la croissance ne sont pas suffisamment travaillées avec leur définition originale relevant de la perspective globale.

1.3 Que trouve-t-on dans les programmes du secondaire ?

À partir du collège, les représentations des fonctions (notamment les tableaux de variations, les graphiques et les formules algébriques) sont introduites, donnant corps à un nouveau cadre de travail pour les élèves, appelé cadre fonctionnel. Puis un chapitre important de la classe de seconde est le chapitre « généralités sur les fonctions ». Les notions de parité, de périodicité ou de croissance, dont nous avons déjà parlé, sont des propriétés globales des fonctions qui sont ou peuvent être travaillées en seconde avec l'objectif de faire prendre conscience de la perspective globale. Les notions de maximum, minimum (globaux) sont également travaillées, toujours sous différents registres de représentation. Les variations globales de fonctions polynômes de degré 2, de l'inverse, et dans une moindre mesure de fonctions homographiques, sont étudiées mais ces fonctions perdent le statut de fonctions de référence qu'elles avaient dans les anciens programmes et qui permettaient d'aborder les notions locales. Des inéquations sont résolues, à la fois algébriquement et graphiquement. Toutes ces activités doivent concourir à l'articulation entre perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions.

Cependant, comme dit Comin dans [36] : « *l'approche ensembliste de la notion de fonction par une mise en correspondance terme à terme des éléments de deux ensembles, modélisée par un graphe, évacue cette idée de contrainte entre deux grandeurs (...) nous faisons*

l'hypothèse que les pratiques qui sont proposées aux élèves portent sur un nombre fini de valeurs et éloignent les élèves de l'idée de variabilité et de continuité ».
Autrement dit, l'approche retenue dans les programmes pour la définition de fonction éloigne de la perspective globale sur les fonctions et peut enfermer les élèves dans la perspective ponctuelle. Les utilisations de tableaux de valeurs, les tâches de recherches d'image et d'antécédent ou les tâches de recherches de solutions à des équations seraient par exemple surreprésentées en fin de collège et en classe de seconde. En outre, l'herbier de fonctions disponibles se limite finalement à des fonctions affines, des fonctions polynomiales de degré 2, la fonction inverse et parfois quelques fonctions homographiques.
Après avoir mis en évidence le fait que les élèves n'exploitent que rarement la puissance du registre graphique au niveau global, Bloch [14] fait des propositions de séquences d'enseignement en seconde développant la perspective globale de ce registre. Maschietto [83] note l'importance que pourraient avoir les représentations graphiques comme outils pour entrer dans des tâches d'analyse locale dès la première S.

Dès la classe de seconde (mais surtout à partir de la première S) il semble que les élèves travaillent beaucoup avec les formules algébriques. En effet, comme le notent Coppé et al. [37], le registre algébrique déjà important pour l'étude des fonctions dans les manuels de seconde (de 30% à 58% des exercices selon les manuels) devient prédominant dans les manuels de première et de terminale scientifique. Le cadre fonctionnel se réduit alors au registre algébrique où tout le « relief » que l'enseignement a donné à la notion de fonction au collège et en seconde est masqué : en particulier les deux perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions, qui ne sont déjà pas suffisamment repérées par les élèves ne sont plus du tout mises en valeur, étant donné l'insuffisance du registre algébrique vis-à-vis de ces perspectives. Autrement dit, les élèves ne sont pas assez experts au sortir de la classe de seconde pour interpréter comme des fonctions sous leurs perspectives globales et ponctuelles, toutes les représentations algébriques rencontrées.

Cependant, les notions locales sont progressivement introduites : limite, continuité, dérivabilité, la continuité n'étant pas du tout travaillée dans la perspective locale et la dérivabilité étant quant à elle introduite dans les programmes de première scientifique avant la notion de limite. De nombreux travaux, [118], [29] ont mis en évidence la difficulté pour les élèves à adopter la perspective locale à partir du jeu de cadre géométrique/numérique symbolique [118] proposé dans l'enseignement. Cette introduction est basée sur l'idée de tangente comme limite des sécantes mais les élèves ne peuvent avoir qu'une perspective globale sur la tangente, vue au collège et en seconde comme droite qui intercepte la courbe (le cercle ou la parabole essentiellement) en un unique point. Le changement de perspective du global au local, important au moment de l'introduction de ce nombre dérivé, peut donc ne pas être suffisamment repéré par les élèves. Cette perspective locale est ensuite très peu travaillée pour elle-même en première et en terminale. Dans un travail d'ingénierie, peu usuel dans les pratiques enseignantes, Maschietto [83], [84] , en utilisant la fonctionnalité de zooms des calculatrices graphiques, a travaillé le jeu global/local au moment de l'introduction du nombre dérivé.
Les notions locales sont en fait principalement mobilisées dans des exercices où les fonctions sont représentées et représentables par une formule algébrique, en général polynomiale puis mêlant exponentielles et logarithmes en terminale. Les recherches de limites sont traitées par des calculs algébriques et les démarches de minorations, majorations et encadrement avec des fonctions de référence, qui existaient par exemple dans les programmes à partir de 1982 et qui pouvaient donner corps à la perspective locale, ont

quasiment disparu. Il n'y a plus de définition opérationnelle du concept de limite et une approche intuitive de la notion de limite apparaît. Les représentations graphiques permettent seulement d'illustrer les notions et quelques résultats locaux dont les preuves ne sont pas assumées. Selon Bloch [16] , « *cette illustration des propriétés est supposée s'appuyer sur l'intuition graphique. Elle ne questionne pas le rapport graphique / fonctions supposé transparent : les élèves sont supposés voir dans le dessin graphique ce qu'y voit le professeur* ». Compte tenu des considérations faites plus haut sur la difficulté d'accès à la perspective globale sur les fonctions, cette perspective locale ne peut effectivement pas aller de soi pour les élèves.

Au niveau du baccalauréat, Coppé et al. [37] notent qu'il existe toujours une forte algébrisation de techniques pour l'étude des fonctions, basées sur des règles de calcul algébriques (calculs de limites, de dérivées, étude des variations de fonctions polynômes, exponentielles, logarithmes ...), qui renforcent les élèves dans des pratiques algébriques. Les questions portent sur des études globales mais sont algébrisées. En particulier, les fonctions sont toujours dérivables globalement et la variation est étudiée à partir du signe de la dérivée, ce qui ramène des propriétés globales à des propriétés ponctuelles universelles et masque le caractère global de ces propriétés. Les tableaux de variations et les graphiques dont l'usage permettrait de travailler la perspective globale, ne sont que rarement des outils de travail mais sont essentiellement des objets à construire, à compléter, à confronter aux résultats algébriques. Le théorème et l'inégalité des accroissements finis, qui étaient des outils permettant des encadrements et des majorations globales, critiqués parce que stéréotypant les sujets de baccalauréat, ont disparu des programmes, participant à ce recul du travail des perspectives globale et locale sur les fonctions. Les questions ponctuelles (résolutions d'équations ou intersections de graphes) sont traitées algébriquement et le graphique ne sert encore qu'à conforter les résultats algébriques, ce qui réduit son rôle à un rôle de contrôle. Les problèmes locaux (limites et dérivabilité en un point principalement) sont encapsulés dans des procédures algébriques. Le taux de variation d'une fonction peut être explicitement demandé à des élèves de terminale mais l'idée de son calcul n'est pas supposée disponible spontanément quand elle est judicieuse.

Les articles [14], [36], [37] pointent comme nous, le fait qu'avec l'importance du travail algébrique, l'enseignement secondaire contribue à masquer les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions et évacue la perspective locale dans ses programmes, ses manuels et ses pratiques. Des élèves ainsi formés, qui se retrouveraient majoritairement dans les populations étudiantes à l'université, ne pourraient pas facilement passer du ponctuel au global et vice versa. Hors des situations algébrisées, les fonctions seraient considérées au mieux, soit comme des correspondances ponctuelles, soit comme des objets globaux, sans une articulation possible entre les deux perspectives. Dans les situations algébrisées, les objets manipulés seraient très formels, sans les différentes perspectives sous-jacentes.

1.4 Notre questionnaire et les différentes perspectives sur les fonctions : quelles sont celles adoptées par les étudiants ?

Dans le cadre du travail de la CIIU, un questionnaire a été proposé aux étudiants de L1 de plusieurs universités françaises (Paris Diderot, Bordeaux 1, Montpellier, Rouen) aux rentrées 2007 et 2008, pendant la première semaine de cours. 298 réponses d'étudiants ont été étudiées pour ce qui concerne l'analyse. Il s'agissait de regarder les capacités des étudiants à adopter diverses perspectives (ponctuelles, globale ou locale) et ce à travers des calculs de limites de suites et de fonctions sans usage des calculatrices. Il était important d'insérer aussi dans ce questionnaire des questions de limites de suites pour détecter des étudiants qui n'auraient raisonné que sous une perspective ponctuelle. Nous y reviendrons.

1. Parmi ces suites données par leur terme général, quelles sont celles qui ont une limite quand n tend vers l'infini ? Précisez cette limite quand elle existe
   1-1) $(-1)^n + 1$: ____________________
   1-2) $\sqrt{n} - n$: ____________________
   1-3) $\sin(2\pi n)$: ____________________
   1-4) $\cos(\frac{2\pi}{n})$: ____________________
2. Donnez les limites des fonctions suivantes :
   2-1) $f(x) = \frac{e^x}{x}$
      2-1-a) Quand x tend vers $+\infty$____________________
      2-1-b) Quand x tend vers 0____________________
      2-1-c) Quand x tend vers $-\infty$____________________

   2-2) $g(x) = x^{10}e^x$
      2-2-a) Quand x tend vers $+\infty$____________________
      2-2-b) Quand x tend vers 0____________________
      2-2-c) Quand x tend vers $-\infty$____________________

   2-3) $j(x) = \cos(2\pi x)$
      Quand x tend vers $+\infty$____________________

   2-4) $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$
      2-4-a) Quand x tend vers $+\infty$____________________
      2-4-b) Quand x tend vers 2____________________

Tableau 1 : Les questions concernant des calculs de limites

Les suites et les fonctions avaient été choisies en fonction de l'importance d'adopter des perspectives ponctuelles, globales ou locales pour obtenir leurs limites. C'est-à-dire que l'on cherchait à voir dans quelle mesure l'adoption de l'une ou l'autre des perspectives aidait à trouver la limite : c'est le cas pour la limite de la suite $(\sin(2\pi n))$ quand n tend vers l'infini - où l'adoption d'une perspective ponctuelle permet immédiatement de voir que cette suite est toujours nulle - et de la limite de la fonction $x \mapsto \cos(2\pi x)$ quand x tend vers l'infini pour laquelle l'adoption de la perspective globale permet immédiatement de conclure qu'elle n'existe pas. Nous avons également ajouté des fonctions et des suites pour lesquelles des manipulations algébriques aussi bien que l'utilisation des perspectives permettent de trouver les limites ($f(x) = \frac{e^x}{x}$; $g(x) = x^{10}e^x$; $h(n) = \sqrt{n} - n$). Enfin nous avons ajouté une question où l'adoption de la perspective locale paraît nécessaire pour trouver la limite : $\frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$ lorsque x tend vers 2.

La distribution des pourcentages de bonnes réponses parmi les 298 questionnaires est la suivante

1-1	1-2	1-3	1-4	**2-1-a**	**2-1-b**	**2-1-c**	**2-2-a**	**2-2-b**	**2-2-c**	2-3	2-4-a	2-4-b
48%	46%	18%	41%	**78%**	**9%**	**67%**	**87%**	**71%**	**55%**	20%	53%	13%

Table 2 : pourcentages de bonnes réponses dans les questionnaires

Le premier résultat d'ordre général est la faiblesse des pourcentages, ce qui peut surprendre étant donné que les étudiants interrogés étaient en filière science.
Le second résultat est le relatif succès des étudiants aux questions où le calcul de limite peut se faire en appliquant de façon directe une règle algébrique, comme $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ et $g(x) = x^{10}e^x$ (questions 2-1 et 2-2 en gras). Les différences de réussites peuvent être expliquées par quelques erreurs ou quelques défaillances dans l'application de ces règles.

Le résultat à la question 2.1b (9%) est particulièrement bas : ceci peut être expliqué par une habitude naturelle à ne considérer que les réels positifs alors que le résultat très bon en 2.2a (87%) peut lui être expliqué par la non existence d'une forme indéterminée. En question 2.1b, la perspective globale adoptée sur l'expression algébrique aurait pu permettre d'appréhender cette difficulté et cela montre certainement la difficulté des étudiants à adopter cette perspective.

En question 2.4a, on voit qu'une application non immédiate de règles mène à de moins bons résultats (53%) : les étudiants doivent mettre en facteurs au numérateur et au dénominateur les termes dominants, à savoir $\ln(x)$ et x. À défaut, ils doivent adopter la perspective locale pour dire que la fonction se comporte comme $\dfrac{\ln(x)}{x}$ mais ce n'est sûrement pas non plus naturel pour eux.

Un autre résultat est la faible réussite à la question 2-4-b (13%) qui montre à nouveau la difficulté de la grande majorité d'étudiants à quitter le champ algébrique et à adopter la perspective locale qui était cette fois nécessaire pour reconnaître ici un taux d'accroissement.

Enfin, seulement 3 étudiants sur 298 ont répondu correctement aux question 1.3 $\sin(2\pi n)$ et 2.3 $\cos(2\pi x)$. Cela nous a permis d'identifier deux groupes d'étudiants assez disjoints au sens où seuls ces 3 étudiants étaient à l'intersection : d'une part des étudiants qui semblent adopter de façon privilégiée la perspective ponctuelle et d'autre part ceux qui semblent adopter de façon privilégiée la perspective globale.
Nous avons donc décidé de diviser la population des 298 étudiants en fonction de leur réponse à la question 1.3 : 104 étudiants ont d'une part répondu que $n \mapsto \sin(2\pi n)$ n'a pas de limite lorsque n tend vers l'infini, ce qui semblait révéler l'adoption de la perspective globale sur la fonction sin - fonction qui oscille, notamment au voisinage de l'infini ; 68 étudiants ont répondu que $n \mapsto \sin(2\pi n)$ a 0 ou 1 comme limite, semblant révéler qu'ils adoptaient la perspective ponctuelle et l'évaluation de la suite en certains entiers n. Ici nous avons choisi de grouper les étudiants qui ont répondu 0 ou 1 car notre objectif était de conforter le fait qu'ils adoptaient de façon privilégiée la perspective ponctuelle et non qu'ils connaissaient leur trigonométrie de base. Nous avons aussi choisi de mettre les 3

étudiants qui ont répondu correctement aux deux questions dans cette catégorie..
Avec cette classification, 126 étudiants restaient hors des deux groupes. Nous pouvions penser qu'ils n'avaient pu recourir ni à l'une ni à l'autre des deux perspectives pour traiter $n \mapsto \sin(2\pi n)$ - rappelons qu'aucune règle algébrique ne s'applique. Nous verrons plus bas que ce troisième groupe était le groupe des étudiants globalement les plus faibles.
Avec cette catégorisation, nous avons regardé les résultats où les règles algébriques ne s'appliquaient pas (sauf pour la question 1-4) :

Questions	Réponses (effectifs)	Total (298)	Global (104)	Ponctuel (68)	Sans (126)
1-3 $\sin(2\pi n)$	Pas de limite	35%	**100%**	⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆
	0 ou 1	23%	⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆	**100%**	⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆
	Pas de réponse	27%	⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆	**65%**
2-3 $\cos(2\pi x)$	Pas de limite	20%	**52%**	4% (⋆)	3%
	0 ou 1	21%	15%	**73** %	**23%**
	Pas de réponse	30%	20%	10%	**49%**
1-1 $(-1)^n + 1$	Pas de limite	48%	**80%**	**49%**	21%
	Si pair/impair	5%	3%	**9** %	5%
	Pas de réponse	17%	0%	9%	**37%**
1-2 $\sqrt{n} - n$	Pas de limite	12%	11%	18%	10%
	$-\infty$	46%	**65%**	**47** %	29%
	Pas de réponse	23%	9%	12%	**41%**
1-4 $\cos(\frac{2\pi}{n})$	0 ou 1	41%	**53%**	**75%**	33%
	Pas de réponse	27%	5%	13%	**53%**

Table 3 : pourcentage des réponses d'étudiants aux questions 1-3, 2-3, 1-1, 1-2 et 1-4 avec le filtre de notre catégorisation

Pour simplifier, pour chacune des questions 1-3, 2-3, 1-1, 1-2 et 1-4, nous n'avons considéré que les principales catégories de réponses. Dans la première ligne, les nombres entre parenthèses sont les effectifs sur lesquels les pourcentages ont été pris. La note (⋆) signifie ces 4% sont les 3 étudiants qui ont répondu correctement à la fois à la limite de $(\sin(2\pi n))$ (1-3) et à la limite à l'infini de $x \mapsto \cos(2\pi x)$ (2-3).
On note (G) le premier groupe (104 étudiants), (P) le second groupe (68 étudiants) et (U) le troisième groupe (126 étudiants).
Ce classement est très simpliste et peut être critiqué à tous points de vue mais cela fournit un contraste très net entre les étudiants pour les questions 1-3 et 2-3 mais aussi ensuite pour les questions 1-1, 1-2 et 1-4 même si c'est moins marqué pour les deux dernières. Dans le dernier cas, les étudiants pouvaient par exemple à nouveau se raccrocher à une règle algébrique de composition assez immédiate. Mais il est intéressant de voir que sur cette question-là le pourcentage de réussite est meilleur pour le groupe (P). Cela renforce une idée introduite dans le paragraphe 3 sur le lien entre représentation algébrique et perspective ponctuelle (l'importance du ponctuel universel associé à la formule).

La plus importante corrélation est observée entre la question 2-3 $\cos(2\pi x)$ et la question 1-1 $(-1)^n + 1$ où aucune règle algébrique ne pouvait être appliquée : il y a une forte cohérence entre les réponses à la question 1-3 $\sin(2\pi n)$ et les réponses à la question 2-3 $\cos(2\pi x)$. Alors que 20% de la population totale donne la bonne réponse à la question 2-3, ce pourcentage augmente à 52% dans le groupe (G) et tombe à 4% et 3% dans les deux autres groupes. Ce résultat est aussi clair à l'inverse - mais cela n'apparaît pas sur le tableau compte tenu du choix de catégorisation. En effet, 90% des étudiants qui ont répondu correctement à la question 2-3 $\cos(2\pi x)$ ont répondu que $\sin(2\pi n)$ n'a pas de limite. Ceci dénote la position privilégiée de la perspective globale sur les fonctions adoptée par les étudiants de ce groupe, ceci les mène à des erreurs sur la limite de la suite.

La différence entre (G) et (P) montre que 80% des étudiants du groupe (G) répondent correctement à la question 1-1 $(-1)^n + 1$ alors que ce pourcentage tombe à 49% pour le groupe (P). C'est-à-dire que l'adoption de la perspective ponctuelle semble insuffisante pour affronter une telle suite pour laquelle à nouveau aucune règle algébrique ne permet de conclure. Dans le même temps, 21% des étudiants ont donné 0 ou 1 comme limite à la fonction $\cos(2\pi x)$ et ce pourcentage monte à 73% parmi les étudiants de (P), beaucoup plus que dans le groupe (U) 23%. En outre, dans le groupe (P), 9% des étudiants répondent que la limite de la suite $(-1)^n + 1$ dépend de la parité de n, plus que dans le groupe (U) 5%. Cela renforce la pertinence de notre classification.

Ces résultats confirment donc la difficulté des étudiants appartenant au groupe (P) d'approcher les fonctions comme des objets globaux, par exemple avec une limite unique. En fait, ces utilisations des perspectives ponctuelle ou globale se revèlent être de bons leviers pour répondre à certaines limites mais aussi des pièges dans d'autres cas. Il apparait que peu d'étudiants sont capables d'adopter l'une et l'autre des perspectives en fonction de la situation. En effet, si on regarde par rapport au groupe (U), il semble que les étudiants donnent plus souvent aucune réponse, ce qui revèle la faiblesse de ce groupe et leur difficultés à raisonner dès que les règles algébriques ne peuvent pas s'appliquer.

La catégorisation est moins significative vis-à-vis des réponses aux questions 2-1 et 2-2. Le tableau suivant montre encore la faiblesse relative des différents groupes vis-à-vis des manipulations algébriques. Il n'y a pas pour ces questions de différence majeure entre les trois groupes (G), (P) et (U), mais dans chacune des lignes du tableau, il est remarquable que les résultats des étudiants du groupe (G) sont supérieurs à ceux des étudiants du groupe (P), eux-mêmes supérieurs à ceux du groupe (U).

Réponses correctes	Total (298)	Grpe (G) (104)	Grpe (P) (68)	Grpe (U)(126)
Question 2-1-a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$	78%	**92**%	81%	65%
Question 2-1-b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{x}$	9%	**19**%	7%	2%
Question 2-1-c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x}$	67%	**83**%	72%	51%
Question 2-2-a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{10}e^x$	88%	**96**%	94%	80%
Question 2-2-b) $\lim\limits_{x\to 0} x^{10}e^x$	72%	**81**%	71%	65%
Question 2-2-c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{10}e^x$	56%	**70**%	60%	42%

Tableau 4 : pourcentage des bonnes réponses des étudiants dans chacune des catégories pour les questions 2-1-a-b-c et 2-2-a-b-c

La classification entre ces trois groupes peut aussi être vue en fonction des types de baccalauréat et les résultats des étudiants (leur mention). Cela montre à nouveau que l'appartenance des étudiants au groupe (G) est fortement corrélée aux bons résultats au baccalauréat et à la sortie du bac S. Pourtant comme on l'a dit plus haut, ce sont bien les étudiants du groupe (G) qui ont mal répondu à la limite de $\sin(2\pi n)$ et moins bien répondu à la limite de $\cos(\frac{2\pi}{n})$.

Réponses correctes	Total (298)	Grpe (G) (104)	Grpe (P) (68)	Grpe (U) (126)
Bac S	91%	97%	95%	84%
Passable	48%	27%	**61**%	**56** %
Assez Bien	35%	**47**%	23%	31%
Bien	15%	**22**%	13%	11%

Tableau 5 : pourcentage des étudiants avec un Bac S, mention « passable », « assez bien » et « bien » en fonction de leur appartenance aux trois groupes

1.5 Synthèse des résultats

Les résultats concernant des calculs de limites sont assez bons dès lors que ces limites mettent en jeu des règles algébriques sur les fonctions monômes, exponentielles, logarithmes, avec des formes et des bornes usuelles : le calcul de la limite de $g(x) = x^{10}e^x$ lorsque x tend vers moins l'infini étant par exemple réussi à 55%, le calcul lorsque x tend vers plus l'infini étant le mieux réussi avec 87%. Les résultats sont toujours corrects mais sensiblement moins bons lorsque les formes ne correspondent pas à des formes indéterminées usuelles de terminale, c'est-à-dire que les règles algébriques ne s'appliquent pas de façon immédiate : le calcul de la limite de $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x-2}$ lorsque x tend vers plus l'infini étant par exemple réussi à 53%, celui le moins bien réussi étant celui de la limite de $f(x) = \frac{e^x}{x}$ lorsque x tend vers 0, réussi à seulement 9% : l'absence de disponibilité de la perspective globale sur la fonction représentée semble pouvoir expliquer ce taux d'échec chez les étudiants. En effet, la fonction tend vers $-\infty$ en 0^- et tend vers $+\infty$ en 0^+. La perspective globale adoptée sur l'expression algébrique $f(x) = \frac{e^x}{x}$ permettrait d'appréhender cette difficulté mais comme nous l'avons expliqué plus haut seul un expert peut spontanément adopter cette perspective à partir de la seule expression algébrique. L'étudiant peut ne référer qu'aux formules algébriques et ne pense pas à la différence de traitement qui doit être faite en 0^+ et en 0^-.

En outre, ces résultats de la CIIU ont remis en évidence la non disponibilité chez les étudiants de la perspective locale nécessaire pour un calcul correct des limites en forme de taux d'accroissement, le calcul de la limite de $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x-2}$ lorsque x tend vers 2 n'étant réussi qu'à 13%.

Concernant des calculs de limites à l'infini qui ne mettent pas en jeu des règles algébriques, seuls 3 étudiants sur 298 ont répondu correctement aux deux calculs de limites $\sin(2\pi n)$ lorsque n tend vers l'infini et $\cos(2\pi x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Plus précisément, deux groupes d'étudiants sont alors apparus nettement. Le premier groupe est constitué des étudiants, très nombreux (126 sur 298), qui ne se dégagent pas d'une approche algébrique et ne donnent aucune réponse à ce genre de calcul de limite. L'autre groupe est constitué d'étudiants qui semblent pouvoir dépasser cette approche purement algébrique des fonctions et des calculs de limites : on trouve cependant parmi ceux-là d'une part des étudiants qui semblent plutôt raisonner sur ces deux limites (et d'autres) avec une perspective ponctuelle, donnant une limite finie à la suite et à la fonction (54 étudiants sur les 298), et d'autre part des étudiants qui semblent plutôt adopter une perspective globale pour conclure (traitant notamment les suites comme des fonctions, 49 sur 298). Pour tous les autres étudiants, hors des deux grands groupes que nous venons d'identifier, le questionnaire était trop limité pour les catégoriser.

Comme le calcul de ces limites se fait à l'infini, il semble que ce ne soit pas la perspective locale qui soit pertinente ici mais bien la perspective ponctuelle (dans quelques cas particulier de suites comme $\sin(2\pi n)$ où la perspective ponctuelle permet de trouver que la suite est constamment nulle) et surtout la perspective globale sur les fonctions en jeu (comme pour la fonction $x \mapsto \cos(2\pi x)$ où la perspective globale permet de déduire de l'oscillation la non convergence). De fait, si la coordination des deux perspectives ponctuelle et globale se révélait nécessaire pour traiter au mieux tous les calculs de limites rencontrés, il est apparu que peu d'étudiants arrivant en L1 semblent capables de changer de perspective spontanément (une vingtaine dont les 3 qui ont répondu correctement aux limites de $\sin(2\pi n)$ et $\cos(2\pi x)$) et que beaucoup d'étudiants ne semblent mobiliser aucune des deux perspectives, répondant faux ou ne répondant pas à toutes les questions où les procédures algébriques sont inefficaces et où l'utilisation de ces perspectives est pertinente.

1.6 Quelles évolutions après la réforme des programmes ? Quelques éléments de réponse.

Nous avons mené depuis des expérimentations sur plus de 500 étudiants entrant en L1 à l'université Paris Diderot [132]. Les résultats mettent en évidence la façon dont certains étudiants adoptent tout de même des perspectives pour calculer des limites de fonctions (pas de mélanges avec des suites dans cette expérimentation, limites aussi bien à l'infini qu'en des valeurs finies).

Nos nouvelles analyses laissent penser que bien que les étudiants arrivent toujours avec une vision très algébrisée des fonctions et des habiletés essentiellement algébriques pour répondre aux calculs de limites, ils sont beaucoup moins à l'aise avec les règles de l'algèbre des limites et les méthodes algébriques pour lever les indéterminations quand les règles ne permettent pas de conclure. Ils se sont sans doute constitués des connaissances d'une algèbre généralisée ($\exp(-\infty) = 0$; $\ln(0) = -\infty \cdots$) où les calculs de limites s'amalgament à des problèmes de substitution et de composition numériques. Mais dans les sommes, produits, quotients, ils semblent identifier difficilement les formes algébriques indéterminées ($\infty - \infty$, $0 \times \infty \cdots$). Il n'y a pas de différence sensible dans les résultats selon que les formes sont déterminées ou indéterminées. Les étudiants ont sûrement en outre des difficultés pour entrer dans un travail algébrique permettant de lever les indéterminations le cas échéant.

Il semble toutefois qu'on arrive progressivement à faire d'un cercle vicieux un cercle ver-

tueux. Faute d'un travail suffisant mettant en jeu les perspectives sur les fonctions (associé à un travail graphique par exemple, et un stock suffisant de fonction de références), les étudiants ne comprennent pas correctement et ne savent pas appliquer correctement les règles techniques qu'on leur demande de retenir et d'appliquer. Ils n'identifient en particulier plus quelles sont les formes déterminées et les formes indéterminées. De surcroît, ils ont des difficultés en calcul algébrique (mise en facteur notamment).
En fait les étudiants peuvent avoir développé des connaissances leur permettant d'adopter, au moins partiellement, les perspectives que nous avons introduites. Ils semblent par exemple identifier à tort et à raison que l'exponentielle est une fonction qui domine les autres fonctions qu'ils rencontrent. Ils semblent parfois pouvoir mettre en perspective locale les différents termes dans les formules algébriques qu'ils rencontrent, ce qui se substituent peut-être à l'algèbre des limites, très technique, mais qui n'a plus beaucoup de sens pour eux, faute d'avoir justement travaillé explicitement les différentes perspectives sur les fonctions.

Bien sûr, faute d'être étayées institutionnellement par les enseignants, ces connaissances sur les perspectives sont incomplètes, non maîtrisées et mènent aussi bien à des bonnes réponses qu'à des erreurs. On voit également des juxtapositions de perspectives, avec des règles en actes que nous avons bien identifiées comme par exemple « 0 fois quelque chose fait toujours 0 ». Peut-être l'enseignement devrait-il bâtir l'analyse sur ces connaissances partielles liées aux perspectives plutôt que l'algébriser encore plus ?

2 Le concept de « limite de fonctions » dans le programme actuel et quelques manuels de terminale S

Les constats unanimes des enseignants universitaires révèlent que les étudiants de première année scientifique utilisent mal les « techniques » de calcul des limites, même dans des cas très simples, et que le concept de limite de fonction n'est pas du tout compris. Or, ce concept est au programme de terminale S et les enseignants de lycée disent passer un temps non négligeable sur le thème des fonctions (étude sur $\mathbb{R}$, tableau de variations, courbes, calculs de limites). Pour en savoir plus, nous avons étudié ce que le programme prévoit réellement d'enseigner en terminale S et ce que proposent les manuels dans le chapitre consacré à cette notion. Nous avons étudié quelques manuels connus : Math'x 2012 & 2016 [32] et [137], Indice 2012 & 2016 [28] et [91], Repères 2012 [33], Odyssée 2012 [125]. Nous donnons ici notre analyse des éléments proposés dans les parties « cours » des chapitres consacrés à ce concept : définitions, expressions langagières, exemples et représentations graphiques.

Le programme officiel actuel (2011)

Le concept de « limite de fonctions » est une notion classique du programme de terminale S. Dans le programme actuel (cf. annexe), il est écrit que :
« l'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer les limites dans des exemples rencontrés en terminale ».
L'enseignement doit être une extension du « travail réalisé sur les suites ».
Ce programme préconise enfin qu'il faut enseigner ce concept « sans formalisation excessive ».
Plus précisément ce qui doit être étudié est décrit en quatre courts paragraphes :

- Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini.
- Limite infinie d'une fonction en un point.
- Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions.
- Limite et comparaison.

Des questions viennent immédiatement.
Dans cette liste, on ne trouve pas le cas de la « limite finie d'une fonction en un point (fini) ». Or c'est le fondement de la définition du « nombre dérivé d'une fonction en un point », qui est au programme de première S, et dont il est prévu que les élèves aient une compréhension « intuitive » quand ils arrivent en terminale ! Il serait à notre avis judicieux et même nécessaire de traiter ce cas en terminale S.
D'autre part, on peut se demander jusqu'à quel point il est possible de « s'approprier le concept de limite » sans un minimum de formalisation, et comment les auteurs de manuels ont interprété et résolu cette question.
Enfin, la formalisation des définitions des limites finies ou infinies de suites est proposée ainsi dans le programme de TS de 2011 (cf. Annexe) :

> Pour exprimer que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ».
> Pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ».

C'est donc sur ces définitions que doit s'appuyer l'enseignement de la limite de fonctions en terminale S, pour les limites en l'infini, car cela ne dit rien sur les limites en un point (fini).

2.1 Les définitions

Dans les manuels de terminale S consultés, conformément au programme, les définitions sont données dans un langage non formalisé : il n'y a pas d'écriture en « ε, η » . Quelques intervalles (ouverts) sont écrits, mais le terme de « voisinage » n'est pas présent. Les notions de « valeur absolue » et de « distance » ne sont pas présentes, même non formalisées.

Le quantificateur « il existe » est absent (sauf dans des notes en marge dans certains manuels) ; le quantificateur « quel que soit » , lui, est présent, mais sous des formes langagières diverses : « pour tout », « tout », « n 'importe quel » – à l'exclusion de l'expression « quel que soit » !

Peu d'inégalités sont écrites avec des symboles mathématiques, du type par exemple
$x > m$, pour dire que x tend vers l'infini, peut-être parce que cela nécessiterait un ou des quantificateurs. Tout ceci est remplacé par des expressions de type « aussi grand qu'on veut », « plus grandes que », « proche de », ou par des intervalles.
Enfin, les formes des définitions ne permettent pas de repérer si ce sont des implications (comment écrire de manière formalisée l'expression « à condition que » ?), des équivalences, ou de simples propositions.

Par exemple, le manuel Math'x propose, pour les limites en l'infini (2011, p.162, identiques dans l'édition 2016 [32] et [137]), les définitions suivantes :

> **Définition 1**
> « Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle $]a\,;+\infty[$.
> f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si les images $f(x)$ sont plus grandes que n'importe quel réel donné à condition de prendre x assez grand.
> f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si les images $f(x)$ sont plus petites que n'importe quel réel donné à condition de prendre x assez grand ».
>
> **Définition 2**
> « Si f est une fonction définie sur un intervalle $]a\,;+\infty[$,
> f a pour limite le réel l quand x tend vers $+\infty$ si les images $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de l, à condition de prendre x suffisamment grand. On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
> De même si f est définie sur $]-\infty; a[$, f a pour limite un réel l quand x tend vers $-\infty$ si les images $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de l, à condition de prendre $x < 0$ avec $\mid x \mid$ suffisamment grand. On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ ».

Mais on trouve, dans les marges, des définitions formelles :

> « **Note**. De façon formalisée :
> $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si pour tout réel A, il existe m tel que pour tout $x > m$,
> $f(x) > A$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si pour tout réel A, il existe m tel que pour tout $x > m$, $f(x) < A$. »

« **Note**. De façon formalisée, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ si pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe m tel que pour tout $x \geq m$, $f(x) \in I$. »

On trouve aussi de telles définitions formalisées dans les marges du manuel Repères 2012 [33], qui a choisi de les mettre en face des représentations graphiques (voir I-2-2 ci-après), et dans le manuel Odyssée 2012 [125], qui, lui a choisi de les mettre dans le premier exemple qui suit la définition (voir I-2-3 ci-après) !
C'est comme si les auteurs de ces manuels avaient ressenti la nécessité d'une formalisation des définitions, tout en voulant respecter la consigne du programme.

Signalons que le manuel Odyssée TS 2012 [125] fait un choix original pour définir la limite en tout point fini ou infini, en ne donnant qu'une seule définition pour la limite en un point fini ou infini, annonçant : « le symbole α désigne soit un réel x_0, soit $-\infty$, soit $+\infty$ ». Les voici.

Limite finie
Définition
On dit que la limite de f en α est égale au réel l lorsque tout intervalle de la forme $]l - k\,; l + k[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de α.
On note $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$.

Limite égale à $-\infty$
Définition
On dit que la limite de f en α est égale à $-\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty\,; m[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de α.
On note $\lim_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Limite égale à $+\infty$
Même que la précédente, en remplaçant $-\infty$ par $+\infty$ et $]-\infty\,; m[$ par $]m\,; +\infty[$.

En faisant ce choix, ce manuel considère (de manière implicite) le cas de la limite finie en un point fini – non prévu au programme et non traité par les autres manuels. Mais est-il raisonnable de considérer que l'étude de la limite en l'infini est du même ordre de difficulté que celle en un point fini, tout au moins pour des élèves de terminale S ? Et que signifie « suffisamment proche » quand on est au voisinage de l'infini ? On ne voit pas dans cette écriture l'idée des inégalités $x > m$ (ou $x < m$), présentes dans d'autres manuels, même si elles ne sont pas quantifiées.

Le manuel Indice 2012 [28] fait un lien très rapide entre les définitions de limite de fonction et de **limite de suite** (un autre chapitre du manuel), dans la remarque que « ces définitions sont analogues à celles données pour les limites d'une suite numérique, « dès que x est assez grand » remplaçant « à partir d'un certain rang » ». Mais ce lien n'est plus évoqué ensuite.
Dans l'édition 2016 de Indice (p.46) [91], il y a deux modifications non négligeables dans l'écriture des définitions, par rapport à l'édition de 2012.

– Les définitions sont données en langage « naturel », et l'écriture formalisée de la

limite est donnée à la fin.
– Les définitions sont des équivalences : « si et seulement si ».

Nous avons regardé comment, plus précisément, sont exprimées ces limites diverses, pour la variable x comme pour son image $f(x)$.

▷ **pour exprimer que x tend vers l'infini :**

— « à condition de prendre x suffisamment grand » et, en $-\infty$, « à condition de prendre $x < 0$ avec $\mid x \mid$ suffisamment grand »(Math'x 2011 et 2016 [32] et [137])

— « dès que x est assez grand », **sans distinction pour $-\infty$ et $+\infty$** (!!) (Indice 2012 et 2016 [28])

— « dès que x est « assez grand » (resp. dès que x est négatif et « assez grand en valeur absolue ») » (Repères 2012 [33])

— « dès que x est suffisamment proche de α », α désignant soit un réel x_0, soit $-\infty$, soit $+\infty$ (Odyssée 2012 [125])

▷ **pour exprimer que $f(x)$ tend vers une limite l (ou L) :**

— « si les images de $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de l » (Math'x 2011 et 2016 [32] et [137])

— « si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ » (Indice 2012 [28])

— « si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ » (Indice 2016 [91])

— « si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les $f(x)$ » (Repères 2012 [33])

— « lorsque tout intervalle de la forme $]l-k\,;\,l+k[$ contient tous les $f(x)$ » (Odyssée 2012 [125])

▷ **pour exprimer que $f(x)$ tend vers une limite infinie :**

en $+\infty$

— « si les images $f(x)$ sont plus grandes que n'importe quel réel donné » (Math'x 2012 et 2016 [32] et [137])

— « si tout intervalle $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ » (Indice 2012 [28])

— « si, et seulement si, tout intervalle $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ » (Indice 2016 [91])

— « lorsque tout intervalle de la forme $]m\,;\,+\infty[$ contient tous les réels $f(x)$ » (Odyssée 2012 [125])

en $-\infty$

— « si les images $f(x)$ sont plus grandes que n'importe quel réel donné » (Math'x 2012 et 2016 [32] et [137])

— « si tout intervalle $]-\infty\,;\,B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ » (Indice 2012 [28])

— « si, et seulement si, tout intervalle $]-\infty\,;\,B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ » (Indice 2016 [91])

— « lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty\,;\,m[$ contient tous les réels $f(x)$ » (Odyssée 2012 [125])

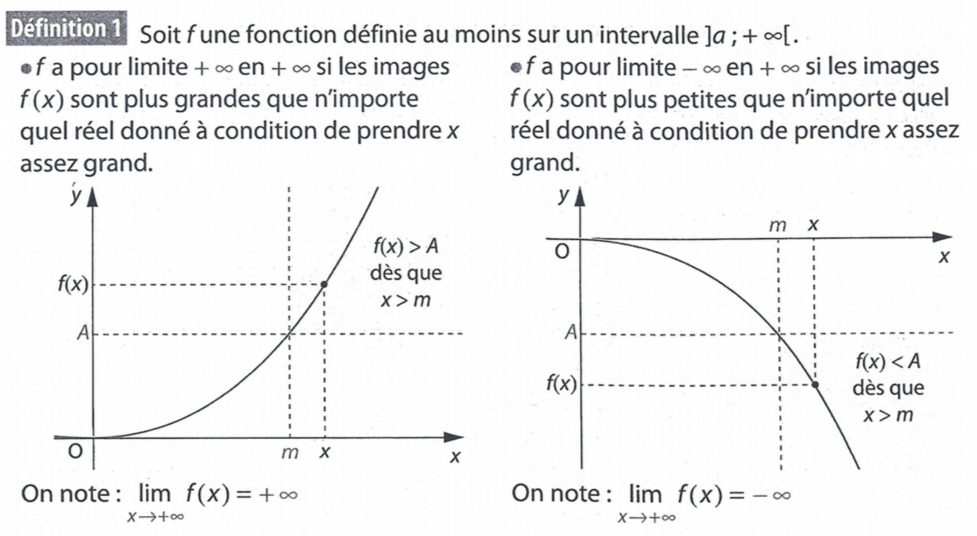
en $-\infty$ **et** $+\infty$ (Repères 2012)
— « Si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[(resp.]-\infty\,;A[)$, où A est un réel, contient tous les $f(x)$ »

En conclusion, la consigne du programme « sans formalisation excessive » a conduit les auteurs de manuels à proposer des définitions floues, qui, même si elles donnent une idée intuitive du concept de limite de fonctions (ce qui n'est pas garanti) ne sont pas du tout opérationnelles. En effet, comment interpréter formellement, ou utiliser dans un calcul, les expressions « aussi grand que », « aussi proche de », « assez grand », « suffisamment grand », etc.. ? De fait, de nombreux enseignants de terminale S disent ne jamais manipuler ces définitions pour elles-mêmes avec leurs élèves, ni les utiliser pour des calculs de limites. Les exercices en classe consistent essentiellement à travailler les techniques de calcul de limites en utilisant l'algèbre sur les limites de fonctions. On peut supposer que les auteurs de manuels n'étaient pas tous satisfaits de cette consigne de non formalisation. Certains contournent la consigne du programme, en proposant des définitions formelles dans les marges des pages en face des définitions ou des représentations graphiques, ou dans un exemple résolu immédiatement après la définition.

2.2 Les images, représentations associées aux définitions

Dans les manuels étudiés, les définitions sont toutes accompagnées de graphiques. La plupart des tracés sont des courbes monotones régulières, en tout cas monotones au voisinage du point étudié ou vers les asymptotes. Cependant, les manuels diffèrent beaucoup sur les explications des voisinages ou des intervalles dessinés. Voici quelques exemples.

▷ Dans **Math'x (2012 et 2016)** [32] et [137] , pour les limites infinies en l'infini, les graphes ne sont pas très explicites, les fonctions sont monotones, et il faut lire la définition formalisée écrite en petit dans la marge (voir paragraphe 2-1 ci-dessus) pour savoir ce que sont A et m.


Définition 1 Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle $]a\,;+\infty[$.

- f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si les images $f(x)$ sont plus grandes que n'importe quel réel donné à condition de prendre x assez grand.
- f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si les images $f(x)$ sont plus petites que n'importe quel réel donné à condition de prendre x assez grand.

On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Pour la limite finie en l'infini, le graphe qui illustre la définition est celui d'une fonction non monotone au départ mais qui semble monotone vers l'asymptote, avec les tracés des droites. Sur l'axe Oy, sont indiqués les ordonnées $f(x)$, l, $l-\varepsilon$

et $y = l + \varepsilon$, autour de l'asymptote et, en pointillés, le tracé d'une droite juste en dessous de l'asymptote – pour « montrer » que $f(x)$ ne l'atteint pas.

▷ Pour la limite finie en l'infini, **Repères 2012** [33] propose une interprétation graphique avec le tracé de deux droites en $L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$ autour de la droite d'équation $y = L$. Pour savoir ce qu'est cet ε, il faut lire ce qui est dans la marge, qui est en fait une définition formalisée !

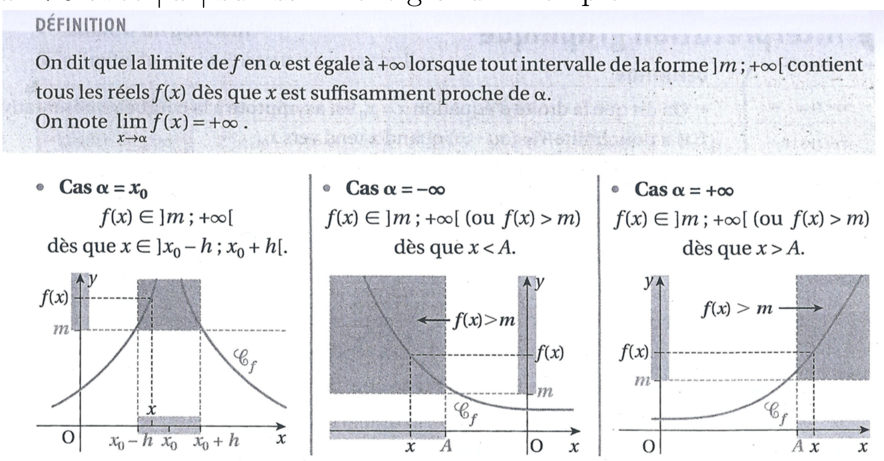
> « La définition peut se traduire par : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $x_0 > 0$ tel que, pour tout réel x de l'ensemble de définition de f vérifiant $x > x_0$, on a $f(x) \in]L - \varepsilon\,,\, L + \varepsilon[$. »

Pour la limite infinie en l'infini, les courbes dessinées sont non monotones avec les tracés de droites $y = M_1$, $y = M_2$, $y = M_3$, représentant différentes valeurs de M. Là encore, pour savoir ce que sont ces M, il faut lire dans la marge.

> « $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ce traduit par : Pour tout réel $M > 0$, il existe un réel $x_0 > 0$ tel que, pour tout réel x tel que $x > x_0$, on a $f(x) > M$. »

▷ Dans **Indice (2012 et 2016)**, [28] et [91], les graphiques sont presque muets, ils n'illustrent quasiment rien.
— toutes les courbes sont monotones,
— sur l'axe Oy, bande verte autour de L, ou bande large couvrant le graphique jusqu'aux bords du dessin (pour suggérer l'infini),
— sur l'axe Ox, aucune indication, seul un trait pointillé rouge vertical mais on ne sait pas ce qu'il représente.

▷ Le manuel **Odyssée 2012** [125], est celui qui propose les graphiques les plus « parlants ». Pour chacun des trois types de limite, des graphiques sont donnés pour les trois cas : $\alpha = x_0$, $\alpha = -\infty$, $\alpha = +\infty$, donc neuf graphiques en tout. Les courbes sont monotones sauf dans le cas de la limite finie (trois cas en fait regroupés en un seul, avec α indiquant une valeur générique). Ces dessins montrent des bandes en grisé représentant :
— sur l'axe Ox, les intervalles $]x_0 - n\,;\, x_0 + h[$, $] - \infty\,;\, A[$, $]A\,;\, +\infty[$, etc, $\cdots$
— sur l'axe Oy, les intervalles $]l - k\,;\, l + k[$, $] - \infty\,;\, m[$, $]m\,;\, +\infty[$, $\cdots$
et des indications telles que $\mid f(x) - l \mid < k$, $f(x) \in] - \infty\,;\, m[$; à condition de prendre $x < 0$ avec $\mid x \mid$ suffisamment grand. Exemple


DÉFINITION
On dit que la limite de f en α est égale à $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]m\,;+\infty[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de α.
On note $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$.

• Cas $\alpha = x_0$
$f(x) \in]m\,;+\infty[$
dès que $x \in]x_0 - h\,;\, x_0 + h[$.

• Cas $\alpha = -\infty$
$f(x) \in]m\,;+\infty[$ (ou $f(x) > m$)
dès que $x < A$.

• Cas $\alpha = +\infty$
$f(x) \in]m\,;+\infty[$ (ou $f(x) > m$)
dès que $x > A$.

Les légendes et commentaires dans ces graphiques sont « plus formalisés » que les définitions ! Mais, ici, il n'y a pas de note en marge pour expliquer ce que sont les lettres A, m, h.

2.3 Exemples et exercices résolus de la partie « cours »

Les premiers exemples, ceux qui suivent immédiatement les définitions ou les graphiques, jouent un rôle fondamental pour donner du sens à ces définitions et aider à leur compréhension. Les quatre manuels étudiés sont de ce point de vue très différents.

▷ **Dans Odyssée 2012** [125], le premier exemple proposé est celui de la limite en $+\infty$ de $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$.
L'exemple est formalisé, ce qui contraste avec la définition. De fait, cet exemple est une occasion pour donner une définition formalisée contextualisée. La première phrase est : « Quel que soit le réel $k > 0$, il existe un réel $A > 0$, tel que si $x > A$, alors $f(x) \in]2 - k\,; 2 + k[$. ». Dans ce manuel, c'est donc sur des exemples, qui viennent tout de suite après les définitions et les graphiques, que l'on trouve pour la première fois des formalisations précises avec des quantificateurs.

▷ **Math'x 2012** [32] propose quatorze « exercices résolus » répartis en six pages. En voici la liste. Elle montre bien les objectifs d'enseignement.

Exercices résolus :
1. Dresser un tableau de variations complet de $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$.
2. Déterminer la limite de e^x quand x tend vers $+\infty$.
3. Limite de f en l'infini et limite de la suite $(f(n))$.
4. Interpréter des limites finies à l'infini.
5. Étudier avec une calculatrice ou un logiciel une limite en l'infini.
6. Lire et interpréter un tableau de variations.
7. Étudier avec une calculatrice ou un logiciel une limite en un réel.
8. Limites de fonctions polynômes et fonctions rationnelles.
9. Traiter les cas des formes indéterminées.
10. Déterminer la limite d'une fonction par composition.
11. Déterminer la limite d'une suite par composition.
12. Déterminer une limite par théorème de comparaison.
13. Utiliser les propriétés de croissance comparée.
14. Déterminer le nombre de solutions d'une équation $f(x) = m$.

Aucun de ces exercices n'est résolu de manière à explorer la définition de la limite d'une fonction, même si cela aurait pu être possible dans les quatre premiers exercices proposés. À partir de l'exercice 5, il s'agit de traiter toutes les techniques (calculs, logiciels) de l'algèbre sur les limites, sur des fonctions explicites usuelles. (Dans **l'édition 2016,** [137] §1 (p.160) et §2 (p.162), on retrouve les mêmes définitions, exemples et notes dans les marges, reproduits à l'identique de l'édition 2012.)

▷ **Repères 2012** [33] donne tout de suite après les trois définitions, des listes de « limites à connaître », sans aucune démonstration. Les voici.

Tout de suite après la définition de limite finie en l'infini :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\text{et }\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0 \text{ où } n \text{ est un nombre entier strictement positif.}$$

Tout de suite après la définition de limite infinie en l'infini :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty}x^n=+\infty \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Tout de suite après la définition de limite infinie en un point :

$$\lim_{x\to0,\,x>0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to0,\,x>0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0,\,x>0}\frac{1}{x^n}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to0,\,x<0}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\text{et }\lim_{x\to0,\,x<0}\frac{1}{x^n}=+\infty \text{ si } n \text{ est pair}\,;\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Ce manuel fait donc le choix de centrer immédiatement l'attention sur une liste de limites de référence à connaître, sans en démontrer ou commenter aucune, qui serviront de base pour travailler les techniques de calcul de limites de diverses fonctions au programme de terminale S.

▷ **Dans Indice 2012 (identiques dans l'édition 2016)**,[91], [28], après les définitions de « limites en l'infini pour f étudiée au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$ » et de « limite infinie en un réel a », et des graphiques associés, il est écrit :
« On peut aussi définir la notion de limite finie en un réel a. On admet que :

$$(1)\ \lim_{x\to a}k=k, k \text{ étant un réel}\quad(2)\ \lim_{x\to a}x=a\quad(3)\ \lim_{x\to a}x^2=a^2$$

$$(4)\ \lim_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a} \text{ pour } a\neq0\quad(5)\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a} \text{ pour } a>0 \text{ »}$$

En résumé, les exemples et exercices résolus qui suivent immédiatement les définitions n'ont pas pour objectif d'explorer ces définitions – pour se les approprier – , cette question n'est pas du tout prise en considération dans les manuels étudiés. Il est vrai que ce n'est pas un objectif d'enseignement explicite des programmes. Les enseignants déclarent qu'ils ne prennent pas en charge ce travail d'exploration. Les exemples et exercices résolus des parties « cours » proposent seulement de reconnaître des limites sur des exemples particuliers de fonctions, de les interpréter sur un graphique ou dans un tableau de variations, quand ils ne consistent pas tout simplement en une liste de limites à connaître données sans aucune démonstration.

2.4 Conclusion

Cette étude du programme et de quelques manuels nous permet de comprendre pourquoi le concept de limite de fonction n'est pas du tout construit chez les étudiants de première année en sciences à l'université. Le programme de terminale S actuel permet au mieux d'engranger des techniques de calcul de limites de fonctions usuelles, à partir de règles algébriques (opérations et composition) et d'une liste de « limites de référence » toutes

prêtes pour ces calculs. Mais aucun élément technologique ne permet de contrôler la bonne utilisation de ces techniques. De plus, peu d'éléments théoriques qui donneraient du sens à ce concept sont proposés : les définitions ne sont pas explorées et pas assez formalisées pour être opératoires, les représentations graphiques sont plus souvent données pour être interprétées, et non à construire, et comme il est difficile de représenter des limites sur une courbe, elles ne sont pas toujours éclairantes. Le passage trop rapide à des techniques uniquement calculatoires cachent les aspects analytiques complexes de ce concept (Comme expliqué en partie I)1-).
L'échec dans l'appropriation du concept de limite de fonction au lycée – objectif déclaré du programme officiel – est en grande partie liée aux choix faits pour son enseignement, qui ne permettent pas d'atteindre cet objectif. Il faudrait accorder du temps aux définitions, les explorer et les formaliser. L'approche intuitive préconisée par le programme n'est pas vraiment développée dans les manuels : elle pourrait consister en un travail en termes d'approximations et de voisinages, par exemple, travailler sur des approximations en 10^{-n} faciliterait l'introduction du « ε, η », utiliser régulièrement les quantificateurs – qui sont au programme de première S et terminale S – et les écritures en valeur absolue permettrait de transcrire les voisinages en lien avec la notion de distance et de préciser les expressions « tend vers » et « aussi proche de ». Enfin, il nous semble qu'il ne suffit pas de faire observer aux élèves des courbes et des asymptotes, ils doivent aussi en construire à la main, et travailler les représentations d'une limite sur un graphique.

Manuels consultés

Collection Indice, TS, éditions 2012 & 2016, Bordas[28] [91].
Collection Math'x TermS, éditions 2011 & 2016, Didier [137], [32].
Odyssée TS, édition 2012, Hatier [125].
Repères TS édition 2012, Hachette [33].

2.5 Annexe

Programme terminale S 2011 – limite de suites

Limite finie ou infinie d'une suite.	◇ Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.	Pour exprimer que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ».

Programme terminale S 2011 – limite de fonctions

Limites de fonctions Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini. Limite infinie d'une fonction en un point.		Le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en terminale.
Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions.	• Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions.	La composée de deux fonctions est rencontrée à cette occasion, mais sans théorie générale.
Limites et comparaison.	• Déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement.	

3 Présentation de $\mathbb{R}$ dans des ouvrages à destination des étudiants de L1

Nous proposons de regarder comment les nombres réels sont présentés en première année d'université ou de classe préparatoire. Cette présentation s'appuie sur neuf manuels pris entre 1960 et 2015 et un cours en ligne. En filigrane de cette présentation, quelle conception peuvent actuellement avoir les étudiants du corps des nombres réels ?
Nous avons répartis les ouvrages en trois catégories : les plus anciens, ceux publiés avant le changement de programme de classes préparatoires de 2013 et ceux publiés après cette reforme. Les paragraphes 3-1 et 3-2 sont une synthèse d'un atelier présenté par Jean-Yves Boyer (IREM d'Aquitaine) lors du colloque ADIREM de mars 2010.

3.1 Ouvrages anciens

3.1.1 Cours de mathématiques 1^{re} année - J. Dixmier (Gauthier-Villars 1967) [47]

La partie analyse commence par une construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy de rationnels. Elle permet, au chapitre suivant sur les limites, de montrer que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

ANALYSE.

CHAPITRE XIII.

CONSTRUCTION DES NOMBRES RÉELS.

CHAPITRE XIV.

LIMITES.

On trouve en introduction de ce premier chapitre d'analyse

Le lecteur peut très bien sauter ce chapitre, et se contenter pour la suite de l'intuition des nombres réels qu'il possède depuis longtemps (à condition d'admettre le théorème 14.2.2). S'il n'est pas rebuté par les constructions abstraites, il trouvera ici l'un des procédés rigoureux de définition des nombres réels à partir des nombres rationnels supposés déjà construits.

La construction rigoureuse de $\mathbf{R}$ à partir de $\mathbf{Q}$ est un problème plus difficile que nous allons étudier en détail.

13.2. Suites de Cauchy, équivalence des suites de Cauchy.

13.2.1. Intuitivement, un nombre réel peut être défini comme un développement décimal, autrement dit comme une limite de nombres décimaux. D'autre part, beaucoup de nombres réels rencontrés en analyse apparaissent, non pas comme limites de nombres décimaux, mais comme limites de nombres rationnels. Ceci suggère de *définir* un nombre réel comme une suite de nombres rationnels. Mais on voit tout de suite que ce point de vue doit être corrigé, car deux suites de nombres rationnels doivent être considérées comme définissant le même nombre réel si elles

3.1.2 Principes d'analyse mathématique- W. Rudin (Ediscience 1976) [114]

Une construction de $\mathbb{R}$ par les coupures de $\mathbb{Q}$ est proposée en annexe du chapitre 1. Dans le chapitre 1, l'existence d'un corps commutatif contenant $\mathbb{Q}$ et possédant la propriété de la borne supérieure est admise. Comme application il est montré la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et l'existence de la racine n-ième d'un réel positif.
Le chapitre 1 se termine en mettant en évidence le lien entre décimaux et réels : un réel x est la borne supérieure de l'ensemble des décimaux qui lui sont inférieurs ou égaux.
Ci-après le début de l'annexe présentant la construction de $\mathbb{R}$ à l'aide des coupures.

ANNEXE

L'objet de cette annexe, est de construire effectivement $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Ainsi que nous l'avons déjà annoncé, ce travail est assez long et sera divisé en plusieurs étapes.

Étape 1 Les éléments de $\mathbb{R}$ vont être certains sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ appelés coupures. Une *coupure* est un sous-ensemble $\alpha \subset \mathbb{Q}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(*i*) α est une partie propre ($\alpha \neq \mathbb{Q}$) non vide de $\mathbb{Q}$.
(*ii*) Si $r \in \alpha$ et si $s < r$, ($s \in \mathbb{Q}$), alors : $s \in \alpha$.
(*iii*) Si $r \in \alpha$, alors il existe au moins un élément $s \in \alpha$ tel que $r < s$.

Dans le chapitre 3 sur les suites (dans un espace métrique), les suites de Cauchy sont définies et il est démontré en particulier que toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}^k$ converge dans $\mathbb{R}^k$.

3.2 Ouvrages antérieurs aux changements de programme de 2013

3.2.1 Analyse 1^{re} année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997, 2003) [80]

Dans le chapitre 1 l'existence d'un corps commutatif ordonné et archimédien, contenant $\mathbb{Q}$ est admis. Cela permet de montrer la densité des rationnels ainsi que des irrationnels dans $\mathbb{R}$.
Les chapitres 2 et 3 donnent les définitions et les propriétés algébriques des limites pour les fonctions numériques et les suites réelles ou complexes. En application est vue l'approximation décimale d'un réel.
Dans le chapitre 4 la propriété sur les segments emboités est admise. Elle permet de montrer que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure. En découle le théorème des suites croissantes de réels et le théorème de la limite monotone pour les fonctions numériques.

3.2.2 Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006) [95]

La partie analyse commence, après une observation sur rationnel et écriture décimale périodique, par une définition des nombres réels à partir de leur écriture décimale propre.

Définition 4. On dit qu'un réel $x = \pm n_0{,}\alpha_1\alpha_2\dots$ est positif ou nul (et l'on écrit $x \geqslant 0$) si $\pm$ est $+$; et l'on dit qu'il est strictement négatif (et l'on écrit $x < 0$) dans le cas contraire.

On note $-x$ le nombre réel égal à $\mp n_0{,}\alpha_1\alpha_2\dots$, ou à zéro si $x = 0$. (Ici $\mp$ signifie le signe opposé à $\pm$.)

On dit que x est strictement positif (et l'on écrit $x > 0$) si $-x < 0$; dans le cas contraire on le dit négatif ou nul (et l'on écrit $x \leqslant 0$).

Cette définition permet de définir une relation d'ordre et de montrer que cet ensemble possède la propriété de la borne supérieure.

Définition 5. Soit deux réels $x = \pm m_0{,}\alpha_1\alpha_2\dots$ et $y = \pm n_0{,}\beta_1\beta_2\dots$, non nuls. On dit que $x < y$ si l'un des cas suivants se présente :

1. ou bien $x < 0$ et $y > 0$;
2. ou bien $0 < x$ et $0 < y$ et $m_0 < n_0$;
3. ou bien $0 < x$ et $0 < y$ et $m_0 = n_0$ et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i < k$, et $\alpha_k < \beta_k$;
4. ou bien $x < 0$, $y < 0$ et $-y < -x$ par les règles précédentes.

On dit que $x > y$ si $-x < -y$; que $x \leqslant y$ si $x < y$ ou $x = y$; que $x \geqslant y$ si $x > y$ ou $x = y$.

La propriété de la borne supérieure permet de définir une addition et une multiplication sur les nombres réels.

Théorème et définition 8. Soit $x = m_0{,}\alpha_1\alpha_2\dots$, $y = n_0{,}\beta_1\beta_2\dots$ deux réels positifs. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons $x_k := m_0{,}\alpha_1\dots\alpha_k$ et $y_k := n_0{,}\beta_1\dots\beta_k$, qui sont des nombres décimaux. Alors l'ensemble :

$$A := \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots\} = \{x_k + y_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

est non vide et majoré. Sa borne supérieure est appelée la *somme* de x et y : on la note $x + y$. Si x et y sont rationnels, cela donne la somme habituelle de rationnels.

Notons $\tilde{y}_k := y_k + 10^{-k}$; l'ensemble :

$$B := \{x_1 - \tilde{y}_1, x_2 - \tilde{y}_2, \dots\} = \{x_k - \tilde{y}_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

est majoré également. Sa borne supérieure est appelée *différence* de x et y, on la note $x - y$. Si x et y sont rationnels, cela donne la différence habituelle de rationnels.

Autrement dit, pour additionner, on *tronque* les nombres à la $k^{\text{ème}}$ décimale, on ajoute les décimaux obtenus, et finalement on prend le plus petit réel dépassant tous les résultats obtenus de cette façon.

On peut remarquer que dans la seconde édition de cet ouvrage (2013) les auteurs renvoient cet exemple de construction de $\mathbb{R}$ à la fin du premier chapitre et ont commencé par l'axiomatique de $\mathbb{R}$ qui est donné comme un corps totalement ordonné et vérifiant la propriété de la borne supérieure. Viennent ensuite le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien et les théorèmes sur la convergence monotone et les suites adjacentes. Les suites de Cauchy ne sont pas définies.

3.2.3 Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007) [75]

La partie analyse est traitée dans une partie notée « *Base* » et une autre notée « *Analyse* ». La partie « *Base* » reprend l'étude des fonctions vues en terminale complétée par celle des fonctions circulaires et hyperboliques. La notion de limite est supposée acquise.
Dans l'introduction de la partie « *Analyse* » l'écriture décimale illimitée des rationnels introduit la notion de suites de Cauchy. Le chapitre « *droite numérique* » montre la nécessité d'introduire les nombres irrationnels. L'existence d'un corps commutatif ordonné contenant $\mathbb{Q}$ et possédant la propriété de la borne supérieure est admise. Dans le chapitre sur les suites une construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy est proposée. Un chapitre entier est réservé à l'écriture d'un réel dans une base et en fractions continuées

3.3 Ouvrages postérieurs aux changements de programmes de 2013

Sont étudiés trois livres de classe préparatoire MPSI dont le programme a changé en septembre 2013 et un ouvrage spécifiquement d'analyse.

— Les nouveaux Précis, Tout en un mathématiques MPSI, D. Guinin, E. Ladame, H. Vandeven (Bréal 2013) [66] ;
— Analyse MPSI/PCSI, G. Costantini (de boeck 2013) [41] ;
— J'intègre tout en un MPSI, Mathématiques, C. Deschamps, F. Moulin, A. Warusfel et al. (Dunod 2015) [44] ;
— Toute l'analyse de la Licence, J-P. Escofier (Dunod 2014) [57].

3.3.1 Organisation des quatre ouvrages

Les trois ouvrages des classes préparatoires respectent l'architecture des nouveaux programmes :

La pratique de calculs simples permet aux étudiants de s'approprier de manière effective les notions du programme. Le choix a donc été fait d'introduire très tôt un module substantiel visant à consolider les pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles). Les théories sous-jacentes sont étudiées ultérieurement, ce qui doit en faciliter l'assimilation.

Ils commencent par

1. $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné,
2. $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la limite monotone (LM) ou $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure (BS).

Puis dans le chapitre sur les suites, parfois beaucoup plus loin dans l'ouvrage, sont données les différentes propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$:

(LM) Théorème de la limite monotone,
(A) Convergence des suites adjacentes,
(SE) Théorème des segments emboités,
(BS) Théorème de la borne supérieure.

et des liens entre ces propriétés fondamentales.
Sont aussi montrées la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, l'approximation décimale des réels.

L'ouvrage « Toute l'analyse pour la licence » a pour objectif d'être un livre accessible aux étudiants de licence mais il est aussi destiné aux étudiants préparant le CAPES ou l'agrégation ou encore aux enseignants de mathématiques. Son architecture est différente des ouvrages précédents et on y trouve de nombreuses références historiques.

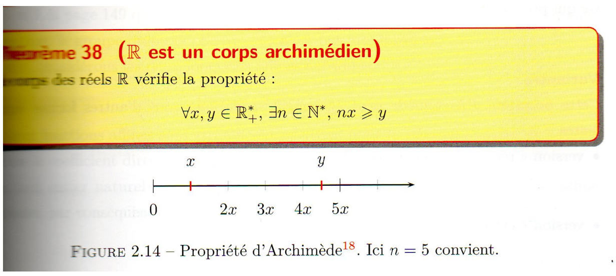
3.3.2 Enchaînement choisi dans chaque ouvrage

1) **Les nouveaux Précis, Tout en un mathématiques MPSI, D. Guinin, E. Ladame, H. Vandeven (Bréal 2013) [66]**
En début d'ouvrage seules les propriétés 1. et 2. (LM) de $\mathbb{R}$ sont énoncées et l'accent est mis sur du travail calculatoire avec les inégalités dans $\mathbb{R}$. La droite réelle est représentée. Beaucoup plus loin dans le chapitre sur les suites, les démonstrations de

$$(\text{LM}) \Rightarrow (\text{A}) \Rightarrow (\text{SE}) \Rightarrow (\text{BS})$$

sont faites. Il n'est pas montré, ni même signalé que $(BS) \Rightarrow (LM)$.
Il est souligné que (BS) est une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ que n'a pas $\mathbb{Q}$. Il n'est nulle part donné une idée même très vague de la construction de $\mathbb{R}$.
L'écriture décimale illimitée propre des réels est faite dans le chapitre séries numériques et la caractérisation des rationnels est démontrée.

2) **Analyse MPSI/PCSI, G. Costantini (de boeck 2013) [41]**
Dans cet ouvrage le parti a été pris de consacrer le deuxième chapitre au corps des réels. Il a de nombreuses notes historiques, « agrégats », « suites de Cauchy » et « coupures » sont cités dans l'introduction du chapitre où il est aussi regretté que ces constructions soient hors-programme.
Le cheminement choisi est de donner d'abord les propriétés 1. et 2. (BS) de $\mathbb{R}$ puis de montrer que $\mathbb{R}$ est archimédien et enfin la densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. La droite réelle n'est pas représentée bien qu'il y ait d'assez nombreux supports visuels.


ème 38 ($\mathbb{R}$ est un corps archimédien)
réels $\mathbb{R}$ vérifie la propriété :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, nx \geqslant y$$

FIGURE 2.14 – Propriété d'Archimède[18]. Ici $n = 5$ convient.

Dans le chapitre suivant sur les suites et séries, il est montré que

$$(BS) \Rightarrow (LM) \Rightarrow (A) \Rightarrow (SE).$$

L'équivalence est soulignée à l'occasion d'une note de bas de page couplée de remarques historiques, comme ci-après :

Axiome 2 (de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ (1817)[14])

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

14. C'est Bernhard Bolzano (voir page 290) qui formule cette propriété essentielle dans son ouvrage *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (signifiant « preuve purement analytique du théorème qui dit qu'entre deux valeurs qui donnent des résultats de signe opposé, il y a au moins une solution réelle de l'équation »). Il s'appuie sur cette propriété pour démontrer notamment le théorème des valeurs intermédiaires. Bolzano va même plus loin et propose une démonstration de cette propriété de la borne supérieure à l'aide de séries géométriques et d'un critère de convergence « à la Cauchy ». Il utilise au passage la propriété d'Archimède (voir page 201) comme principe admis (c'est-à-dire comme axiome). Il faut bien, de toutes façons, admettre au moins une propriété comme axiome ! Toute la difficulté ici est la *complétude* de $\mathbb{R}$ (voir page 291). En fait, dans $\mathbb{R}$, les quatre propriétés structurelles suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure ;
2. Toute suite de réels croissante et majorée converge ;
3. $\mathbb{R}$ est archimédien et toute suite de réels de Cauchy est convergente ;
4. $\mathbb{R}$ est archimédien et possède la propriété des segments emboîtés.

Ce théorème est l'un des plus profonds au sujet de la structure des réels. Dans ce livre, nous avons choisi la caractéristique 1 en axiome et on démontre toutes les autres. Bolzano, lui, a choisi la caractéristique 3 comme axiome. Les deux autres choix seraient possibles également. À chacun de faire comme il le sent !

Dans cet ouvrage il y a un complément sur les suites de Cauchy qui sont définies (bien que absentes du programme de MPSI) et il est montré que $\mathbb{R}$ est complet.
Par contre on note l'absence de résultat sur l'écriture décimale illimitée des réels. Il est uniquement signalé en note de bas de page que « un rationnel peut avoir un développement décimal illimité mais on démontre que celui-ci est toujours périodique. Cette périodicité est d'ailleurs propre aux nombres rationnels. »

3) **J'intègre tout en un MPSI, Mathématiques, C. Deschamps, F. Moulin, A. Warusfel et al. (Dunod 2015)[44]**
En début d'ouvrage seule la propriété 1. de $\mathbb{R}$ est rappelée. La droite réelle est représentée et il est même conseillé de « ne pas hésiter à faire usage de cette représentation, souvent très utile ! » (ce qui est mis en pratique dans l'ouvrage).
Beaucoup plus loin dans le chapitre sur les suites la première propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ donnée est (BS). Il est montré en exercice que $\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété (BS). Puis, comme pour l'ouvrage précédent, il est montré que $\mathbb{R}$ est archimédien et enfin la densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
Nous avons à nouveau l'enchaînement

$$(BS) \Rightarrow (LM) \Rightarrow (A) \Rightarrow (SE).$$

Il n'est pas montré, ni même signalé que (SE) et archimédien $\Rightarrow (BS)$. Il n'est nulle part donné une idée même très vague de la construction de $\mathbb{R}$.
L'écriture décimale illimitée propre des réels est faite dans le chapitre séries numériques et la caractérisation des rationnels est proposée en exercice corrigé. Le texte en est le suivant :

Un développement décimal illimité $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dit périodique *s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\forall n \geq n_0 \ , \ \beta_n = \beta_{n+p}.$$

1. *Montrer que, si le développement décimal illimité d'un nombre réel positif x est périodique, alors $x \in \mathbb{Q}$.*
2. *Soit $\frac{a}{b}$ un rationnel positif, avec $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$.*
   (a) *On note β_0 et α_0 respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de a par b et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, β_n et α_n, respectivement les quotient et reste de la division de $10\alpha_{n-1}$ par b. Montrer que le développement décimal illimité de $\frac{a}{b}$ est alors $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (b) *En déduire que le développement décimal illimité de $\frac{a}{b}$ est périodique.*

4) **Toute l'analyse de la Licence, J-P. Escofier (Dunod 2014) [57]**
Le chapitre sur les nombres réels est le troisième après un chapitre de pré-requis et un chapitre de généralités sur les fonctions entre ensembles. Des propriétés de $\mathbb{R}$ sont données dans ce chapitre, d'autres sont données dans le chapitre sur les suites (chapitre 5). Il y a de nombreux points historiques dans ces deux chapitres.
Le chapitre sur les nombres réels, débute avec la propriété 1. de $\mathbb{R}$, puis il est dit que « on impose à la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ l'axiome d'Archimède ».
Deux conséquences de cet axiome très souvent utilisées dans des preuves en analyse sont données :

- « Si $x \leq y$ pour tout $y \geq 0$ alors $x \leq 0$. »
- « L'intersection $A = \bigcap_{n>0} [0, 1/n]$ des intervalles $[0, 1/n]$, avec n entier strictement positif, est réduite au seul point 0. »

Sont aussi montrées la densité de $\mathbb{R}$ et celle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Il n'y a pas de représentation de la droite réelle mais lors de la définition des intervalles on a la représentation

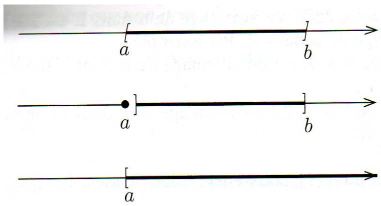


Figure 3.2 Exemples d'intervalles

Le dernier axiome donné est (SE) puis il est montré que $(SE) \Rightarrow (BS)$, un schéma aide à la compréhension de la fin de la démonstration.
Une idée de la construction de $\mathbb{R}$ à l'aide des coupures est donnée, il est simplement signalé que « en envisageant des développements décimaux jusqu'à l'infini, on définirait les nombres réels ».
Dans le chapitre sur les suites il est montré que

$$(BS) \Rightarrow (LM) \Rightarrow (A)$$

L'écriture décimale illimitée propre des réels est donnée, la caractérisation des rationnels n'est pas indiquée.
La définition de *critère de Cauchy* est donnée et il est démontré qu'une suite de nombres réels (resp. une suite de complexes) converge si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy.

3.4 Un cours en ligne [19]

Le cours en ligne est celui de l'université de Lille 1 (il existe aussi des vidéos sur ce cours) (http ://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf)
On y trouve de nombreuses notes culturelles ou motivant l'introduction de nouvelles notions. On note aussi de très nombreuses illustrations graphiques. Les nombres réels et les suites sont les deux premiers chapitres de la partie analyse. L'enchaînement adopté est à nouveau de donner la propriété 1, $\mathbb{R}$ est archimédien et satisfait (BS). Sont donnés sous forme de remarques historiques le fait que ces propriétés sont intrinsèques à la construction (admise) de $\mathbb{R}$ ainsi que les points suivants

— *Il y a un grand saut entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: on peut donner un sens précis à l'assertion « il y a beaucoup plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels », bien que ces deux ensembles soient infinis, et même denses dans $\mathbb{R}$.*
D'autre part, la construction du corps des réels $\mathbb{R}$ est beaucoup plus récente que celle de $\mathbb{Q}$ dans l'histoire des mathématiques.

— *La construction de $\mathbb{R}$ devient une nécessité après l'introduction du calcul infinitésimal (Newton et Leibniz vers 1670). Jusqu'alors l'existence d'une borne supérieure était considérée comme évidente et souvent confondue avec le plus grand élément.*

— *Ce n'est pourtant que beaucoup plus tard, dans les années 1860-1870 (donc assez récemment dans l'histoire des mathématiques) que deux constructions complètes de $\mathbb{R}$ sont données :*
  — *Les coupures de Dedekind : $\mathcal{C}$ est une coupure si $\mathcal{C} \subset \mathbb{Q}$ et si $\forall r \in \mathcal{C}$ on a $r' < r \Rightarrow r' \in \mathcal{C}$.*
  — *Les suites de Cauchy : ce sont les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la propriété*

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \qquad (m \geq N \;\; , n \geq N) \Rightarrow |u_m - u_n| \leq \epsilon \;\; .$$

Les réels sont l'ensemble des suites de Cauchy (où l'on identifie deux suites de Cauchy dont la différence tend vers 0).

Enfin dans le chapitre sur les suites est montré que

$$(BS) \Rightarrow (LM) \Rightarrow (A)$$

L'écriture décimale illimitée d'un réel est vue. Des exemples d'écritures décimales périodiques sont données et il est indiqué sans preuve que cela caractérise les rationnels.
Il n'est pas montré, ni même signalé que (A) et archimédien $\Rightarrow (BS)$.

Quelques polycopiés 2016-17 de semestre 1 ont été consultés (Bordeaux, Grenoble, Limoges, Paris 7). Certains sont très complets comme pourrait l'être un ouvrage, d'autres ne sont que des supports de cours sur lesquels en particulier ne figurent pas les démonstrations. Il n'existe pas toujours pour ces mêmes universités de polycopié de semestre 2, de ce fait il est difficile d'avoir une vision complète de ce qui est traité en Licence 1.

3.5 Conclusion

La question en filigrane de cette présentation était « quelle conception peuvent actuellement avoir les étudiants du corps des nombres réels ? »
Nous avons à cet effet étudié des ouvrages de cours publiés entre 1960 et 2015. Il faut cependant commencer par souligner que les ouvrages les plus empruntés dans les deux bibliothèques universitaires interrogées (Bordeaux, Paris 13) sont les ouvrages de résumés de cours ou fiches méthodes avec exercices corrigés viennent ensuite les ouvrages de cours de type "Tout-en-un".
Le but des ouvrages de résumés de cours ou fiches méthodes avec exercices corrigés, est l'apprentissage de méthodes. On n'y trouve pas d'exercices spécifiques sur la construction de $\mathbb{R}$ et ses propriétés.
Nous ne pouvons donc au mieux qu'observer l'image qui est envoyée à une partie des étudiants. On peut alors dire qu'aujourd'hui sont vues et en général démontrées

— l'irrationalité de $\sqrt{2}$;
— la densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$;
— l'écriture décimale illimitée d'un réel ;
— la caractérisation des rationnels à l'aide de leur écriture décimale périodique (au moins sur des exemples).

Les différences entre les ouvrages postérieurs à 2013 et ceux plus anciens se situent plus sur les illustrations graphiques (droite réelle, d'intervalles, d'inégalités, etc...) qui sont plus nombreuses actuellement et surtout sur la construction et les propriétés de $\mathbb{R}$, et de manière général on peut noter que :

— les différentes façons de construire $\mathbb{R}$ et les difficultés qui émergent à différents moments de la construction sont très peu abordées voire ignorées ;
— l'accent est peu mis sur l'importance des différentes propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$ et leur équivalence ;
— les suites de Cauchy ne sont plus enseignées en classes préparatoires (elles peuvent encore l'être en première ou deuxième année d'université).

4 Présentation de la notion de limite dans des ouvrages à destination des étudiants de L1

Sur quoi s'appuie-t-on en L1 pour travailler la notion de limite de fonctions numériques à une variable réelle, avec quel objectif et comment : quelles sont les motivations pour introduire ce concept ? Quelles connaissances de $\mathbb{R}$ sont invoquées ? Quel formalisme est introduit et utilisé ? Quelles représentations graphiques sont montrées ? Quels sont les liens avec la notion de limite de suites ? Plus globalement, quelles sont les connaissances attendues et les compétences exigées à l'issue de ce travail ?

Pour répondre à ces questions, nous avons examiné d'une part quelques ouvrages à destination de L1 que des étudiants peuvent emprunter en bibliothèque [2] ou utiliser via le web, d'autre part quelques polycopiés écrits et/ou utilisés par les collègues enseignants en L1 dans diverses universités.
Il est nécessaire de remarquer que si nous, enseignants, travaillons sur des ouvrages de cours contenant des preuves, les responsables de bibliothèques universitaires nous indiquent que les étudiants ont plutôt tendance à emprunter des ouvrages du style fiches de cours avec exercices corrigés, moins volumineux que les « tout en un ».

Nous avons ainsi regardé, au travers d'une grille d'analyse, les ouvrages suivants :

— Mathématiques : tout en un pour la licence - niveau 1 - Ramis-Warusfel [95]
— Algèbre et analyse, cours de math de 1ère année - Balac et Sturm [7]
— MPSI - J'intègre - Tout en un - juin 2015 [45]
— Mathématiques MPSI - collection Prépa Sciences - juillet 2013 [87]
— Polycopié de l'Université de Paris Diderot-Paris 7-Mathématiques de L1, semestre 1 - 2015/2016 [133]
— Polycopié de l'Université de Bordeaux - L1 Semestre 1 - 2016/2017 [31]
— Polycopié de l'Université Grenoble Alpes - L1 Semestre 1 - novembre 2016 [38]
— Exo 7 : Livre en ligne écrit par des Enseignants Chercheurs - Université de Lille 1 [19]

Deux ouvrages antérieurs, encore très consultés par les étudiants, ont aussi été étudiés et il y sera fait référence pour certains points : Les mathématiques en licence 1, d'Azoulay, Avignant et Aulias (édition 2007) [5] et Analyse Première année, de Liret et Martinais (édition 2003) [80]. Un livre d'exercices très emprunté a été examiné avec la même grille (Mathématiques L1 de El Kaabouchi - édition 2013) [72]. Enfin, pour comparer l'approche française de l'enseignement de cette notion à l'approche anglo-saxonne, nous avons regardé l'ouvrage de Stewart, (édition De Boeck - 2011) : « Analyse : concepts et contextes-vol 1 : Fonctions d'une variable », ouvrage disponible dans la plupart des Bibliothèques Universitaires de Sciences. [126].

Les différents ouvrages ont été regardés à l'aide de la grille d'analyse ci-dessous (partie 4-1). Ce qui nous a permis de faire une synthèse (partie 4.2) de nos observations qui seront détaillées dans la partie 4-3.

2. Les ouvrages retenus sont ceux qui apparaissent comme les livres de cours les plus souvent empruntés par les étudiants scientifiques des universités Paris 7 et Paris 13.

4.1 Grille d'analyse des ouvrages

1. Organisation globale des ouvrages.
2. Type de présentation de $\mathbb{R}$.
3. Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.
4. Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.
5. Equivalence entre les 2 définitions de limite en un point.
6. Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.
7. Lien avec définition ou construction de $\mathbb{R}$.
8. Preuve de l'unicité de la limite.
9. Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.
10. Exemples de calcul du rang N ou de l'écart η.
11. Symbolisme ou non.

4.2 Synthèse et commentaires

Il est rare que les enseignants de L1 donnent une référence unique de livres et encore plus qu'ils suivent l'ordre des chapitres d'un seul ouvrage. En revanche, si la rédaction d'un polycopié est faite par une équipe d'enseignants de L1, il est vraisemblable que celui-ci sera utilisé chronologiquement dans l'ordre des points abordés dans ce polycopié. S'il est difficile de savoir comment les étudiants utilisent les livres, la façon dont leur organisation générale est décrite peut en faciliter l'usage : un exemple original est celui de livre de Ramis-Warusfel [95] organisé en modules interdépendants, interdépendance décrite en début de livre et de chaque chapitre sous forme de graphes.
Dans cette synthèse seront abordés les points d'analyse utilisés dans l'étude des ouvrages.

1. *Organisation globale des ouvrages.*

   De nombreux ouvrages proposent un chapitre initial d'initiation à la logique, au symbolisme et aux raisonnements mathématiques, ce chapitre y étant plus ou moins développé. Dans la suite de ces ouvrages, les démonstrations développées et leurs écritures n'utiliseront pas systématiquement ce langage.

2. *Type de présentation de* $\mathbb{R}$.

   La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme des classes préparatoires ce qui peut expliquer que l'ensemble des réels est rarement construit dans les différents ouvrages. Quelquefois, le caractère insuffisant de $\mathbb{Q}$ est évoqué pour justifier la nécessité d'un autre ensemble de nombres plus satisfaisant. Il est fait souvent appel à une connaissance antérieure des nombres et dans certains polycopiés et ouvrages, figurent des paragraphes ou exercices sur les développements décimaux/binaires des réels. Dans les ouvrages des classes préparatoires, beaucoup de compétences techniques, en particulier autour de l'ordre, sont développées. C'est un point commun avec certains polycopiés à destination des premières années de licences scientifiques comme dans les polycopiés de Grenoble et de Bordeaux où sont travaillées les pratiques liées à l'ordre, point d'achoppement constaté chez les étudiants à l'entrée en université.

   Pour plus de détails, nous renvoyons au travail du paragraphe I-3 de cette brochure.

3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.*

   Dans l'ensemble, il y a peu de représentations graphiques, de schémas dans les ouvrages. De plus, on ne retrouve pas systématiquement des exemples types dans les différents ouvrages et polycopiés. Ils sont cependant présents dans les livres destinés aux CPGE, dans le Liret Martinais [80] , Exo7 [19] et le polycopié de Paris Diderot [133].

4. *Ordre de présentation : limites de fonction et limites de suite.*

   Les chapitres de généralités sur les fonctions sont plus ou moins (plutôt moins) développés avant d'aborder la définition de limite.

   Dans la plupart des ouvrages, la définition de limite de suite est donnée avant la définition de limite de fonction. La limite de fonction est toujours donnée en (ε, η), parfois en termes de voisinage (ce qui permet d'unifier les cas finis et infinis dans un même langage). Rares sont les ouvrages qui donnent des exemples de calculs effectifs de ce η et alors ce n'est que sur un exemple ou deux tout au plus. Il n'y a pas toujours de relation entre limite de suite et limite de fonction. Dans le polycopié de Paris Diderot [133], une suite est considérée comme une fonction définie sur un ensemble particulier et une seule définition de limite est donnée.

   Seul Ramis et Warusfel [95] définit la continuité avec les suites.

   Les exercices se contentent souvent de demander des « calculs » de limites sur des fonctions explicites en utilisant les règles algébriques. Rares sont les exercices sur des fonctions générales nécessitant l'utilisation de la définition en (ε, η).

5. *Equivalence entre les deux définitions de limite en un point.*

   Nous rappelons ces deux définitions présentes dans les ouvrages pour une fonction f définie sur un domaine D_f contenant un voisinage de a :

   Définition 1 : f a pour limite l en a si pour tout ε strictement positif, il existe η strictement positif tel que ($x \in D_f \setminus \{a\}$ et $|x - a| \leq \eta$) $\Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$.

   Définition 2 : f a pour limite l en a si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D_f \setminus \{a\}$, de limite a, $f(x_n)$ a pour limite l.

   L'équivalence entre ces deux définitions de limite de fonction en un point est rarement énoncée et si c'est le cas elle est démontrée.

6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définitions, exemples, présentation.*

   Tous les ouvrages ou polycopiés partent des définitions d'une limite finie en un point fini et élargissent ensuite à des limites non finies ou des points à l'infini. Les divers formalismes sont unifiés ou non, selon que la notion de voisinage est donnée ou non.

7. *Lien avec définition ou construction de $\mathbb{R}$.*

   Comme $\mathbb{R}$ n'est pas construit, il n'y a pas de lien énoncé entre la notion de limite et les propriétés de cet ensemble.

8. *Preuve de l'unicité de la limite.*

   L'unicité de la limite est prouvée par l'absurde, soit directement soit en renvoyant à la preuve de l'unicité de la limite d'une suite. La rédaction de cette preuve est parfois détaillée, comme dans le polycopié de Grenoble [38].

9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*

   On trouve rarement des motivations que ce soit sur le travail de cette notion de limite ou sur la nécessité de la formalisation. Cependant dans des polycopiés récents, ces préoccupations semblent présentes. Dans le polycopié de Grenoble, le travail sur la notion de limite est vu comme une application de l'usage des symboles $\exists$ et $\forall$ et des règles logiques ; dans celui de Paris Diderot, il est plutôt vu comme une nécessité motivée par des exemples concrets.

10. *Exemples de calcul du N ou du η.*

    Les calculs effectifs du N dans la limite d'une suite ou de l'écart η dans celle d'une fonction sont exceptionnellement donnés comme dans le polycopié de Grenoble où l'on trouve des exemples et beaucoup de commentaires sur le fait que ces N et η dépendent du ε et de la suite ou de la fonction.

11. *Symbolisme ou non.*

    Certains ouvrages, dans la partie cours, insistent sur l'usage du formalisme. Ce qui n'est pas le cas du Liret-Martinais, [80], un peu ancien maintenant, qui n'emploie jamais les symboles $\forall$ et $\exists$ et formule toujours les propositions ou définitions de façon littérale. Il faut remarquer que si la partie cours est écrite dans le cadre des fonctions générales, les exercices demandés portent quasiment toujours sur des fonctions explicites, avec des expressions comme « calculer la limite en tel point » ou « montrer que la limite en tel point est xxx » et nécessitent l'utilisation de règles algébriques et non l'usage la définition en (ε, η).

Cette notion fondamentale de l'analyse qu'est la notion de limite de fonction est très souvent abordée dès le début des cours de semestre 1. Tous les ouvrages de cours étudiés insistent sur la définition formelle, bien que les énoncés des exercices montrent que la maîtrise du calcul, utilisant l'algèbre des limites sur des fonctions majoritairement explicites, est l'objectif principal et non le raisonnement et l'écriture formelle de preuves. Les preuves sont toutefois écrites et détaillées dans l'exposé des propriétés. Rarement une motivation est donnée à ce travail mathématique formel ou calculatoire. Cela s'oppose à ce que l'on peut trouver dans l'ouvrage de Stewart [126], où le parti adopté est de partir des approches visuelles, numériques et algébriques pour travailler sur la compréhension des concepts et d'insister sur la distinction entre vraie démonstration et argumentation convaincante.

4.3 Les ouvrages analysés : quatre livres, trois polycopiés, un cours en ligne et d'autres ouvrages

4.3.1 Ramis-Warusfel [95]

1. *Organisation de l'ouvrage.*

   Ce livre est conçu en modules, plus ou moins indépendants. Les liens entre ces modules sont schématisés par des graphes en début de livre et en début de chaque gros module.

   — I notations, vocabulaires, fondements

   — II Algèbre

   1 - Arithmétique.
   2 - Algèbre : groupes, anneaux, corps.
   3 - Espaces vectoriels et applications linéaires.
   4 - Calcul matriciel élémentaire.
   5 - Corps des complexes.
   6 - Polynômes et fractions rationnelles.
   7 - Espaves vectoriels v de dimension finie.
   8 - Initiation à l'algorithmique et au calcul formel.

— III Géométrie
  1- Dans les espaces affines.
  2- Courbes paramétrées.
— IV Analyse
  1 - Nombres réels, suites numériques.
  2 - Fonctions réelles : continuité, dérivabilité.
  3 - Fonctions transcendantes.
  4 - Séries numériques.
  5 - Introduction à l'intégration.
  6 - Introduction aux fonctions vectorielles d'une variable réelle.
  7 - Première initiation aux fonctions de plusieurs variables.
  8 - Approximation.
— V Probabilités statistique : statistique élémentaire et probabilités finies

Détails du module I1 : notations vocabulaires, fondements

Ce chapitre développe les thèmes suivants : ensembles, applications, suites et familles, lois de composition, relations, cardinaux, rudiments de logique (le tout sur une cinquantaine de pages). Il commence par un paragraphe sur les objectifs : « il s'agit de mettre en place de l'outillage intervenant dans les structures et les théories exposées dans l'ouvrage, il n'y a pas d'exposition strictement linéaire, il n'y a pas de formalisation de la logique ».

Les symboles $\forall, \exists, \in, \notin, =, \subset, \cup, \cap$ sont introduits. La défintion de produit cartésien est donnée.

Image, antécédent, image réciproque, ensemble $\mathcal{F}(E, F)$. Tout cela sans aucun graphe. Il y a toutefois de nombreux exemples ou exercices dont certains sont corrigés. Les termes d'« axiome du choix » (pour les familles des parties) et « théorème de Zorn » (pour les cardinaux) sont écrits.

Dans « rudiments de logique », est énumérée une liste de types de démonstrations : par absurde, par hypothèse auxiliaire, par disjonction des cas, par contraposée, par récurrence simple, par récurrence à 2 pas, par récurrence forte, illustrées par des exemples et exercices.

2. *Type de présentation de* $\mathbb{R}$. Module IV chapitre 1 : Les réels - p.544 à 583.

   En 2006, ce chapitre est constitué de six paragraphes : borne supérieure-borne inférieure, développement décimal, définition des réels, théorème de la borne supérieure, opérations sur les réels, suites numériques.

   Entre les deux éditions de 2006 et de 2013, les auteurs ont modifié la présentation des réels, en repoussant en fin de chapitre un exemple de construction avec les développements décimaux.

   En 2013, le chapitre est constitué de trois paragraphes : bornes inférieures et bornes supérieures, le corps des réels, intervalles de $\mathbb{R}$; suites numériques : généralités, convergence d'une suite, suites réelles, suites bornées, limites infinies ; un exemple de construction de $\mathbb{R}$: nombres décimaux, définition des réels, relation d'ordre, théorème de la borne supérieure, opérations sur les limites.

   La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est prouvée, à partir du caractère archimédien de $\mathbb{R}$, laissant en exercice celle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

   Module IV chapitre 2 : Fonctions

   Continuité, commençant par limite (p.588), puis continuité (p.589), puis opérations (p.592), puis théorème des valeurs intermédiaires (p.593),...

3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.*

   Il n'y a pas de graphe, ni de schéma, aucun dessin, sauf pour les théorèmes de Rolle et des accroissements finis, puis pour les branches infinies.

   Exemples : $f : x \to \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $Dir(x) := 1$ *si* $x \in \mathbb{Q}$, 0 *sinon*, $E(x) := \lfloor x \rfloor$ en rappel.

   La seule motivation du travail sur cette notion est celle de l'étude de la régularité des fonctions.

4. *Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.*

   La progression choisie dans le *module IV chapitre 2 : Fonctions* est : limite en un point, puis continuité, puis opérations sur les fonctions continues, puis théorème des valeurs intermédiaires,... Après la définition d'une fonction *définie au voisinage de* a [3], celle de la limite de fonction en un point a pour une fonction définie au voisinage de a [4] est donnée par (définition 2 p.42) :

   « f a pour limite l en a si pour toute suite (x_n) de $D_f \setminus \{a\}$ de limite a, $f(x_n)$ a pour limite l. »

   Cette définition s'appuie donc sur celle de limite de suite du chapitre 1 (p.566 à 568) d'abord définie en langage naturel : « une suite de réels [5] positifs tend vers 0 si pour tout ε positif la suite est inférieure ou égale à ε à partir d'un certain rang ». La définition est suivie d'un exemple ($\dfrac{1}{n}$, et $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$), puis de la formulation mathématique en (ε, N) [6] et de l'utilisation des propriétés de $\mathbb{R}$ pour prouver que « une suite réelle croissante converge si et seulement si elle est majorée » (propriété de la borne supérieure). Enfin est donnée la définition en (ε, N) de la convergence d'une suite réelle vers un nombre l par « la suite $(|x_n - l|)$ tend vers 0 ».

   La démonstration de l'unicité de la limite d'une fonction est faite à partir de celle de la limite des suites.

5. *Equivalence entre les deux définitions de limite en un point.*

   La preuve du théorème de Weierstrass [7] est traitée après le théorème sur limite monotone. La définition choisie de la limite d'un fonction en un point a (fini ou infini) est la définition 2 (cf point 5, p.42). Dans le cadre de la continuité de la fonction en a, l'équivalence de cette définition avec la définition 1 est démontrée. Les limites à gauche et à droite sont définies et travaillées.

6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.*

   Après la définition de la limite d'une fonction en un point suit la définition sur les limites à gauche et à droite, la généralisation à $l = \pm\infty$ par le biais d'un travail sur le théorème de la limite monotone (borne de l'intervalle puis point intérieur), continuité en un point, sur un intervalle, prolongement par continuité et caractérisation de Weiestrass de la continuité.

   Suivent trois exercices corrigés :

   — Montrer que si $f(a)$ est strictement positive, alors f est strictement positive sur un intervalle autour de a.

---

3. il existe une suite de $D_f \setminus \{a\}$ admettant pour limite a.
4. avec a réel de $I = D_f$ ou a borne réelle de I ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.
5. Ici un réel est un développement décimal signé, sur l'ensemble desquels a été définie une relation d'ordre.
6. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq \epsilon)$.
7. Toute suite numérique bornée contient une suite extraite convergente.

— Passage des inégalités strictes aux inégalités larges.
— Continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$ en exhibant le η pour a et ε donnés, puis question sur la dépendance ou non du η.

Mêmes questions pour la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ pour $a \in]0,\infty[$.

7. *Lien avec définition ou construction de $\mathbb{R}$.*

   Existence de $\mathbb{R}$ admise en 2013 : $\mathbb{R}$ corps totalement ordonné contenant $\mathbb{Q}$ et possédant la propriété de la borne supérieure [8].

   Utilisation des propriétés de $\mathbb{R}$ pour prouver que « une suite réelle croissante converge ssi elle est majorée » (propriété de la borne supérieure).

8. *Preuve de l'unicité de la limite.*

   L'unicité vient tout de suite après la définition et elle repose sur l'unicité de la limite d'une suite (démonstration par l'absurde). Exemple : $\lim x\sin(\dfrac{1}{x})$ en 0.

9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*

   La seule motivation est l'étude de la régularité des fonctions. Il y a quelques points méthodes pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite avec l'exemple de la fonction Dir ($Dir(x) := 1$ *si* $x \in \mathbb{Q}$, 0 *sinon*).

10. *Exemples de calcul du N ou du η.*

    Il n'y a pas de calcul explicite du η en fonction du ε.

11. *Symbolisme ou non.*

    Dans les exercices sur « limites et continuité », il n'est quasiment pas fait appel à une écriture symbolique. Il est demandé d'étudier la limite de la fonction au point proposé (point qui peut être fini ou non, limite finie ou non). Il y a cependant trois exercices sur des fonctions générales dont un sur le théorème du point fixe.

    Des exercices avec solutions, sur des fonctions non explicites ou explicites comme $\sqrt{1-x^2}$, un exercice type corrigé sur dérivabilité et fonction non explicite, des exercices de calcul ou études de limites sur des fonctions explicites (polynomiales, fractions rationnelles, racine, pas de logarithmes ni d'exponentielles), en un point fini ou en l'infini.

Ce livre ne contient que très peu d'exemples, peu de motivations, peu de commentaires, plus brièvement il contient peu de discours métamathématique.

4.3.2 Balac et Sturm [7]

1. *Structure de l'ouvrage.*
   — Préliminaires : introduction à la logique mathématique (assertions et prédicat, connecteurs logiques, quantificateurs, raisonnements) puis structures fondamentales (ensembles et sous ensembles, relations, fonctions, applications, structures algébriques).
   — Ensembles numériques fondamentaux : corps des réels (généralités en partant de $\mathbb{Q}$ et de ses insuffisances, propriétés de réels, topologie de la droite réelle), puis corps des complexes (p.93 à 122), puis suites numériques (p.171 à 206).
   — Polynômes et fractions rationnelles (p.219 à 301) ;
   — Algèbre linéaire (p.307 à 576).

8. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

— Calcul différentiel (p.583 à 864) : continuité des fonctions réelles d'une variable réelle (ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$, limites p.585 à 639, continuité, suites récurrentes, dichotomie, exercices de synthèse et solutions de ces exercices.), fonctions usuelles, comparaison locale de fonctions, dérivabilité (définition brutale, graphiques avec tangentes et avec des interprétations), développements limités.
— Calcul intégral (p.887 à 1072).

2. *Type de présentation de $\mathbb{R}$.*
   L'existence de $\mathbb{R}$ est admise : corps totalement ordonné contenant $\mathbb{Q}$ et possédant la propriété de la borne supérieure.
   Représentation graphique de la propriété de la borne supérieure, avec l'exemple de $E = \left\{ \dfrac{1}{1+x^2}, x \leq 1 \,\text{et}\, x \geq 0 \right\}$.
   Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Topologie de la droite réelle.
3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.*
   Dans le chapitre sur les suites numériques, on trouve la définition de la convergence avec visualisation d'une bande et la preuve de l'unicité de la limite.
   La définition est donnée axiomatiquement par : le réel l est la limite de f en un point x_0 adhérent à son domaine de définition D si
   $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \, \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*} \, \forall x \in \mathbb{R} \, ((x \in D \,\text{et}\, |x - x_0| \leq \eta) \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$
   Exemple de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{x+2}$ en 0 avec dessin et calcul explicite du $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.
4. *Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.*
   Le chapitre sur les suites précède celui sur les fonctions.
5. *Equivalence entre les deux définitions de limite en un point.*
   Le théorème est énoncé avec une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$, prouvé avec une limite finie.
   L'implication : « définition en (ε, η) vers définition avec suite » est écrite. La réciproque est prouvée par l'absurde.
6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.*
   Les définitions de limite finie en l'infini, infinie en l'infini, infinie en un point sont données.
7. *Lien avec définition ou construction de $\mathbb{R}$.*
   Il n'y a pas lien avec l'existence de $\mathbb{R}$.
8. *Preuve de l'unicité de la limite.*
   L'unicité de la limite est prouvée par l'absurde (avec des ε et des η), sans lien avec celle de la limite d'une suite.
9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*
   Pas de motivation énoncée, pas de commentaire sur l'écriture de cette notion. Mais il y a quelques notes historiques, des exemples, quelques commentaires toutefois avec un signe en marge pour y apporter attention, des exercices avec des solutions rédigées.
10. *Exemples de calcul du N ou du η.*
    Un seul exemple de calcul explicite de $\eta(\varepsilon)$.
    Sur la continuité ou non d'une fonction, deux exemples : celui de $x \mapsto E(x)$ et celui de $x \mapsto x^2 + 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $x \mapsto x$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

11. *Symbolisme ou non.*

    Les exercices utilisent des règles de calcul de limite et non la définition avec le symbolisme. Ils sont disséminés tout au long du cours et les solutions sont données en fin de chapitre. Exercices soit sur des fonctions explicites, soit sur des fonctions générales.

Ce livre, très classique, utilise un langage de topologie et évoque la droite achevée, pour un essai d'unification de définition de limite entre les cas finis ou non. Il propose de nombreuses remarques et commentaires pour faciliter la compréhension de ce concept.

4.3.3 MPSI - J'intègre [45]

1. *Remarques générales - organisation de l'ouvrage - plan du livre.*

   La première édition est sortie en 1995. C'est un peu le précurseur de ce genre d'ouvrages « Tout en Un », où on trouve à la fois le cours (il est dit dans la préface que « le cours du professeur est irremplaçable ! »), les exercices, leur corrigé. Il s'agit ici de la 4ème édition suscitée par la réforme des programmes du lycée.

   Le livre comporte 1560 pages réparties en :

   - Révisions, techniques de calcul, nombres complexes, raisonnement et vocabulaire : 25 %

   - Analyse : 28 %

   - Algèbre : 35 %

   - Probabilités : 12 %

   Le livre commence par un chapitre zéro « pour commencer ». Il y est précisé qu'« il ne s'agit pas d'un cours de logique, mais d'une acquisition, a minima, de notions fondamentales (assertions, ensembles, quantificateurs) ». Un peu plus loin (partie II - Raisonnement et vocabulaire), on retrouve un chapitre plus complet intitulé « Raisonnement, opérations sur les ensembles ». Entre deux, la partie I fait clairement le lien avec la terminale en reprenant et complétant des chapitres qui ont déjà été vus :

   - Fonctions à une variable.

   - Dérivabilité.

   - Calculs algébriques, résolution des systèmes linéaires.

   - Nombres complexes.

   - Fonctions usuelles.

   - Primitives et équations différentielles.

   PLAN :

   - Chapitre 0. Pour commencer.

   - Partie I. Techniques de calcul.

   - Partie II. Raisonnement et vocabulaire.

   - Partie III. Analyse.

   - Partie IV. Algèbre.

   - Partie V. Probabilités.

   Chaque chapitre contient :

   - le cours, des exemples ;

   - des indications sur les démonstrations ;

   - des exercices ;

- la correction des démonstrations et des exercices figurant dans le cours ;
- des exercices pour aller plus loin et leur correction.

2. *Type de présentation de* $\mathbb{R}$.

   Dès le paragraphe 1 du chapitre 1 de la partie I, est présenté « l'ensemble des nombres réels ». Il s'agit d'un paragraphe court sur la droite numérique, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$, les intervalles de $\mathbb{R}$, les intervalles de $\mathbb{N}$, la relation de comparaison, les majorants, minorants, plus grands, plus petits éléments, valeurs absolues.

   Une présentation de $\mathbb{R}$ beaucoup plus construite introduit la partie II - analyse. Il s'agit du chapitre 8. Nombres réels, suites numériques.

3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.*

   Il y a quelques graphiques. Par exemple la démonstration de l'unicité de la limite (d'une suite) se termine par un petit graphique ayant pour objectif de montrer que l'intersection entre les ensembles de points vérifiant $|u_n - l_1| < \varepsilon$ et ceux vérifiant $|u_n - l_2| < \varepsilon$ deviennent disjoints quand ε devient petit. Il y a un nombre relativement important d'exemples suivis d'exercices corrigés de façon détaillée à la fin du chapitre.

4. *Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.*

   Limites des suites présentées en premier. Définition avec ε et η. Le lien est fait entre limite de suite et limite de fonction qui est présentée comme une extension de la notion de limite d'une suite. On commence par la limite finie en l'infini.

5. *Equivalence entre les deux définitions de limite en un point.*

   Le théorème de Bolzano-Weierstrass[9] est énoncé dans le chapitre sur les suites. La démonstration est laissée au lecteur, mais figure dans les corrigés des exercices à la fin du chapitre. Il est précisé que « le théorème de B-W ne donne aucune méthode pratique pour trouver une sous-suite ou sa limite » et il est rappelé que « la démonstration n'est pas exigible dans les nouveaux programmes ».

6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.*

   La première définition concerne la limite finie à l'infini, puis vient la limite finie en une valeur finie, ce qui conduit à la définition de la continuité en un point. Viennent ensuite quelques exemples (les fonctions constantes, x^n, $\dfrac{1}{x^n}$, $|x^n|$), puis les limites infinies, l'unicité de la limite.

   On aborde alors l'utilisation des suites pour les recherches de limites de fonctions, et inversement l'application des limites pour l'étude des suites récurrentes (théorème du point fixe), puis les opérations et les propriétés des limites et de la continuité.

7. *Lien avec définition ou construction de* $\mathbb{R}$.

   Il n'y en a aucun, pour la simple raison qu'on ne trouve pas dans cet ouvrage de construction de $\mathbb{R}$. Ceci s'explique par le fait qu'il a été conçu pour répondre très précisément au programme des classes de Maths Sup MPSI et qu'on peut lire (page 12/35 de l'annexe concernant le programme de cette classe dans les nouveaux programmes des classes de CPGE de 2013) : « La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme ».

9. Toute suite numérique bornée contient une suite extraite convergente.

8. *Preuve de l'unicité de la limite.*

   Elle est faite deux fois (dans le chapitre sur les suites ET dans le chapitre sur les fonctions). Comme pour de très nombreuses autres démonstrations dans ce livre, elles sont présentées en deux temps : il y tout d'abord l'énoncé de la proposition sous une forme qui dirige déjà vers le type de démonstration qui va êêtre employée : « si l_1 et l_2 sont deux réels tels que $u_n \to l_2$ et $u_n \to l_1$, alors $l_1 = l_2$ ».

   Puis une indication est donnée pour aider le lecteur à rédiger lui-même la démonstration : raisonnons par l'absurde en supposant $l_1 \neq l_2$. En prenant $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$, on constate que u_n ne peut pas être à la fois à une distance de l_1 inférieure à ε et à une distance de l_2 inférieure à ε.

   La démonstration complète est proposée 40 pages plus loin, à la fin du chapitre dans la rubrique « Démonstrations et solutions des exercices du cours ».

9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*

   Pas de motivation, pas d'introduction en début de chapitre, mais plusieurs remarques au fil du chapitre sur l'utilisation ou l'utilité de tel ou tel énoncé. Par exemple, le lecteur est sensibilisé au fait qu'une propriété permet d'obtenir une limite ou au contraire ne permet que d'en justifier l'existence.

10. *Exemples de calcul du N ou du η.*

    On ne trouve aucun exemple de calcul du N ou du η.

    Remarque : il est précisé dans le chapitre sur les suites : « les démonstrations en ε et/ou en M sont le dernier recours auquel vous devez penser et s'utilisent principalement pour des questions de nature théorique ».

11. *Symbolisme ou non.*

    Le symbolisme est présent. D'ailleurs un chapitre entier (de 24 pages) est consacré au symbolisme juste avant d'aborder l'analyse.

Ce livre destiné aux élèves de classes préparatoires, ne donne aucune motivation à l'étude ce concept de limite mais insiste sur des points-méthodes.

4.3.4 Mathématiques MPSI [87]

1. *Remarques générales - organisation de l'ouvrage - plan du livre.*

   Cet ouvrage est beaucoup plus récent que le « J'intègre - Tout-en-un » : la première édition est sortie en 2009. Il s'agit là, seulement, de la 2ème édition provoquée par la réforme des programmes de Prépas. Chaque chapitre contient :
   - le résumé de cours,
   - la partie « méthode »,
   - la partie « vrai-faux »(corrigés),
   - les exercices avec des indications puis leur corrigé exhaustif.

   Le livre comporte 1560 pages réparties en :
   - Révisions, techniques de calcul, nombres complexes, raisonnement et vocabulaire : 18 % (25%)
   - Analyse : 37 % (28%)
   - Algèbre : 28 % (32%)
   - Probabilités : 12 % (12%)
   - Arithmétique 4% (3%)

Les chiffres (entre parenthèses) correspondent à la répartition de l'ouvrage étudié précédemment : ils montrent que la partie consacrée à l'analyse est sensiblement plus importante dans le « Mathématiques en MPSI » que dans le « J'intègre » , au détriment de l'algèbre.

PLAN :
Le livre est scindé en deux (semestres) :

SEMESTRE I
- Chapitres 1 à 5 : Logique, calculs (y compris les systèmes linéaires), nombres complexes, réels.
- Chapitres 6 à 12 : Analyse - Première partie.
- Chapitre 13 : Arithmétique des entiers.
- Chapitres 14 et 15 : Algèbre (structures algébriques usuelles, polynômes, fractions rationnelles).

SEMESTRE II
- Chapitres 16 à 20 : Algèbre Linéaire.
- Chapitres 21 à 22 : Analyse - Seconde partie (intégration et séries numériques).
- Chapitres 23 à 25 : Dénombrements et probabilités.

2. *Type de présentation de* $\mathbb{R}$.

   Ici, il n'y a pas de présentation de $\mathbb{R}$.
3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples-types.*

   Les graphiques sont extrêmement rares. Il y a un nombre relativement important d'exemples qui visent essentiellement à montrer des méthodes.
4. *Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.*

   Les limites des suites sont présentées en premier. Définition avec ε et N. Le lien est fait entre limite de suite et limite de fonction qui est présentée comme une extension de la notion de limite d'une suite. Définition avec ε et η. On commence par la limite finie en un point.
5. *Equivalence entre les deux définitions de limite en un point.*

   Le théorème de Bolzano-Weierstrass est énoncé dans le chapitre sur les suites sans démonstration. Elle est hors-programme pour les MPSI....
6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.*

   Une sorte de listing complet des limites finies/infinies est produit, suivi des opérations puis des résultats et théorèmes sur les limites (de suites d'abord, de fonctions dans le chapitre suivant) : suites extraites, comparaison, encadrement, limite-monotone, suites adjacentes, Bolzano-Weierstrass ...
7. *Lien avec définition ou construction de* $\mathbb{R}$.

   Il n'y a rien, pour la simple raison qu'on ne trouve pas dans cet ouvrage de construction de $\mathbb{R}$. Dans cet ouvrage aussi, comme dans tous ceux rédigés pour les élèves de prépas, on s'en tient... au programme de prépa ! Et celui-ci s'est allégé de la construction de $\mathbb{R}$. « La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme ».
8. *Preuve de l'unicité de la limite.*

   On ne la trouve pas.

9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*

   A chaque début de chapitre, il y a un petit paragraphe sur les objectifs du chapitre. Des commentaires sont distillés aussi au fil des paragraphes « méthodes ».

10. *Exemples de calcul du N ou du η.*

    Il n'y en a pas.

11. *Symbolisme ou non.*

    le symbolisme est présent : le $\forall$, le $\exists$ et le $\Leftrightarrow$ ne sont pas tabous, loin s'en faut ! Ici c'est plutôt le texte explicatif qui pourrait manquer à certains lecteurs.

Chaque chapitre de ce livre destiné aux élèves de classes préparatoires, insiste sur des compétences de calculus comme le montre la structure des chapitres. Ceux-ci commencent par un paragraphe « objectifs », scindé en deux parties « 1. Les incontournables »,« 2. Et plus si affinités ». Dans les exercices, aucun formalisme n'est demandé.

4.3.5 Polycopié de Paris Diderot 2015/2016 [133]

1. *Organisation globale.*
   - Corps des complexes (avec un peu de commentaires et des graphes nombreux).
   - Ensembles - applications.
   - Introduction à l'algèbre linéaire.
   - Propriétés de $\mathbb{R}$ (p.77 à 84).
   - Analyse de la variable réelle : énorme chapitre contenant Généralités (p.88 à 103) ; Limites (p.104 à 118) ; Continuité ; Dérivabilité ; Exponentielles ; Exercices.
2. *Type de présentation de $\mathbb{R}$.*

   Il n'y a pas de construction de cet ensemble, seulement une liste des propriétés pour montrer comment certaines en impliquent d'autres.
   - Propriétés d'ordre : corps ordonné, ordre total, valeur absolue, intervalles, voisinages en un point fini, en l'infini (un tout petit peu de méta [10]).
   - Définitions de majorant, minorant, borne supérieure - borne inférieure avec un exemple. Complétude de $\mathbb{R}$, avec un peu de méta [10] pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. Corps archimédien, image de la droite réelle.
   - Développements décimaux, des démonstrations avec des convergences de suites ...

   Le chapitre sur l'analyse d'une variable réelle se décline d'abord en généralités :
   - il commence par un paragraphe de méta [10] : modélisation d'un problème par des suites, passage du discret au continu. Suit une définition d'une fonction, et les différentes modalités de définition : expression algébrique (avec exemple), graphe (sans exemple !), définition verbale, tableau de valeurs (avec exemple).
   - Caractéristiques d'une fonction, avec des exemples : domaine de définition, graphe ; parité, périodicité ; injectivité, surjectivité, fonction réciproque ; translations, dilatations et effets sur les graphes ; monotonie (définition « On dit que f est croissante sur A si pour tous $(x, y) \in A^2$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ ») ; convexité (avec des graphes) ; extrema (global, local, graphe). Théorème de la bijection montrée en trois lignes.

10. Voir III-5-1, pour une définition.

— Exemples de fonctions : par des expressions algébriques (constantes, affines, constantes et affines par morceaux, polynomiales, (avec exemple d'une balle tombant ...), rationnelles, exponentielles (existence admise dans ce premeir temps, avec des exemples en bio et en physique), logarithmes, puissances, trigonométriques (par défintion $\sin\theta = \Im(e^{i\theta})$, idem pour cosinus et tangente), trigo hyperboliques.

  Autres exemples, : indicatrice de $\mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(x) = \frac{1}{q}$ si x s'écrit sous forme irréductible $\frac{p}{q}$, fonction de Cauchy ($x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$), fonction de Weierstrass ($x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$).

— Opérations sur les fonctions : restriction, réunion, opérations vectorielles, composition, multiplication.

Puis la notion de limites est introduite.

3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.*
   Limites et interprétations graphiques et graphes avec bandes horizontale et verticale.
4. *Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.*
   Ecriture en langage naturel de la convergence vers une limite finie, vers $+\infty$, $-\infty$. Choix de n'écrire en langage mathématique que pour des fonctions, une suite étant une fonction particulière : présentation simultanée de limite de suite et de fonction.
5. *Equivalence entre les deux définitions de limite en un point.*
   Caractéristion séquentielle (preuve avec des ε) - Equivalence entre les deux définitions.
6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.*
   Limites finies/ infinies d'une fonction en un point (notion de voisinage épointé de a). Définition en langage naturel quantifié, suivie immédiatement par le formalisme et des exemples simples ($x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ avec le calcul du η, $x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$).
   Même approche pour des limites infinies avec explicitation du α en fonction du A.
   Limites à droite et à gauche, limite infinie.
   Limites et ordre (preuve avec des ε), passage de l'ordre large à l'ordre strict.
7. *Lien avec définition ou construction de $\mathbb{R}$.*
   Pas de construction de $\mathbb{R}$ et donc pas de remarque particulière entre définition de limite et propriétés de $\mathbb{R}$.
8. *Preuve de l'unicité de la limite.*
   Unicité de la limite énoncée mais preuve laissée au lecteur.
9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*
   Introduction de cette notion par des exemples concrets de problèmes modélisés par des suites, il y a des commentaires sur tangente, comportement local, global (en prenant pour exemples les radars routiers instantanés ou non).

10. *Exemples de calcul du N ou du η.*

    Calcul sur des exemples simples ($x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$) du η. De même pour des limites infinies avec explicitation du α en fonction du A.

11. *Symbolisme : oui.*

    Opérations sur les limites : preuve avec des ε, des exemples et des contre-exemples.

    Exercices : très nombreux sur ce chapitre.

    Il y a des exercices nécessitant l'utilisation de la définition en (ε, η), il y a des exercices sur des fonctions non explicites mais possédant des propriétés de limites ou de continuité ou de monotonie. On trouve un exercice où il est demandé de réaliser deux représentations graphiques de fonctions remplissant des conditions sur des limites à droite, à gauche, en des points finis. Des exercices de calcul de limites pour de nombreux cas, limites, limites à droite, à gauche, en des points finis, en l'infini pour des fonctions utilisant des polynômes, des racines, des log, des exponentielles, des fonctions circulaires, des racines, des quotients.

En conclusion ce polycopié est très dense, avec beaucoup de définitions, des exemples, des graphiques, des démonstrations complètes utilisant les quantificateurs.

4.3.6 Polycopié de L1 Bordeaux - 2016/2017 [31]

1. *Organisation globale.*

   Rudiments de logique et de théorie des ensembles ; nombres réels, inégalités, valeur absolue systèmes linéaires et calcul vectoriel ; nombres complexes ; fonctions ; intégration, calcul de primitives ; équations différentielles linéaires d'ordre 1.

   Le chapitre 1 est divisé en 6 paragraphes : les opérations logiques (proposition, connecteur, tables de vérité...), les quantificateurs, un paragraphe sur chaque raisonnement (par contraposition, par l'absurde, par récurrence) avec chaque fois des encadrés, des exemples, des commentaires et des remarques, les ensembles, la formule du binôme. Le chapitre se termine par une longue liste d'exercices, classée selon les paragraphes du cours.

   Les écritures symboliques sont systématiques, il y a beaucoup de commentaires, de mises en garde sur les abus, sur les difficultés et les confusions.

   Il y a peu de démonstrations.

2. *Type de présentation de $\mathbb{R}$.*

   Le travail sur $\mathbb{R}$ part du constat que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution rationnelle (en écrivant en toute lettre la démonstration par l'absurde). De nombreux points culturels sont développés (sur nombre algébrique-nombre transcendant, développement décimal et périodicité de celui d'un rationnel, suites et nombres rationnels). Travail sur l'ordre, puis sur valeur absolue, partie entière.

   Beaucoup de travail sur les liens entre inégalités, distance dans $\mathbb{R}$, intervalle...

   La preuve de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est faite dans le dernier exercice.

   La liste d'exercices qui clôt le chapitre est structurée comme le cours.

3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.*

   Le chapitre sur les réels ne montre pas de représentation graphique mais il en est demandé dans les exercices. Par contre dans le chapitre sur les fonctions, il y a beaucoup de graphes.

4. *Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.*

   Le chapitre sur les fonctions se découpe en généralités (paragraphe très bref), limites, continuité, dérivabilité, fonctions logarithme et exponentielle (rappels de terminale), fonctions circulaires et réciproques et hyperboliques (découvertes).

   Beaucoup de graphes, pas de démonstration, écritures en (ε, η) systématiques.

   Définition brutale en (ε, δ) de limite finie en un point fini, suivie de quelques remarques sur l'ordre des quantificateurs en particulier.

   Dans ce polycopié, lié à une Unité d'Enseignement destinée à tous les étudiants, il n'est pas question de suite. L'étude de celles-ci figure dans le programme d'une autre unité suivie par les deux tiers des étudiants.

5. *Equivalence entre les deux définitions de limite en un point.*

   Comme les suites ne sont pas travaillées dans ce polycopié, il n'y a qu'une définition de la limite d'une fonction en un point.

6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.*

   La définition de limite infinie en un point, assortie d'un graphe, est donnée. Limites à l'infini.

7. *Lien avec définition ou construction de $\mathbb{R}$.*

   Pas de lien.

8. *Preuve de l'unicité de la limite.*

   L'unicité de la limite est énoncée mais non prouvée dans le polycopié.

9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*

   Il n'y a pas de motivation. Mais on trouve beaucoup de commentaires et de points culturels. Les énoncés sont en langage formel, il n'y a pas de preuves. Ce polycopié est conçu comme un support à des cours-TD en présentiel. Les exercices ne nécessitent a priori pas l'utilisation de la définition en (ε, η). L'accent est mis sur le lien entre graphique, conjecture et preuve.

10. *Exemples de calcul du N ou du η.*

11. *Symbolisme : oui.*

    Tous les énoncés sont écrits en langage mathématique, avec des quantificateurs.

    Opérations algébriques sur les limites, énoncées en termes symboliques mais non prouvées.

Ce polycopié est conçu comme un support de cours en présentiel (cours-travaux dirigés) où les enseignants pourront motiver l'étude de ce concept et détailler les preuves en utilisant le formalisme donné dans les définitions du polycopié. Il contient de nombreux graphiques de fonctions et insiste sur le lien entre graphique, conjecture et preuve.

4.3.7 Polycopié de Grenoble - 2016/2017 [38]

Ce polycopié est à destination des étudiants du portail Mathématiques-Informatique. Il commence par un avertissement au lecteur :
Ce polycopié est un outil pédagogique qui vient s'ajouter au cours. Le point de vue du cours et celui du polycopié peuvent différer offrant deux façons d'aborder une même notion mathématique. Ce texte reprend les notions mathématiques à la base mais s'appuie, notamment pour les exemples, sur les programmes de l'enseignement secondaire.
Pour faciliter le travail personnel du lecteur, il comprend de nombreuses questions de style « vrai ou faux », où la bonne réponse est en général indiquée. L'étudiant consciencieux

travaillera la justification de chacune de ces réponses. Rappelons que trouver la bonne réponse ne suffit pas en science, il faut aussi la justifier. Ce polycopié contient également de nombreux exercices.

1. *Organisation globale.*
   — Prérequis pour cette UE [11] : Programme de mathématiques du lycée, Terminale S.
   — *Langage mathématique et notion de raisonnement.*
   ⋆ Éléments de logique : logique de base, conjonction, disjonction, négation en termes de tables de vérité. Le sens de l'implication, de l'équivalence.
   ⋆ Exemples de raisonnements : raisonnement direct, raisonnement par l'absurde, par disjonction de cas, raisonnement par récurrence, avec des exemples tirés du secondaire.
   ⋆ Vocabulaire de la théorie naive des ensembles, ensemble, appartenance, complémentaire, intersection, réunion, inclusion, égalité, égalité de couples, de n-uplets.
   ⋆ Fonctions et applications : domaine de départ et d'arrivée, domaine de définition, graphe, image directe, image réciproque, restriction, composition, injections, surjections, bijections, notion de cardinal dans le cas fini (factorielle, coefficients binômiaux).
   ⋆ Utilisation des quantificateurs : sens de « quel que soit » , « il existe » , illustration sur la définition de la limite d'une application en un point en termes d'intervalles, opérations élémentaires sur les limites (somme, produit, composition, la notion de limite sera approfondie au deuxième semestre). Notion d'effectivité dans un raisonnement d'existence (sur les exemples traités).
   — *Géométrie du plan et de l'espace*
   ⋆ Géométrie vectorielle et affine : vecteurs, addition, multiplication par un scalaire, vecteurs colinéaires, vecteurs indépendants, représentation des vecteurs en coordonnées cartésiennes, représentations paramétriques et implicites de droites et de plans,
   ⋆ Éléments de géométrie euclidienne : le produit scalaire et sa représentation en coordonnées cartésiennes, cosinus d'un angle de deux vecteurs, bases orthonormées directes ou indirectes, produit vectoriel et sa représentation en coordonnées cartésiennes, définition du produit mixte.
   ⋆ Détermination des coordonnées d'un point ou d'un vecteur dans un repère orthonormé. Projection d'un point et d'un vecteur de l'espace sur un plan, d'un vecteur du plan sur une droite.
   — *Les bases du calcul algébrique dans* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$.
   ⋆ Manipulation des symboles $\sum$ et $\prod$ illustrée par les formules à connaître : identités remarquables, formule du binôme de Newton, somme des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique. Preuve d'identités par récurrence.
   ⋆ Les nombres complexes : forme algébrique, addition, multiplication, conjugaison, norme, forme trigonométrique, interprétation géométrique des nombres complexes, les formules d'Euler et de Moivre (formules d'addition pour cos et sin), racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes, représentation complexe des homothéties, translations, rotations, symétries dans le plan complexe.

11. Unité d'Enseignement

— *Compétences visées.*

Ce cours est destiné à tous les étudiants qui s'engagent vers l'informatique ou les mathématiques. Il couvre les prérequis fondamentaux pour ces deux champs disciplinaires. En ce qui concerne la partie logique et langage mathématique, l'objectif est le renforcement des connaissances relatives aux règles de la logique. Les exemples sont fournis par les nombres entiers, réels ou complexes introduits au collège et lycée. Pour les parties 2,3, le but est l'apprentissage des notions de base de la géométrie indispensables pour les cours de physique, de mathématiques et d'informatique.

Les compétences à acquérir sont la capacité à rédiger un raisonnement élémentaire, la maîtrise de la notion d'ensemble et d'application et la capacité à utiliser les quantificateurs dans des situations simples, l'utilisation des vecteurs, droites et plans en petite dimension et la maîtrise des nombres complexes.

2. *Type de présentation de* $\mathbb{R}$.

   Il n'y a pas de construction de $\mathbb{R}$, mais il est prouvé par l'absurde que l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas dénombrable (en construisant, par le procédé diagonal de Cantor, un réel dont le développement décimal n'est pas dans cet ensemble). On y trouve beaucoup de commentaires sur la façon de construire des ensembles de nombres à partir d'un ensemble de nombres.

3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.*

   On trouve des graphes de fonctions (fonction oscillante par exemple ...).

4. *Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.*

   Il n'y a pas de travail sur les suites.

5. *Equivalence entre les deux définitions de limite en un point.*

   Comme les suites ne sont pas travaillées, il n'y a pas de définition de la limite d'une fonction en un point à l'aide des suites.

6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.*

   Un paragraphe est dédié aux fonctions tendant vers l'infini et de limites à l'infini. Beaucoup d'exemples, de mises en garde, de commentaires.

7. *Lien avec définition ou construction de* $\mathbb{R}$.

   Le cours sur les limites de fonctions commence par des paragraphes sur les réels, l'ordre sur $\mathbb{R}$, la valeur absolue, les inégalités ..., la définition d'un point adhérent à un ensemble.

   Suit la définition :

   « Soit a un point adhérent à $\mathcal{D}_f$. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f a pour limite l en a ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

   (i) Pour tout intervalle ouvert J contenant l, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(I \cap \mathcal{D}_f) \subset J$;

   (ii) On a

   $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

   On note alors $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} l$.

   On prendra garde au fait que, dans l'assertion (ii) le nombre réel η dépend de la fonction f, du point a et du nombre réel ε. »

8. *Preuve de l'unicité de la limite.*

   Elle est faite, avec usage du langage mathématique, comme dans tout le polycopié.

9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*

   Une des motivations principales est l'application des règles logiques et d'écriture en langage mathématique.

10. *Exemples de calcul du N ou du η.*

    Des exemples de calculs effectifs de η.

11. *Symbolisme : oui.*

    Démonstration de l'équivalence des deux défintions proposées dans ce polycopié (l'une avec des ouverts, l'autre avec des (ε, η)), de l'unicité, toujours avec des quantificateurs, puisque cette partie est une illustration de leur usage.

    Démonstrations des théorèmes sur les limites avec des quantificateurs.

    Les exercices sont de plusieurs natures : des vrai-faux sur des fonctions générales, des calculs de limites si elles existent ou des preuves que des limites valent xxx, toujours sur des fonctions explicites avec des fractions rationnelles ou des racines ou sinus. Pas d'exponentielles, ni de logarithmes.

Dans ce polycopié, support des cours en présentiel, toutes les preuves sont rédigées en utilisant des quantificateurs et les outils logiques. De nombreuses mises en garde et remarques sont faites pour aider l'étudiant à acquérir une capacité à rédiger une preuve rigoureuse. Le concept de limite est l'occasion de mettre en œuvre ce langage mathématique précis.

4.3.8 Exo 7, livre en ligne [19]

1. *Organisation globale.*

   ⋆ Page d'introduction de l'ensemble algèbre, analyse etc...très « méta [10] »

   ⋆ Algèbre 1 : Ce livre commence par des commentaires, dont celui-ci : « La première partie débute par la logique et les ensembles, qui sont des fondamentaux en mathématiques. Ensuite vous étudierez des ensembles particuliers : les nombres complexes, les entiers ainsi que les polynômes. Cette partie se termine par l'étude d'une première structure algébrique, avec la notion de groupe.

   La seconde partie est entièrement consacrée à l'algèbre linéaire. C'est un domaine totalement nouveau pour vous et très riche, qui recouvre la notion de matrice et d'espace vectoriel. Ces concepts, à la fois profonds et utiles, demandent du temps et du travail pour être bien compris. »

   Le premier chapitre (10 pages, dont une de motivations) s'intitule « logique et raisonnements », s'accompagne de vidéos (lecture intégrale du texte écrit) et contient des mini-exercices (corrigés rédigés et avec vidéo). Dans « logique », on trouve un paragraphe sur les assertions, les opérations entre assertions et les quantificateurs ; dans « raisonnements », sont énumérés les six raisonnements classiques (raisonnement direct, au cas par cas, par contraposée, par l'absurde, avec un contre-exemple, par récurrence).

   ⋆ Analyse 1 : 10 chapitres, dont les intitulés sont les suivants :

   les nombres réels ; les suites ; limites et fonctions continues ; fonctions usuelles ; dérivée d'une fonction ; intégrales ; développements limités ; courbes paramétrées ; équations différentielles ; leçons de choses.

2. *Type de présentation de $\mathbb{R}$.*

   Le chapitre sur les réels comprend aussi quatre vidéos et une fiche d'exercices sur les propriétés de $\mathbb{R}$.

Il démarre par un paragraphe de « motivation »historique et pratique (la longueur de la diagonale d'un rectangle de côtés 3 et 1 est irrationnelle comme le taux d'intérêt mensuel pour un taux annuel de 10%), justifiant la nécessité de construire les réels, l'étude des suites et de leurs limites, l'étude des fonctions continues et dérivables.

Puis cela décline l'étude de $\mathbb{Q}$ (écriture décimale, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, quelques mini-exercices), les propriétés de $\mathbb{R}$ (sans aucune définition précise) (corps commutatif totalement ordonné archimédien - les définitions de ces mots étant donnés en toute généralité), la densité de $\mathbb{Q}$ (et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) dans $\mathbb{R}$, en donnant une idée de preuve avant d'écrire la rédaction définitive, la borne supérieure.

De nombreux exemples, des graphiques, des mini-exercices émaillent ce chapitre.

Au chapitre sur « limites et fonctions continues » qui suit celui sur les suites, sont associées cinq vidéos de cours, où un enseignant chercheur lit le texte du « livre ». Il y a aussi quelques commentaires. Et deux vidéos d'exercices.

3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.*

   Définitions de fonction, graphes, exemples, opérations sur les fonctions, notions de majoration, sens de variation, parité et périodicité, avec des interprétations graphiques... suivies de « mini-exercices »

   Même si la définition en (ε, δ) de limite finie en un point est brutale, il y a des graphes et dans la vidéo, il y a du méta [10] et des gestes..., des remarques sur le fait que certaines inégalités peuvent être larges ou strictes, sur l'importance de l'ordre des quantificateurs, sur l'omission usuelle de certaines conditions et deux exemples : racine carrée et partie entière avec graphes.

   Puis dans le passage à la définition de limite infinie en un point, toujours en (A, δ), de nombreux graphes, comme pour la limite finie en l'infini, avec graphe d'une fonction non explicite et des exemples de fonctions explicites sont fournis.

   Les définitions de limite à droite et limite à gauche, sont données avec l'exemple de partie entière, ici aussi avec un graphe.

   La continuité en un point et sur un intervalle, toujours avec beaucoup d'illustrations par des graphes de fonctions non explicites, est donnée suivie d'exemples de fonctions explicites.

4. *Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.*

   Le chapitre « suites »précède celui sur limites de fonctions.

   La notion de limite est introduite par un exemple, puis la définition est donnée en mots puis formulée en (ε, N) : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n > N$ alors $|u_n - l| \leq \varepsilon$:

   $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

   C'est suivi d'un graphe avec une bande.

   La démonstration de l'unicité de la limite est écrite en mots.

   Il y a beaucoup de graphes, sur des suites non explicites, pour illustrer le propos.

5. *Equivalence entre les deux définitions de limite en un point.*

   Le théorème est énoncé et démontré dans le cours. Un paragraphe entier lui est consacré avec successivement : la définition d'une sous-suite, un graphique, un exemple avec graphique, une proposition, un corollaire, un exercice, le théorème de Bolzano-Weierstrass, un exemple, la démonstration (en utilisant la preuve par contraposition), six « mini-exercices » (un seul avec fonction non explicite).

La video sur les limites de fonctions propose sept exercices, les deux premiers dits « théorie » et les suivants « calculs ». Il y a des indications, la solution et une vidéo pour les six premiers.

Premier exercice sur des fonctions non explicites :

— Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.

— Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

En vidéo : la première partie utilise un raisonnement par récurrence facile non explicité et un raisonnement par l'absurde. La deuxième partie utilise la notion de borne supérieure et du lien entre limite de f en x_0 et limite de toute suite $(f(u_n))$ quand (u_n) tend vers x_0.

6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.*

   Les limites finies, infinies sont présentées d'abord sur les suites, puis sur les fonctions. Il y a beaucoup de graphiques et d'explications sous forme d'exemples et d'exercices. La première définition qui est donnée est directement celle avec ε.

   Il y a également les vidéos qui complètent ce cours. Leur forme est très sèche, monotone. les potentialités du support visuel ne sont pas forcement exploitées : les présentations qui y sont faites sont justes et très classiques.

7. *Lien avec définition ou construction de $\mathbb{R}$.*

   Aucun lien n'est fait.

8. *Preuve de l'unicité de la limite.*

   La preuve figure dans le chapitre sur les suites. Elle n'est pas répétée dans celui sur les fonctions : il y est précisé « On ne donne pas la démonstration de cette proposition, qui est très similaire à celle de l'unicité de la limite pour les suites (un raisonnement par l'absurde) » en choisissant un ε adéquat.

9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*

   Il n'y en a pas vraiment. Après une introduction très « vie quotidienne » sur les suites (*pour un trajet au prix normal de 20 euros on achète une carte d'abonnement de train à 50 euros et on obtient chaque billet à 10 euros. La publicité affirme « 50% de réduction ». Qu'en pensez-vous ?*), on attaque directement sur les limites avec ε et N.

   Au début, la question posée est celle de la résolution d'une équation : $x+exp(x)=0$, où est dessiné le graphe de cette fonction.

   Dans une vidéo de calcul de limite, il est fait allusion aux taux d'accroissement en un point et à la dérivée en ce point de la fonction $x \mapsto x^n$, alors que dans la solution écrite, c'est un alignement d'égalités non commentées.

10. *Exemples de calcul du N ou du η.*

    Quelques calculs sont faits à l'occasion de ce qui s'appelle ici des « mini-exercices ».

11. *Symbolisme ou non.*

    Le formalisme en (ε, η) est utilisé dans les preuves et dans les solutions écrites des exercices, autant que dans les vidéos. Par exemple, dans l'exercice suivant : si f est continue en x_0 et si $f(x_0) > 0$, alors f est strictement positive autour de x_0, ou dans les preuves des propriétés algébriques.

Au premier abord, cette ressource paraît très sèche et difficile d'accès. Si on utilise les vidéo, si on lit en profondeur les préliminaires et les remarques, cela n'est pas tout à fait

le cas. Cela nécessite de la part de l'étudiant une maîtrise de ce nouveau type d'outil, sans doute une grande autonomie dans l'apprentissage et un accompagnement par les enseignants chercheurs en présentiel.
Cela nécessiterait une étude sur l'usage de cette ressource et son impact sur la compréhension et l'acquisition des notions mathématiques.

4.3.9 Azoulay, Avignant, Auliac [5]

1. *Organisation globale.*

   L'ouvrage contient 14 chapitres :
   - chap 1 Logique élémentaire, ensembles, opérations sur les ensembles p.1 à 26.
   - chap 2 à 4 Applications, relations d'ordre et d'équivalence, structures algébriques, construction de $\mathbb{R}$ et éléments de topologie p.27 à 87.
   - chap 5 Suites numériques et applications p.93 à 127.
   - chap 6 à 8 Arithmétique, nombres complexes, polynômes et fractions rationnelles p.139 à 241.
   - chap 9 Fonctions d'une variable réelle, limites, continuité p 267 à 286.
   - chap 10 Dérivée et différentielle p.295 à 304.
   - chap 11 à 14 Fonctions trigonométriques et réciproques, primitives, fonctions logarithme, exponentielle, puissance, fonctions hyperboliques directes et réciproques, formules de Taylor et développements limités p.309 à 402.

2. *Type de présentation de $\mathbb{R}$.*

   L'existence de $\mathbb{R}$ (p.75 à 87), corps commutatif totalement ordonné archimédien, est admise. Grâce à l'axiome de Cantor : si (x_n) est une suite décroissante et si (x'_n) une suite croissante telles que pour tout n, $x'_n \leq x_n$, alors il existe c telle que pour tout n, $x'_n \leq c \leq x_n$, l'unicité d'un corps ayant ces propriétés est prouvée : c'est $\mathbb{R}$. Evocation de la droite réelle, de la droite achevée. Propriété de la borne supérieure.

   Topologie de $\mathbb{R}$: voisinage d'un point, ouvert, voisinage d'une partie, intérieur, adhérence, point d'accumulation, point isolé, notion d'espace séparé, théorème de Bolzano-Weierstrass.

   Les corrigés d'exercices sont succincts et sans grand discours !

3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.*

   Aucune visualisation de suite sauf pour les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. Graphe de la fonction $1_{\mathbb{R}^+}$ et de fonctions quelconques pour le théorème des valeurs intermédiaires.

4. *Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.*

   Limite de suite avant limite de fonction.

   Pour les suites (p.93 à 127), il y a des rappels, la définition en (ε, N) pour une limite dans $\mathbb{R}$. Exemples de suite géométrique et de série géométrique.

   L'unicité de la limite d'une suite est démontrée avec des (ε, N), sans vraiment quantifier le ε, puisque la démonstration commence par : « soit $\varepsilon > 0$, il existe N_1 tel que $n > N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et il existe N_2 tel que $n > N_2 \Rightarrow |u_n - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, d'où, en utilisant l'inégalité triangulaire, si $n > \sup(N_1, N_2)$, $|l_1 - l_2| < \varepsilon$ et $l_1 = l_2$ ».

   Arrive la notion de limite infinie d'une suite. Sont définis point d'accumulation, adhérence, suite de Cauchy,...

   Opérations sur les limites de suites.

Pour les fonctions, la définition est sans rapport avec celle des suites :« soit f définie de D dans $\mathbb{R}$ et a adhérent à D. On dit que f tend vers l quand x tend vers a ou que f a pour limite l au point a si $\forall\varepsilon$... » (dernière expression écrite en langage mathématique), de limite à l'infini en terme de (A, α).

C'est aussi dit en terme de voisinage, ouvert et fermé.

5. *Equivalence entre les deux définitions de limite en un point.*

   Enoncé (sans quantification) et preuve (avec des (ε, α) du théorème de Weierstrass : définition de limite en terme de voisinage (écriture $\lim\limits_{x \to a} = l$ avec a et l dans $\bar{\mathbb{R}}$) et définition de limite avec des suites.

   Preuve en utilisant des raisonnements par l'absurde.

6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.*

   Il y a toute une page, en formulation mathématique, sur les extensions à l'infini, sur les notions de voisinages à l'infini, et pour finir sur une écriture mathématique en termes de voisinages de « f a pour limite l quand x tend vers a », avec des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

   Renvoi aux démonstrations de limites de suites pour les propriétés algébriques. Un peu de texte pour expliquer que les théorèmes s'appuieront sur les théorèmes analogues sur les suites. Suivent de grands tableaux pour limite de somme, limite de produit, limite de quotient.

   Après avoir défini la notion de fonctions équivalentes, p.273 arrivent des exemples fondamentaux de telles fonctions : polynômes, fonctions rationnelles, fonctions trigonométriques, fonctions logarithmes, exponentielles, puissances.

7. *Lien avec définition ou construction de* $\mathbb{R}$.

   Il y en a très peu. Dans un exercice sur la question de continuité d'une fonction est utilisée la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et dans un autre la notion de valeur d'adhérence d'une suite.

8. *Preuve de l'unicité de la limite.*

   La preuve de l'unicité de la limite est renvoyée à celle de l'unicité de la limite d'une suite.

   La définition de la continuité en un point : « soit f définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en a si et seulement si f a une limite en a » est suivie de la remarque : cette limite est nécessairement $f(a)$ car a est un élément de D et il y a unicité de la limite.

9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*

   Au chapitre 10, il y a des rappels sur la notion de dérivée, avec quelque graphes. Aucun discours autour de cette notion.

10. *Exemples de calcul du N ou du η.*

    Pas de calcul explicite, mais des raisonnements où il faut couper les ε en deux. Aucun calcul explicite du η associé au ε dans un exemple concret.

11. *Symbolisme ou non.*

    Il y a beaucoup d'utilisation des symboles mathématiques. Les preuves des propriétés algébriques sont faites dans le chapitre sur les suites.

    La plupart des exercices sont « trouver la limite de ... », ou « calculer les limites de ... ».

    Mais il y a aussi des exercices plus théoriques : « si f est périodique et a une limite en $+\infty$, alors f est constante », ou encore « étude de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ continues en -1 et telles que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(2x+1) = f(x)$ »ou encore « si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ et égales sur $[a,b] \cap \mathbb{Q}$, a-t-on $f = g$? ». Exercices nécessitant des raisonnements et écritures plus formelles que lors de calculs de limites.

Les écritures mélangent langage mathématique et langage naturel. Les théorèmes et définitions ne sont pas en gras ni mis en évidence. La présentation est floue. Tout cela est très formel, peu illustré, sans explication ou justification de tout ce formalisme ... Un grand nombre d'exemplaires de ce livre sont malgré tout en bibliothèque de Paris Diderot.

4.3.10 Liret et Martinais [80]

1. *Organisation globale.*

   Ce livre contient les 17 chapitres suivants :

   Nombres réels et fonctions, limite et continuité, les suites, borne supérieure, fonctions continues sur un intervalle, dérivée d'une fonction, utilisation de la dérivée, fonctions usuelles, l'intégrale, primitives, utilisation des dérivées successives, développements limités, le calcul des développements limités, étude de fonctions, courbes paramétrées, étude de primitives, équations différentielles.

   De manière générale, la présentation est aérée, chaque chapitre contient des exemples, des exercices résolus, souvent des représentations graphiques et est suivi d'une liste d'exercices avec des indication de solutions.

2. *Type de présentation de* $\mathbb{R}$*.*

   Le chapitre 1 porte sur « nombres réels et fonctions », partant de la connaissance a priori des élèves et des usages qu'ils en ont fait : les entiers naturels et relatifs, les nombres décimaux, rationnels, les développements décimaux, les opérations sur les nombres. La propriété de corps archimédien de $\mathbb{R}$ démontrée. Sont données la définition de partie entière, de segment, intervalles, la propriété d'un intervalle ouvert non vide contenant une infinité de rationnels et d'irrationnels démontrée sans symbolisme, majorant, minorant, avec exemples, la définition d'une fonction numérique et des opérations sur les fonctions, émaillées de preuves toujours sans symbolisme, puis fonction valeur absolue et fonction partie entière avec graphes. Suivi d'exercices et de quelques réponses à ces exercices.

3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.*

   Il y a de nombreuses représentations graphiques et de nombreux exemples simples, pour illustrer cette notion.

4. *Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.*

   Le chapitre sur les suites vient après celui sur les limites de fonctions.

   Le chapitre 2 sur limite et continuité repose sur le préambule suivant :

   « Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que x_0 est un élément de I ou une extrémité de I ». Peut alors être donnée la définition :

   « Soit l un nombre réel. On dit que f a pour limite l en x_0 ou encore que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\alpha > 0$ ayant la propriété suivante : $(x \in I,\ |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

   La propriété « f a pour limite l en x_0 se note $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ».

   Suivent des équivalences, écrites en langage mathématique. Puis deux exemples, l'un avec racine carrée et l'autre avec une expression utilisant la partie entière - exemples développés entièrement avec graphe. Des commentaires sur le fait que f n'est pas nécessairement définie en x_0.

5. *Equivalence entre les deux définitions de limite en un point.*

   Aucune évocation du lien entre continuité définie en terme d'(ε, η) et définition séquentielle, dans ce chapitre ou dans celui sur les suites.

6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.*

   La définition de limite finie en l'infini est suivie d'un exemple traité. Puis un travail sur les propriétés de majoration et minoration d'une fonction qui a une limite finie, sur unicité de la limite est proposé. Enfin la définition de limite infinie en x_0 et celle de limite infinie en l'infini sont données.

   Passage aux opérations sur les limites, tout cela émaillé de nombreux exemples.

   Fin du chapitre en définissant la continuité.

7. *Lien avec définition ou construction de $\mathbb{R}$.*

   Aucun commentaire.

8. *Preuve de l'unicité de la limite.*

   L'unicité de la limite est démontrée par l'absurde, à partir de la proposition (démontrée) « soient f une fonction et a et l des réels tels que $l > a$. Supposons que x_0 est un réel et que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, alors il existe un nombre $\alpha > 0$ ayant la propriété suivante : $(x \neq x_0$ et $|x - x_0| < \alpha) \Rightarrow f(x) > a$ ».

9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*

   Il n'y en a aucune, il est simplement indiqué l'importance de cette notion de limite.

10. *Exemples de calcul du N ou du η.*

    Aucun calcul explicite.

11. *Symbolisme ou non.*

    Dans ce chapitre, il n'y a aucune utilisation des symboles $\forall$ et $\exists$. Ce sont ces expressions en français qui sont écrites explicitement. Les preuves contiennent des commentaires, sur les techniques utilisées.

    Les solutions des huit énoncés d'exercices du chapitre reposent sur l'utilisation de la continuité de log, exponentielle, cosinus et sinus : limites finies ou non en l'infini surtout, limites en 0 (en 1, en 3, en π), quelques limites à droite ou gauche, toujours sur des fonctions explicites définies avec des log, des racines, des exponentielles, des fractions rationnelles. L'essentiel des questions est « calculer ». Dans deux ou trois cas, il faut « montrer » la continuité ou non en des points, « faire un raisonnement » par l'absurde pour répondre à une interrogation sur l'existence ou non d'une limite en l'infini (ex 7).

    Seuls trois au quatre exercices nécessitent l'utilisation de la définition formelle.

Les exercices demandent d'utiliser les opérations algébriques sur les limites, les propriétés de majoration d'une fonction ayant une limite finie. Aucun exercice de modélisation, juste du travail sur les fonctions usuelles, très technique. Pas de problème donnant du sens autre que dans le contexte mathématique.

4.3.11 El Kaabouchi [72]

Ce livre est intitulé : Mathématiques, L1 semestres 1 et 2 - Sciences, 170 fiches méthodes, 560 exercices corrigés, formulaire.

L'avant-propos indique qu'il s'agit d'un outil d'entraînement, d'approfondissement et de révision des principales notions de mathématiques de L1, permettant de combler rapidement les lacunes et d'assimiler parfaitement le programme.
En la période d'examens de mai 2017 à Paris Diderot, le 19 mai, sur 39 exemplaires possédés par la Bibliothèque Universitaire de Paris Diderot, 21 sont sortis et sur l'ouvrage analogue pour le niveau L2, sur 40 exemplaires 37 sont sortis et 2 seulement restent disponibles.

1. *Organisation globale.*

   Ce livre ne contient aucun cours ni aucun rappel de cours.

   Il est découpé en trois parties : algèbre, analyse, exercices corrigés pour finir par formulaire. La partie « analyse » se décline en suites réelles (10 pages), continuité et limites (10 pages), dérivation, développements limités, fonctions usuelles, primitives et intégration, équations différentielles.

   Chaque fiche méthode tient sur une page et a un en-tête indiquant la question sur laquelle la méthode va porter. Par exemple :

   "fiche 1 : comment montrer qu'une suite est convergente en revenant à la définition ?

   On montre que, étant donné un $\varepsilon > 0$ on peut trouver un n_ε de $\mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - l| < \varepsilon$.

   Exemple : la suite $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0. La propriété d'Archimède des réels permet de monter l'existence d'un n_ε tel que $n_\varepsilon\varepsilon > 1$ etc..."

   Ou encore sur la continuité :

   « fiche 1 : comment montrer la continuité d'une fonction en revenant à la définition ?

   fiche 2 : comment montrer la continuité d'une fonction en utilisant les opérations ?

   fiche 3 : comment montrer la continuité d'une fonction en utilisant les limites ?

   fiche 4 : comment montrer la discontinuité d'une fonction en utilisant la définition ?

   fiche 5 : comment montrer la discontinuité d'une fonction en utilisant la bornitude ?

   fiche 6 : comment montrer la discontinuité d'une fonction en utilisant les suites ? »

2. *Type de présentation de $\mathbb{R}$.*

   Il n'y a rien sur les réels.

3. *Visualisation-graphes, schémas. Exemples types.*

   Les seules représentations graphiques figurent dans les fiches et les corrigés sur les fonctions usuelles.

4. *Ordre de présentation : limites fonction et limites suite.*

   Les méthodes sur les suites sont placées juste avant celles sur les fonctions.

5. *Equivalence entre les 2 définitions de limite en un point.*

   On parle de continuité en un point plus que de limite. Aucune définition ne figure explicitement.

6. *Limites finie ou non en un point fini ou non. Définition, exemple, présentation.*

   Les exemples utilisés dans les fiches-méthodes sont basiques : suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, fonctions $E(x)$ ou $x - E(x)$ ou x^2 ou $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$ ...

7. *Lien avec définition ou construction de $\mathbb{R}$.*

   Rien n'est travaillé sur les réels. Le terme « voisinage » apparait de temps en temps.

8. *Preuve de l'unicité de la limite.*

   Aucune preuve de cours n'est faite.

9. *Motivation, introduction, commentaire sur la nécessité du travail de cette notion.*

   Aucune motivation sur quelques notions que ce soit. Le seul intérêt de ce livre est celui de permettre un entraînement et d'apprendre des méthodes.

10. *Exemples de calcul du N ou du η.*

    Sur la première fiche sur les suites, il est prouvé l'existence du n_ε, sans calcul explicite comme sur la première fiche sur les limites de fonctions.

11. *Symbolisme ou non.*

    Dans les solutions proposées est utilisé fréquemment le $\forall$, moins souvent le $\exists$.
    Dans les fiches 4,5 et 6 sur la continuité où il s'agit de montrer une discontinuté et donc de nier une propriété, les négations sont écrites en français comme par exemple pour la fiche 5 : « pour montrer que f n'est pas continue en a, il suffit de montrer que f n'est pas bornée au voisinage de a », ou pour la fiche 6 « pour montrer que f n'est pas continue en a, il suffit de trouver une suite (x_n) convergent vers a telle que $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(a)$ (exemple $f(x) = E(x)$ en 0.) ».

    Les corrigés, aérés, contiennent très peu de phrases et du formalisme-symbolisme a minima.

Un tel ouvrage ne suffit pas pour comprendre les concepts, il est fait pour qu'un étudiant apprenne des techniques et soit opérationnel le jour de l'examen.
Il ne contient aucune indication d'ouvrage de cours contenant des démonstrations auquel se référer. Ce qui est regrettable.
Ce livre est écrit par un enseignant-chercheur, enseignant à Institut Supérieur des Matériaux du Mans (ISMM).

4.4 Eléments de contenu du livre de James Stewart [126]

Cet ouvrage vise à la « compréhension des concepts à travers des approches visuelles, numériques et algébriques ». Cependant, l'auteur insiste sur la « distinction entre vraie démonstration et argumentation convaincante ». Le fait « que l'on dispose aujourd'hui d'outils techniques rend plus importante (et non pas moins) la maîtrise des concepts sous-jacents aux images de l'écran ».
Après avoir motivé l'étude de la limite par différents problèmes : aire du disque, tangente, vitesse, paradoxe de Zénon, il donne la définition mathématique exprimée dans le langage naturel :
« $lim f(x) = L$, et nous énonçons *la limite de $f(x)$ quand x tend vers a est égale à* L, si nous pouvons rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proche de L (aussi proches que nous le voulons) en prenant x suffisamment proche de a (à gauche et à droite) mais non égal à a ».
Cet ouvrage contient de nombreux graphiques et tableaux de valeurs ainsi que de nombreux commentaires méta [10].

5 Les suites, un objet typique de la transition lycée université

5.1 Introduction

Cette partie fait suite à une présentation de Viviane Durand-Guerier à la Commision Inter-IREM Université sur le sujet disponible sur le site de l'ADIREM. `http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/Rennes-24-mai-2014-Suite-2-Stephanie_et_Viviane.pdf`.

Les suites numériques font partie de ces notions que les élèves rencontrent au lycée, en classes de première et de terminale, et dont l'enseignement est repris en L1 dans la plupart des filières scientifiques, notamment pour étudier le comportement de convergence. Il nous a donc semblé intéressant de regarder de plus près l'enseignement de cette notion qui s'inscrit complètement dans le contexte de la transition secondaire-université. Des questions émergent d'emblée. Comment les suites et les notions associées sont-elles introduites dans les deux institutions ? Et comment sont-elles travaillées ? En particulier, quels sont les types d'exercices sur lesquels les élèves et les étudiants travaillent à chaque niveau d'enseignement ?
Dans cette perspective, nous nous intéressons tout d'abord à l'enseignement des suites au lycée dans le but de mettre en évidence les connaissances supposées disponibles chez les étudiants de L1 au moment où le chapitre sur les suites démarre. Le répertoire d'exemples proposés au lycée nous semble également un aspect important à étudier pour dresser un panorama de l'enseignement au lycée.
Nous proposons ensuite d'adopter un regard didactique sur l'enseignement des suites en première année universitaire. Nous mettrons ainsi en évidence les différences observées dans les deux institutions que sont le lycée et l'université sur la base d'exemples concrets, souvent issus de nos expériences personnelles d'enseignantes en L1. Cette partie nous permettra de mettre en évidence des conceptions résistantes chez les étudiants, dont certaines ont fait l'objet de travaux de recherche, notamment en élaborant des ingénieries didactiques visant à surmonter certains obstacles. Des exemples sont présentés dans la troisième partie de cette brochure.

5.2 L'enseignement des suites au lycée

L'enseignement des suites apparaît dans les classes de première et de terminale. En première, ce sont principalement les modes de génération d'une suite et la notion de croissance qui sont étudiés, avec un accent mis sur les suites arithmétiques et géométriques. En terminale, la notion de limite est introduite. Regardons d'un peu plus près les directives de chaque programme (programme de 2010).
Le programme de la classe de première stipule que l'enseignement des mathématiques au lycée s'inscrit dans une logique de résolution de problèmes. Les notions doivent donc être introduites pour répondre à des problématiques mathématiques ou en lien avec d'autres disciplines. Comme l'exprime le programme, ce choix d'approche a comme objectif « de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets ».
Le programme précise ensuite que « l'étude des phénomènes discrets fournit un moyen d'introduire les suites et leur génération en s'appuyant sur des registres différents (algébrique, graphique, numérique, géométrique) ». Les suites sont également décrites comme un terrain propice à la mise en place d'activités algorithmiques. Ainsi, des algorithmes

seront mis en œuvre pour obtenir une liste de termes d'une suite ainsi que pour calculer un terme de rang donné. Les suites arithmétiques et géométriques seront étudiées et il est demandé aux élèves de connaître les formules permettant de calculer la somme $1+2+\ldots+n$ et des sommes de la forme $1+q+q^2+\ldots+q^n$. L'étude de la notion de croissance sera l'occasion d'exploiter la représentation graphique des termes d'une suite. La notion de limite sera approchée de manière empirique en se questionnant sur le comportement des suites étudiées. C'est donc à partir d'exemples que cette notion sera abordée.
Le programme de la classe de terminale se donne comme objectif principal de consolider et d'enrichir les notions relatives aux suites et aux fonctions étudiées précédemment, mais aussi d'étudier un nombre plus important de phénomènes discrets ou continus.
Le programme fournit les définitions qui doivent être introduites aux élèves. Ainsi, « pour exprimer que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang », et « pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ on dit que tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, une capacité attendue chez les élèves est de déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A. Rien n'est explicité pour le cas d'une limite finie. Des théorèmes de comparaison et les règles de calculs relatives aux opérations sur les limites seront admis. Enfin, les notions de suite majorée, suite minorée et suite bornée seront également abordées avec les élèves.
Nous avons regardé comment ces programmes sont mis en œuvre dans des manuels. Pour la classe de première S, nous avons consulté*maths repères (2011)* [25] et *transmath (2011)* [9]. Ce choix méthodologique tient au fait que les manuels sont des représentations possibles de ce qui peut être proposé en classe. Nous présentons ici une étude assez globale visant à mettre en évidence les contenus abordés et le type d'exercices fréquemment rencontrés.
La partie « Cours » aborde les mêmes contenus théoriques dans les deux manuels. Même si l'accent est mis de part et d'autre sur l'étude des suites arithmétiques et géométriques, les notions de suite et de croissance sont définies en toute généralité. Dans les deux manuels, la définition d'une suite est principalement écrite dans le langage naturel. Ainsi, la définition du manuel*transmath* [25] est la suivante :

Une **suite** *est une* **fonction** *définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou sur l'ensemble $\mathbb{N}$ privé des premiers entiers $0, 1 \ldots, k$).*

Les notations sont précisées avec l'exemple de la suite u qui associe à tout naturel n son double, $2n$. Le manuel *maths repères* [9] précise quant à lui l'ensemble d'arrivée avec la définition suivante :

Soit n_0 un entier naturel. Une **suite** *u est une fonction associant à tout entier naturel n un réel $u(n)$ que l'on note u_n.*

Chaque manuel introduit ensuite les modes de génération d'une suite. Nous rencontrons principalement :
— une définition de la suite par une formule explicite : pour tout entier naturel $n \geq n_0$ on a $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$.
— une définition de la suite par récurrence.
Le fait qu'une suite soit une liste infinie et indexée d'éléments n'apparaît qu'implicitement dans la définition et les premiers exercices sur la notion ne permettent pas non plus de

revenir sur ces caractéristiques qui sont pourtant au cœur de la notion de suite. Par exemple, l'exercice suivant, proposé dans [25] (p.124) propose un travail sur les indices qui ne met en jeu qu'un élément générique de la suite à expliciter en fonction de n ou alors une mise en relation entre un élément et l'élément précédent :

> *Exercice 40 :*
> *Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -3n + 4$*
> 1. *Exprimer u_n en fonction de n.*
> 2. *Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.*

Dans [9] les premières tâches consistent à faire calculer les premiers éléments de certaines suites. Nous trouvons par exemple, dans les exercices 47 et 49 (p.132) :

> *Trouvez la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$ et calculez les termes de u_0 à u_5.*
> *a)* $u_n = 2n + 5$
> *b)* $u_n = n^2 + 2n - 5$

Remarquons qu'il suffit de remplacer n par $0, \ldots, 5$ pour calculer les premiers termes de la suite et que la recherche de la fonction f n'est en rien indispensable pour trouver les termes demandés.
La représentation graphique d'une suite est également présentée en fonction du mode de génération choisi.
La notion de croissance est définie pour une suite quelconque dans les deux manuels. En première, il y a peu d'exercices portant sur la croissance d'une suite quelconque. De plus, on ne rencontre pratiquement pas de suite ni croissante ni décroissante.
Ensuite, pour les suites arithmétiques et géométriques, un théorème sur la croissance de chaque type de suite est établi. Nous avons repris l'énoncé proposé dans *maths repères* (p.107 et 108) [25].

> *Soit r un réel et (u_n)une suite arithmétique de raison r.*
> — *Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante.*
> — *Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.*
> — *Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.*
>
> *Soit q un réel et (v_n)une suite géométrique de raison q.*
> — *Si $q > 1$, alors la suite (v_n) est croissante si $v_0 > 0$ et décroissante si $v_0 < 0$.*
> — *Si $0 < q < 1$, alors la suite (v_n) est décroissante si $v_0 > 0$ et croissante si $v_0 < 0$.*

Ainsi, il suffit de regarder la raison de la suite pour se prononcer sur les variations de celle-ci. Dans les exercices proposés sur les variations d'une suite, l'accent est une fois encore mis sur les premiers éléments de la suite, comme en témoigne l'exercice suivant à propos d'une suite définie par récurrence :

> *Exercice 37 (maths repères p.123 [25])*
> *Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ pour $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.*
> 1. *Donner l'exepression de la fonction f vérifiant : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.*
> 2. *Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-1, 5]$. On pourra prendre 1 unité pour 3cm.*
> 3. *Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n).*
> 4. *Quelle conjecture peut-on émettre sur la monotonie de la suite (u_n) ?*

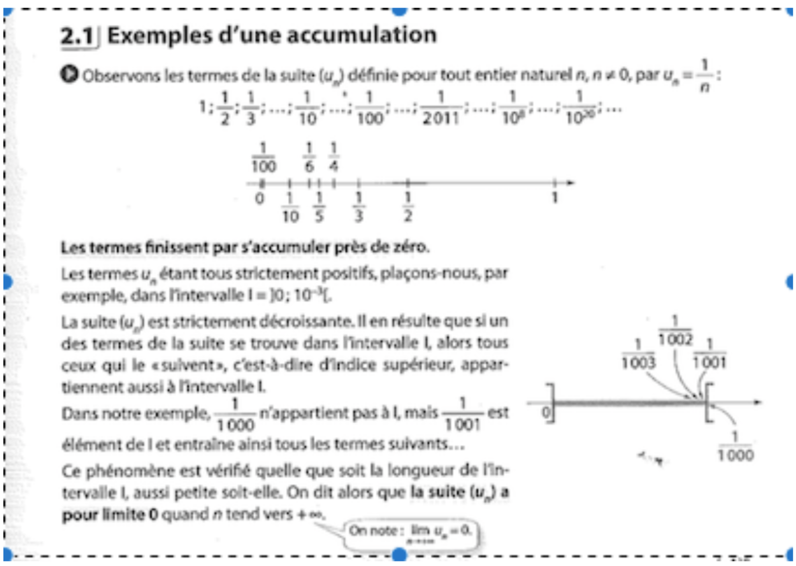
Cet exercice met de nouveau en évidence le poids accordé à la notion de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour étudier les suites. Nous remarquons également que l'énoncé propose de se prononcer sur la croissance de la suite, qui est un comportement global, en observant ce qui se passe au niveau des premiers éléments. Cette démarche peut développer chez l'élève la conception que le comportement des quelques premiers termes se répercute sur ce qui se passe éventuellement très « loin » dans la suite.

En ce qui concerne la notion de limite, elle est abordée à partir de la question suivante : « vers quoi semble se rapprocher u_n quand n tend vers $+\infty$? ». La définition formelle n'est pas introduite, comme le préconisent les programmes. C'est donc en observant des graphiques ou bien l'évolution des valeurs prises par les termes d'une suite en les générant avec un tableur que sont mis en évidence différents comportements :

- pour la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, « les termes finissent pas s'accumuler près de zéro » (*transmath*, p.147 [9]) ;
- pour la suite (n^2), « u_n semble se rapprocher de $+\infty$ » (*math repères* p.119 [25]) ;
- pour la suite $((-1)^n.n)$, *transmath*, p.148 [9] évoque un phénomène de dispersion des termes ;
- pour la suite $((-1)^n)$, *math repères* [25] explique que la suite oscille en prenant les valeurs -1 ou 1.

Comme la définition formelle est absente, toutes les questions qui portent sur la notion de limite relèvent de conjectures à formuler et qui ne pourront être justifiées rigoureusement. Ainsi dans *math repères* [25] nous rencontrons plusieurs exercices où un tableur a calculé les quelques premiers éléments d'une suite. Le travail demandé est de trouver une formule pour calculer le terme général de la suite, de calculer davantage d'éléments et de se prononcer sur une valeur possible pour la limite de la suite.

Le manuel *transmath*, [9] va un peu plus loin pour amorcer une représentation intuitive de la notion de convergence en amenant l'idée de considérer un intervalle autour du candidat limite et d'y faire rentrer les termes de la suite à partir d'un certain rang. Nous reprenons le passage, p.147, pour traiter la convergence de la suite $\dfrac{1}{n}$ vers 0.



2.1 Exemples d'une accumulation

Observons les termes de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, $n \neq 0$, par $u_n = \frac{1}{n}$:

$$1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \dots ; \frac{1}{10} ; \dots ; \frac{1}{100} ; \dots ; \frac{1}{2011} ; \dots ; \frac{1}{10^8} ; \dots ; \frac{1}{10^{20}} ; \dots$$

Les termes finissent par s'accumuler près de zéro.

Les termes u_n étant tous strictement positifs, plaçons-nous, par exemple, dans l'intervalle $I =]0 ; 10^{-3}[$.

La suite (u_n) est strictement décroissante. Il en résulte que si un des termes de la suite se trouve dans l'intervalle I, alors tous ceux qui le « suivent », c'est-à-dire d'indice supérieur, appartiennent aussi à l'intervalle I.

Dans notre exemple, $\frac{1}{1000}$ n'appartient pas à I, mais $\frac{1}{1001}$ est élément de I et entraîne ainsi tous les termes suivants…

Ce phénomène est vérifié quelle que soit la longueur de l'intervalle I, aussi petite soit-elle. On dit alors que **la suite (u_n) a pour limite 0** quand n tend vers $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Dans ce manuel, un travail semblable est mené pour la divergence vers l'infini.

Cependant, les exemples traités concernent des suites monotones. Dès lors, si un terme rentre dans l'intervalle, on est assuré que les suivants y entrent également. La question de savoir si tous les termes rentrent dans un intervalle à partir d'un certain rang est donc quelque peu éludée.
De nombreux problèmes mettant en jeu des suites arithmétiques ou géométriques sont proposés dans les manuels mais nous ne les avons pas étudiés.

Dans le manuel *maths repères* pour la classe de terminale [33], nous nous sommes centrées sur la notion de limite qui deviendra cruciale en L1. Dans la partie « Cours » du manuel, les définitions suggérées par les programmes sont données et interprétées graphiquement sur la droite réelle. Des théorèmes de convergence sont énoncés tels que l'unicité de la limite ou les liens entre suite convergente et suite bornée. Ces théorèmes sont démontrés dans la partie « Questions de cours » du chapitre. Le fait qu'une suite croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée) converge est admis. Le théorème qui affirme qu'une suite croissante et non majorée (respectivement décroissante et non minorée) tende vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) est par contre démontré.
Dans les exercices, les règles de calculs sur les limites sont principalement mises en application sur des quotients de polynômes, sur des racines de polynômes et sur des suites faisant intervenir dans leur définition des suites géométriques. En voici deux exemples :

Dans les exercice 70 à 73, déterminer les limites éventuelles des suites proposées.
71-

a) $u_n = \dfrac{-2n^2+2n+1}{n^2-3n+4}$

b) $u_n = \sqrt{n^2+n+1}$

73-

a) $u_n = \dfrac{3^{n+1}-4^{n+2}}{3^{n-1}-4^n}$

b) $u_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n}$

Le théorème des gendarmes pourra être utilisé pour étudier des suites faisant intervenir des fonctions trigonométriques, comme dans les exercices suivants :

76-

a) $u_n = \dfrac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

De nombreux exercices proposent d'étudier la convergence de suites définies par récurrence en utilisant le théorème sur les suites croissantes et majorées (respectivement décroissantes et minorées). En général, un majorant et /ou un minorant sont souvent donnés explicitement dans l'énoncé. Ces exercices sont aussi souvent découpés en petites tâches calculatoires, la méthode à utiliser étant parfois explicitement indiquée, comme dans l'exercice suivant :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

1. *Prouver que pour tout n, $u_n > 0$.*
2. *Prouver que la suite (u_n) est décroissante.*
3. *Justifier la convergence de la suite (u_n).*
4. *Calculer les cinq premiers termes (valeurs exactes). Quelle conjecture peut-on faire concernant l'expression de u_n en fonction de n ?*
5. *Démontrer ce résultat par récurrence.*
6. *Quelle est la limite de la suite (u_n).*

Dans ce manuel, nous n'avons trouvé aucun exercice qui demande d'utiliser la définition de la convergence.

Cette présentation très globale des manuels met en évidence plusieurs caractéristiques de l'enseignement amorcé sur les suites au lycée. Celui-ci s'appuie sur un travail très algébrisé associé à une utilisation de nature opératoire des propriétés. En effet, dans les exercices proposés, il s'agit principalement de calculer des objets : calculer des éléments d'une suite, calculer un terme de rang donné, calculer un indice à partir duquel les termes de la suite rentrent dans un intervalle fixé préalablement, calculer des limites avec des règles algébriques. De nombreux énoncés sont également découpés en petites tâches isolées qui relèvent de l'application simple d'un résultat du cours et ces sous-tâches élémentaires se réduisent à des calculs qui ne permettent pas non plus de revenir au sens des notions.
La notion de fonction d'une variable réelle est également très présente pour étudier les suites, notamment leur sens de variation. Ainsi, pour étudier une suite, on travaille sur la fonction correspondante et ce sont alors les notions relatives aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ comme la dérivation qui sont sollicitées. De nouveau, ce déplacement de l'attention sur les fonctions réelles peut induire un manque de sens quant aux notions de croissance d'une suite et peut, peut-être, provoquer chez l'élève des conceptions erronées, comme par exemple concernant la représentation graphique d'une suite de manière continue comme pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et non point par point.
Concernant le formalisme utilisé pour définir les objets et les manipuler, les questions liées à la quantification sont absentes. Par exemple, on étudie la croissance d'une suite en calculant $u_{n+1} - u_n$ ou bien $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Rien n'est dit sur le fait que n désigne un indice quelconque de la suite et que les quantités sont calculées pour tout n.Tout se passe comme si les exercices proposés traitaient de ce qui se passe au début de la suite. On travaille alors sur un objet (les suites) sans jamais revenir sur la nature de cet objet. Nous pensons par exemple à la notion de croissance où pour étudier les variations d'une suite, beaucoup d'exercices demandent de calculer les premiers éléments de la suite et d'émettre une conjecture sur la croissance de la suite, avant de la prouver.

La définition de convergence, pourtant au programme, n'est pas du tout travaillée dans le manuel de terminale. Ce sont principalement des suites définies par récurrence et souvent monotones dont on étudie la convergence à partir du théorème sur les suites croissantes majorées.
Nous allons maintenant confronter ces premiers constats à ce qui se passe en L1.

5.3 À l'université et en classes préparatoires aux grandes écoles

Souvent, un cours sur les suites en L1 démarre avec la définition d'une suite numérique. La notion qui sera au cœur du chapitre est celle de convergence et sa définition formelle en ε, N. Regardons tout d'abord comment sont travaillées à l'université les notions abordées au lycée.

Voici une définition typique de ce que nous pouvons trouver dans un polycopié d'un cours d'analyse en L1 :
Une suite numérique est une fonction $u : \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} \to \mathbb{R}$ pour un certain entier $n_0 \geq 0$. On note u_n plutôt que $u(n)$, c'est le terme de rang n de la suite, et on note la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Des exemples de suites sont en général donnés mais ils sont davantage présents pour illustrer les notations utilisées que pour regarder les premiers éléments. Un exemple classique est la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou une suite telle que $\left(\sqrt{n-4}\right)_{n\geq 4}$ pour témoigner du fait que le domaine de définition de la suite n'est pas toujours $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$.
Cette notation en termes de fonction peut préparer le terrain à l'introduction de la notion de sous-suite où on a besoin de décrire la fonction strictement croissante qui permet d'extraire des éléments de la suite initiale. Elle sera également abondamment utilisée dans les résultats qui portent sur une suite générique.

La définition de la convergence d'une suite vers un nombre réel apparaît en général assez tôt dans le cours. Cette définition peut prendre des formes variées, notamment en ce qui concerne les registres d'écriture choisis pour caractériser la notion ou encore concernant les objets utilisés pour exprimer la notion de distance entre deux nombres réels. Par exemple, pour exprimer qu'une suite (x_n) converge vers un réel l, la caractérisation suivante est écrite exclusivement dans le registre symbolique :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon.$$

Dans [80], la caractérisation donnée mélange le registre de la langue naturelle et le registre symbolique : *Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier N ayant la propriété suivante :*

$$n \geq N \Longrightarrow |x_n - l| < \varepsilon.$$

Dans cette définition, remarquons l'absence d'une quantification sur n. Il s'agit d'une pratique répandue qui a été mise en évidence par Durand-Guerrier dans [52]. Ainsi, une implication énoncée sans quantificateur laisse sous-entendre que c'est une quantification universelle qui est implicitement présente. Cette pratique peut renforcer des difficultés chez les étudiants au début du parcours universitaire car ceux-ci ne sont pas forcément habitués à manipuler les quantificateurs et aux règles d'usage relatives au respect de la structure logique d'une formule quantifiée lorsqu'on doit la prouver ou bien prouver sa négation.
Plusieurs différences avec les choix de formalisation retenus dans les programmes du lycée apparaissent. Tout d'abord, c'est en termes d'inégalités et en utilisant la valeur absolue que la distance entre les éléments de la suite et le candidat limite est exprimée. Rappelons qu'au lycée, c'est en termes d'intervalle contenant la limite que la convergence est définie. Bien entendu, il arrive que les deux définitions soient données mais se pose alors la question de la capacité des étudiants à pouvoir passer de l'une à l'autre. De plus, les quantifications sont ici explicitées, l'expression « à partir d'un certain rang » est traduite en symboles mathématiques et avec les quantificateurs associés. Les quantifications sont essentielles pour une conceptualisation correcte de la notion. Nous savons de plus que cette définition sera ensuite utilisée pour démontrer des résultats, les quantifications deviennent dans ce cas également indispensables pour rédiger rigoureusement les démonstrations.
La définition de convergence est ensuite utilisée pour démontrer l'unicité de la limite, les règles de calculs et pour établir l'existence ou la non-existence de certaines limites.
Nous pensons au fait que $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0, à la convergence des suites constantes, ou encore au fait que la suite (a^n) tend vers 0 lorsque $|a| < 1$.
Des questions liées aux variations possibles quant aux choix de quantification sont parfois

abordées. Par exemple, le fait que l'inégalité présente dans la définition soit stricte ou large ou encore le fait que ε puisse être choisi entre 0 et 1. Ce type de questionnement n'est pas du tout abordé au lycée. La définition est également utilisée pour étudier certains liens comme par exemple entre le fait que $x_n \to l$ et $|x_n| \to |l|$. On peut également démontrer que la définition de la convergence d'une suite (x_n) vers un réel l est équivalente au fait que $|x_n - l| \to 0$.
Les notions de croissance et les caractères borné, majoré et minoré des suites sont étudiés et le fait qu'une suite croissante majorée (décroissante minorée) converge vers un nombre réel est établi. Ce théorème est souvent utilisé pour étudier la convergence de suites définies par récurrence. D'autres notions telles la notion de suite extraite, suite de Cauchy sont étudiées. La divergence vers l'infini fait également l'objet d'une étude formelle dans la continuité du travail entrepris sur la convergence vers un réel.

L'enseignement en L1 vise donc tout d'abord un travail sur les objets et sur les relations entre ceux-ci. Mais les suites sont également un outil essentiel dans certaines élaborations théoriques, ce qui semble être un aspect peu développé au lycée. Voici quelques exemples fréquemment travaillés dans les parcours scientifiques selon les universités :

- la construction de l'ensemble des réels par approximations décimales et/ou par les suites de Cauchy) et la notion de complétude ;
- l'utilisation et la construction de suites génériques pour :
  - produire des propriétés caractéristiques (densité – adhérence – limites – continuité)
  - établir des théorèmes d'existence (par exemple : Borne sup – Théorème des valeurs intermédiaires)
  - construire de nouvelles notions (Intégrale de Riemann) (N.B. en utilisant l'axiome du choix)

Nous choisissons de traiter trois exemples de manière approfondie pour illustrer où et comment les suites sont utilisées à l'université.

Théorème des valeurs intermédiaires : rédaction d'une démonstration
Énoncé
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $f(\xi) = 0$.
Démonstration 1
Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Sinon, il suffit de considérer $-f$.
Posons $\xi = supE$ ou $E = \{x \in [a, b] \ ; \ f(x) \leq 0\}$. On a $\xi \in [a, b]$. En effet, d'une part $a \in E$ et donc $\xi \geq a$ par définition de la borne supérieure. D'autre part, b est un majorant de E et donc $\xi \leq b$. Montrons que $f(\xi) = 0$.
Par définition de borne supérieure, nous savons qu'il existe une suite $(x_n) \subseteq E$ telle que $x_n \to \xi$. Grâce à la continuité de f, nous avons donc que $f(x_n) \to f(\xi)$. Comme $f(x_n) \leq 0$ par passage à la limite $f(\xi) \leq 0$.
Considérons maintenant la suite (y_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \xi + \dfrac{1}{n}$. Il est clair que $\xi \neq b$ car $f(b) > 0$. Comme $y_n \to \xi$, il existe $n^* \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n^*$, $y_n < b$. Dès lors, nous pouvons affirmer que $\forall n \geq n^*$, $y_n \notin E$. Donc $f(y_n) > 0$. En passant à la limite dans cette dernière inégalité et en utilisant la continuité de f, nous avons $f(\xi) \geq 0$.
Nous avons donc montré que ξ est une racine de la fonction f.

Démonstration 2 (issue du poly donné en L1 pour le cours d'analyse donné à l'UMONS, Belgique)
Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Sinon, il suffit de considérer $-f$.
Considérons l'algorithme suivant qui définit de manière récursive trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- Pas initial : $a_0 = a$, $b_0 = b$.
- Pas récursif : si on connait a_n et b_n, on définit a_{n+1} et b_{n+1} de la manière suivante : Posons $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
  - ⋆ Si $f(x_n) < 0$, alors $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$;
  - ⋆ Si $f(x_n) > 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$;
  - ⋆ Si $f(x_n) = 0$, alors on s'arrête.

Pour la suite de la preuve, nous pouvons considérer que pour tout n, $f(x_n) \neq 0$. Sinon, on prend pour ξ le premier x_n qui annule la fonction f.
Remarquons que, par construction, la suite (a_n) est croissante et majorée par b ; la suite (b_n) est quant à elle décroissante et minorée par a. Nous pouvons donc en déduire que (a_n) converge vers un réel a^* et converge (b_n) vers un réel b^*.
On a, de plus, $|b_n - a_n| = \dfrac{1}{2^n}|b_0 - a_0|$ qui tend vers 0. Nous en déduisons que $a^* = b^*$.
Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) > 0$ nous obtenons, par passage à la limite et en utilisant la continuité de la fonction f, que $f(a^*) \leq 0$ et $f(a^*) \geq 0$.
En conclusion, a^* est une racine de la fonction f.

Les suites pour caractériser des nouvelles notions
L'étude de la convergence pose implicitement des questions liées à la structure des ensembles de valeurs prises par la suite et à la position des points dans ces ensembles. Par exemple, les limites sur les inégalités montrent que l'ensemble des limites des suites convergentes dans l'intervalle $]a, b[$ est l'intervalle $[a, b]$. Les réels a et b occupent une position particulière dans l'ensemble puisqu'il s'agit de points adhérents à l'ensemble. D'où la question de savoir comment définir de manière générale la notion de point adhérent et donc celle de bord ou frontière d'un ensemble. Un autre exemple concerne ce qui est au cœur de la notion de convergence, son sens : il est possible, en allant suffisamment loin dans la suite, de trouver des éléments aussi proches qu'on veut de l. Ceci n'est évidemment pas suffisant pour définir la convergence mais cette conception sera reprise pour définir la notion de densité.
Ainsi, les suites et la notion de proximité vont permettre d'aborder des questions de nature topologique et seront l'outil choisi pour définir les nouvelles notions tout en variant les formulations choisies pour caractériser ces notions. Cette démarche est fréquemment mise en œuvre dans l'enseignement universitaire. Cela témoigne selon nous du fait que l'enseignement amorcé au lycée a une continuité jusqu'en L1 ou en L2. Dans son travail de thèse, Bridoux [21] a travaillé sur l'évolution des formulations permettant de définir des notions de topologie en partant de la notion de boule pour évoluer vers la notion de suite. Les notions visées étaient celles de point adhérent (respectivement point intérieur), d'adhérence d'un ensemble (respectivement d'intérieur d'une ensemble) et d'ensemble fermé (respectivement d'ensemble ouvert). Ces notions de topologie sont difficiles à introduire car elles généralisent des notions rencontrées par les étudiants au lycée (les notions d'intervalles ouverts/fermés notamment) en utilisant un formalisme qui permet d'unifier ces notions autour d'une même caractérisation. Robert [99] explique bien toute la difficulté de trouver

un problème initial pour introduire ce type de notion, appelée notion FUG (notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice). Il est en effet difficile de donner un problème accessible aux étudiants où ils pourraient faire fonctionner seuls la nouvelle notion pour répondre à la question. Pour introduire ces notions, Bridoux [21] joue sur certains leviers pour amener les étudiants à donner du sens aux notions de topologie en les introduisant à partir d'un questionnement mathématique naturel et justifié.
L'un d'eux concerne le vocabulaire utilisé. Par exemple, le mot « adhérent » est utilisé par les étudiants dans le langage courant. D'autre part, l'espace de référence dans lequel les étudiants ont particulièrement l'habitude de travailler est le plan $\mathbb{R}^2$. Ces habitudes langagières et géométriques ont servi de point d'appui pour introduire les nouvelles notions. Ainsi, les quatre formulations suivantes sont données aux étudiants pour caractériser le fait qu'un point p est adhérent à un ensemble A. Elles s'appuient sur la notion de boule de manière à solliciter leur intuition visuelle. Les étudiants sont également amenés à travailler sur des dessins pour guider leur choix :
— A contient une boule ouverte de centre p ;
— A contient toutes les boules ouvertes de centre p ;
— Toutes les boules ouvertes de centre p ont avec A une intersection non vide ;
— Il y a une boule ouverte de centre p qui a avec A une intersection non vide.

Cette première activité permet de faire émerger la représentation suivante : un point p est adhérent à l'ensemble A si toute boule de centre p rencontre A. Cette première caractérisation est traduite en langage symbolique :
$\forall r > 0, \mathcal{B}(p, r) \cap A \neq \emptyset$; où $\mathcal{B}(p, r)$ désigne la boule ouverte de centre p et de rayon r. Il s'agit de l'ensemble des points tels que leur distance par rapport à p est strictement inférieure à r.
Il devient alors naturel de considérer l'ensemble des points adhérents à un ensemble pour ensuite s'intéresser aux ensembles qui coïncident avec leur adhérence.
Nous revenons alors à la question des formulations. Avec l'idée que toute boule de centre p rencontre l'ensemble A, il est en particulier possible de considérer les boules de rayon $\varepsilon = \frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Le fait que chaque boule de centre p et de rayon $\frac{1}{n}$ a, avec A une intersection non vide se traduit par : il existe $x_n \in \mathcal{B}(p, \frac{1}{n})$ et $x_n \in A$. Nous avons donc construit une suite d'éléments de A qui converge vers p. L'équivalence suivante peut alors être démontrée : le point p est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite (x_n) de A qui converge vers p. L'adhérence de A peut alors être caractérisée par l'ensemble des limites des suites d'éléments de A.
De manière générale, dans les exercices, les étudiants devront à certains moments choisir avec quelle caractérisation ils travaillent. Par exemple, il est facile de montrer que l'ensemble $\{\frac{1}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas fermé en travaillant avec les suites. En effet, 0 est un point adhérent à l'ensemble puisque la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 mais 0 n'appartient pas à l'ensemble $\{\frac{1}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

La topologie illustre également un autre besoin dans l'enseignement des mathématiques universitaires : le besoin de formaliser, que ce soit pour définir ou pour démontrer des résultats. Or il s'agit bien d'une difficulté fréquemment évoquée dans le contexte de la transition lycée-université [46]. Les étudiants ne ressentent pas le besoin de justifier, d'être rigoureux et d'utiliser un formalisme approprié pour résoudre des exercices. Etre capable d'expliquer les différentes représentations contribue cependant au sens donné aux notions, même si le processus de formalisation ne représente qu'une part de la conceptualisation. Mais il y a là un obstacle à dépasser pour l'enseignant et les étudiants. Ce n'est pas le seul. D'autres obstacles sont évoqués au point suivant.

5.4 Des obstacles récurrents et des ingénieries pour tenter de les surmonter

Nous avons précédemment évoqué la réduction monotone pour la convergence. Nombreux sont les étudiants qui pensent que seules les suites croissantes et majorées (ou décroissantes et minorées) convergent vers un nombre réel. En ce qui concerne la divergence vers l'infini, la conception analogue qui consiste à penser que toute suite croissante diverge vers l'infini apparaît souvent. D'autres conceptions liées au comportement des termes des suites convergentes sont également fréquemment observées dans les copies des étudiants. Par exemple, toute suite croissante majorée par m converge vers m. Beaucoup d'étudiants pensent que toute suite convergente atteint forcément sa limite ou a contrario que la limite n'est jamais atteinte. On pourrait aussi ajouter la difficulté de représenter graphiquement une suite : beaucoup d'étudiants représentent une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en reliant les points.

Selon nous, le développement de ces conceptions erronées trouve notamment son origine dans le répertoire d'exemples présentés aux étudiants depuis le chapitre sur les suites étudiés au lycée jusqu'à l'étude formelle de la convergence à l'université, en cours magistral et en TD. La production d'exemples et de non exemples associés à une définition est une tâche souvent peu travaillée. Ouvrier-Buffet dans [88] a néanmoins montré la richesse de ce type d'activité tant pour travailler sur le sens des notions que sur la production de justifications.

De nombreux chercheurs en didactique ont étudié ces obstacles en intégrant souvent dans leur travail une composante historique et/ou épistémologique pour retourner à la genèse et au développement des notions pour mieux comprendre les difficultés et les problèmes qui ont permis de les introduire. La prise en compte des spécificités des notions en relation avec l'enseignement actuel associée à un questionnement de nature épistémologique a permis d'élaborer des ingénieries visant à surmonter certains obstacles précédemment recensés ou encore pour introduire la définition formelle de limite en relation avec une gestion de la classe adaptée. Des exemples sont étudiés dans la partie 3.

5.5 Conclusion

Cette étude sur l'enseignement des suites montre, selon nous, à quel point le travail sur un même objet peut être différent dans les deux institutions que sont le lycée et l'université. Surtout travaillées en tant qu'objet au lycée avec un accent mis sur les aspects calculatoires, les suites sont dans un premier temps en L1 un objet beaucoup plus formalisé qu'au lycée et deviennent petit à petit un outil de démonstration et de caractérisation de nouveaux objets. Ce travail permet donc également de préciser, pour l'enseignement des suites, certaines difficultés des étudiants dans le contexte de la transition secondaire-supérieur.

Deuxième partie

Exemples d'usage en physique

[**Contribution de Cécile de Hosson, Nicolas Décamp, Nathalie Lebrun** [12]]

L'idée de cette partie est de présenter à travers quelques exemples, différents sens que peut prendre le terme « limite » lorsqu'il est utilisé par le physicien. Sens qui n'est pas forcement le sens que veut y voir l'enseignant de mathématiques. Nous vous proposons des exemples qui illustrent au mieux cette différence de points de vue.

12. Laboratoire de didactique André Revuz (EA 4434)

1 Limite d'un modèle

Dans les exemples qui suivent, la notion de « limite » est discutée au regard des modèles usuellement choisis dans le cadre de l'enseignement pour travailler telle ou telle situation du monde physique. On montre que dans les deux cas, les limites du modèle sont souvent implicites, ce qui n'est pas sans poser un certain nombre de difficultés (notamment lorsqu'un même système d'objets est examiné à des échelles différentes (cas de l'alternance des journées et des nuits, des éclipses, de la diffraction), ou lorsque le modèle « mathématique » porte l'évolution du système au-delà de son évolution effective dans le monde « physique » (cas du rebond des balles).

1.1 Le rebond (vertical) d'une balle : limite dans le comptage

La notion de « limite » est mobilisée dans un exemple classique de l'enseignement de la mécanique newtonienne (partie : conservation de l'énergie mécanique) : le rebond des balles.

On fait rebondir une bille d'acier lâchée sans vitesse initiale depuis une hauteur h_0, sur une plaque d'acier. Les frottements sont négligés tout au long du mouvement de la bille. La bille subit un grand nombre de rebonds successifs jusqu'à ce qu'elle s'immobilise. L'objectif est de déterminer la distance totale verticale parcourue D et le temps T écoulé jusqu'à l'immobilisation. On peut faire le calcul pour le rebond d'une bille d'acier tombant de 1 mètre sur de l'acier ($k = 0,9$).

Pour répondre à cette question, il suffit de savoir que la grandeur k représente le coefficient de restitution de la bille d'acier, c'est-à-dire, la capacité de la bille à rebondir sur une surface dont le matériau est identique à celui de la bille.
Mathématiquement, k est telle que $v_1 = kv_0$ avec v_0 vitesse de la bille juste avant le premier rebond et v_1 vitesse de la bille juste après le premier rebond. Ce rapport entre la vitesse avant le rebond et après le rebond est identique pendant toute la durée du mouvement de la bille, d'où $v_{n+1} = kv_n$, ce qui, du point de vue des distances d parcourues avant et après un rebond revient à écrire $d_1 = k^2 d_0$. En effet, d'après la loi de conservation de l'énergie mécanique appliquée pendant l'un des rebonds de la bille, $E_c(\text{au sommet}) + E_p(\text{au sommet}) = E_c(\text{au sol}) + E_p(\text{au sol})$ or $E_c(\text{au sommet}) = 0$ d'où $E_p(\text{au sommet}) - E_p(\text{au sol}) = E_c(\text{au sol})$ donc $mgd = \frac{1}{2}mv^2$ soit $d = \frac{v^2}{2g}$.
Pour la distance $D(n)$ parcourue après n rebonds (précisément juste avant le $n+1$ème rebond) on a donc :

$$D(n) = d_0 + 2d_1 + 2d_2 + ... + 2d_n$$

d'où

$$D(n) = d_0 + \sum_{i=1}^{n} 2d_i = d_0 + 2d_1 \sum_{i=0}^{n-1} k^{2i}$$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison k^2 et de premier terme d_1 telle que

$$D(n) = d_0 + 2d_1 \frac{1-k^{2n}}{1-k^2} = d_0 + 2d_0 k^2 \frac{1-k^{2n}}{1-k^2}$$

Or, $0 < k < 1$ donc k^{2n} tend vers 0 ; d'où $D = 9,57m$

On peut procéder de la même manière pour la durée T totale parcourue par la bille pendant le mouvement, sachant que $t_1 = kt_0$ (puisque d'après le principe de conservation de l'énergie mécanique $v = gt$. On a donc

$$T = t_0 + 2t_1 + 2t_2 + ... + 2t_n$$

D'où

$$T = t_0 + \sum_{t=1}^{n} 2t_n$$

$$T = t_0 + 2t_1 \frac{1-k^n}{1-k} = 8,45s$$

Ce qui est remarquable ici, c'est que l'on fait tendre n vers l'infini et qu'on trouve une valeur finie de D et de T alors même que physiquement le nombre n de rebond est fini (à partir du moment où d_n devient du même ordre de grandeur que les déformations de la balle, parler de rebond n'a plus grand sens).

1.2 Optique géométrique : limite dans l'espace

Dans les exemples qui suivent, on examine deux explications schématiques permettant de rendre compte de :
— La raison pour laquelle il fait jour à Paris pendant qu'il fait nuit à Sydney ;
— La raison pour laquelle en 1999 l'éclipse était totale à Strasbourg et partielle à Marseille.

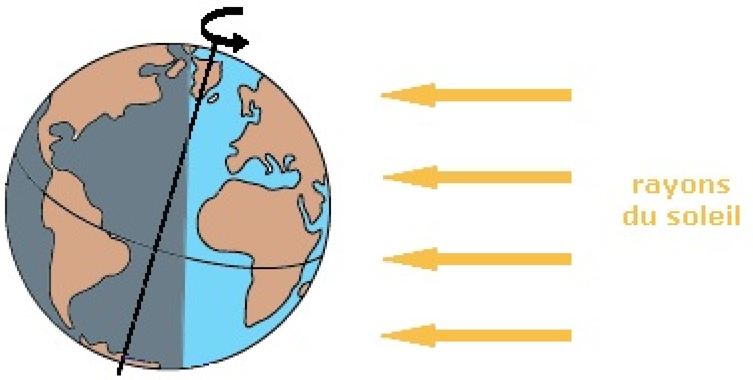


FIGURE 1 – Explication schématique du phénomène d'alternance des journées et des nuits

Dans la plupart des illustrations scolaires, deux types de géométrisation de la propagation de la lumière du Soleil sont mobilisés. Le choix de représenter des rayons parallèles dans le premier cas (voir figure 1) [13] est justifié par le fait que le soleil est lointain, et que les rayons qui en proviennent peuvent être considérés comme quasi-parallèles. Cependant il n'est pas infiniment lointain. Représenter les rayons comme parfaitement parallèles est donc une approximation : on se place dans la situation limite alors qu'elle n'est pas réellement atteinte.

13. http ://www.maxicours.cm/se/fiche/1/2/119921.hyml/e2

Ce choix est remis en cause dans la deuxième situation, où on fait apparaître un cône d'ombre, et des rayons qui ne sont plus parallèles car la modélisation proposée dans le cas 1 n'est plus suffisante pour rendre compte de la situation (voir figure 2) [14]. Le choix de considérer la limite comme atteinte dépend donc de la situation... L'affaire se corse

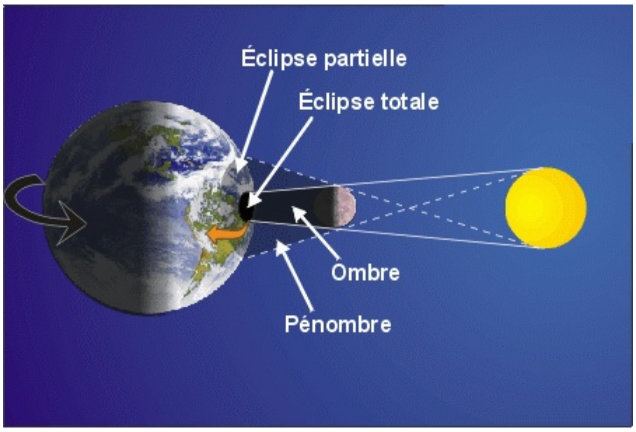


FIGURE 2 – Explication schématique du phénomène d'éclipse totale et partielle

dans le cas représenté sur l'œil …Les points A et B sont tous les deux « à l'infini ». Les rayons qu'ils envoient sont pour chacun d'entre-eux parallèles. Mais les rayons provenant de A ne sont pas parallèles avec les rayons provenant de B, ce qui sous-entend que AB est non seulement à l'infini mais est également un objet infiniment grand... Ce cas des rayons « parallèles » provenant d'objets situés « à l'infini » se retrouve de manière récurrente en optique géométrique (voir figure 3) [15]. Bien sûr les objets ne sont jamais à l'infini et les rayons ne sont jamais strictement parallèles. Dans notre cas, il faut différencier le fait que la taille de la pupille est suffisamment petite par rapport à la distance entre l'œil et l'objet pour que les rayons provenant d'un point de l'objet soient tous considérés comme parallèle, alors que la taille de l'objet n'est pas négligeable devant la distance œil objet ce qui justifie que différents points de l'objet envoient des rayons qu'on considère non-parallèles à leur arrivée dans l'œil.

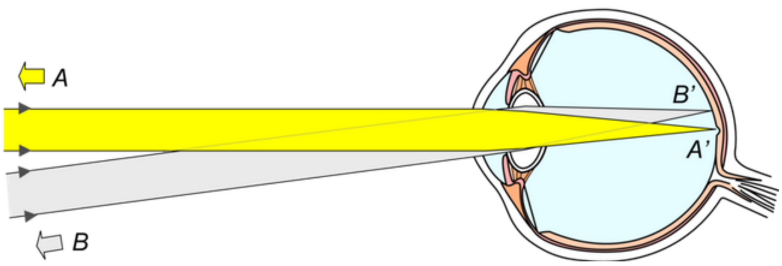


FIGURE 3 – Exemple classique d'explication schématique de la formation d'un point image d'un objet situé « à l'infini »

14. http ://www.san.asso.fr/naguere/eclipse/ecl_meca.php.
Le soleil est représenté plus petit que la Terre sur ce schéma, ce qui n'est bien sûr pas le cas. Notons au passage qu'il serait impossible de réaliser un schéma à l'échelle sur une feuille A4, car le rapport des distances en jeu : 150 millions de km (distance terre soleil) et 1 737km (rayon lunaire) est de l'ordre de 10^5.
15. http ://www.afblum.be/bioafb/oeil/oeil.htm

Toujours dans le rapport entre limite et modèle, si l'on s'intéresse non plus à l'infiniment grand mais à l'infiniment petit, apparaît une autre limite, celle de l'optique géométrique elle-même. Par exemple, le modèle du « rayon lumineux » (ligne droite) n'est plus utilisé lorsque que l'on considère de la lumière passant à travers une fente ou un trou tel que $\sin\theta \simeq \dfrac{\lambda}{a}$ avec λ longueur de l'onde pour la lumière considérée (voir figure 4) [16].

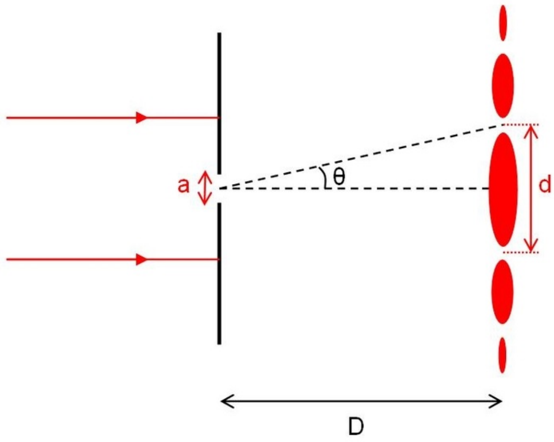


FIGURE 4 – Diffraction par un trou

2 Limite : borne à ne pas dépasser

En physique, on mobilise également l'idée de limite en tant que borne à ne pas dépasser.

2.1 Réfraction : limite d'angle

Par exemple, d'après la seconde loi de Snell/Descartes, il existe un angle pour lequel lorsque la lumière atteint un dioptre (transparent) alors la lumière n'est plus réfractée mais totalement réfléchie (voir figure 5) [17].

16. http ://www.assistancescolaire.com/eleve/TS/physique-chimie/reviser-le-cours/proprietes-des-ondes-t_pch04
17. http ://www.editions-petiteelisabeth.fr/calculs_optique_3.php

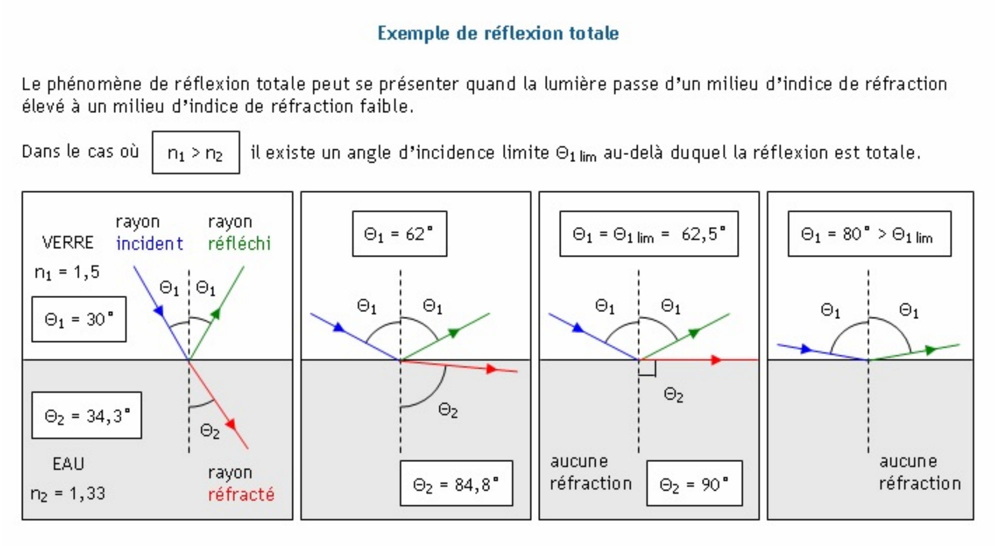


FIGURE 5 – Illustration de la notion d'angle limite

2.2 Chute avec frottements : limite dans le temps

La notion de limite est également mobilisée dans le cas de l'étude de la chute d'une bille dans un fluide (voir figure 6) [18]. Dans cette situation, les frottements ne sont plus négligés et un bilan des forces exercées sur la bille pendant sa chute conduit à l'expression (ie : 2e loi de Newton) :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

avec $\vec{P}$ vecteur poids (force de la Terre sur la bille), $\vec{F}$ vecteur poussée d'Archimède (résultante des forces de pression exercées par le fluide sur la bille), $\vec{f}$ vecteur force de frottement (exercée par le fluide sur la bille) et $\vec{a}$ vecteur accélération de la bille lors de sa chute dans le fluide tel que $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$.

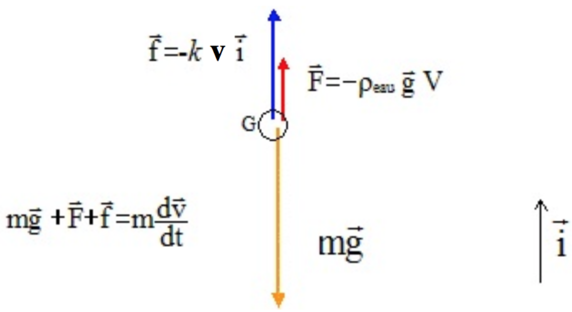


FIGURE 6 – Chute d'une bille dans un fluide

En général, cette situation est utilisée pour faire calculer aux étudiants la vitesse dite « limite » de la bille, c'est-à-dire, la vitesse maximale atteinte (ie : la vitesse pour $\vec{a} = \vec{0}$

18. http ://www.chimix.com/an7/prem/euler1.htm

ou encore, la vitesse pour $\vec{P}+\vec{F}+\vec{f}=\vec{0}$). En remplaçant chaque force par son expression on trouve :

$$v_{limite} = \frac{m-\rho V}{k} g$$

Avec m masse de la bille, ρ masse volumique du fluide, V volume de la bille, k coefficient de frottement (lié notamment à la viscosité du fluide) et g constante de gravité.

Ce qui est intéressant ici c'est que cette grandeur v_{limite} peut être obtenue en résolvant l'équation différentielle en $v(t)$ que l'on obtient en appliquant la 2e loi de Newton. On a alors :

$$v(t) = v_{limite}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

où τ est appelé temps caractéristique : il s'agit de l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que la vitesse limite soit « atteinte » (voir figure 7)[19]. Ce temps est obtenu en regardant l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à l'origine à $v = f(t)$ et l'asymptote $v = v_{limite}$.

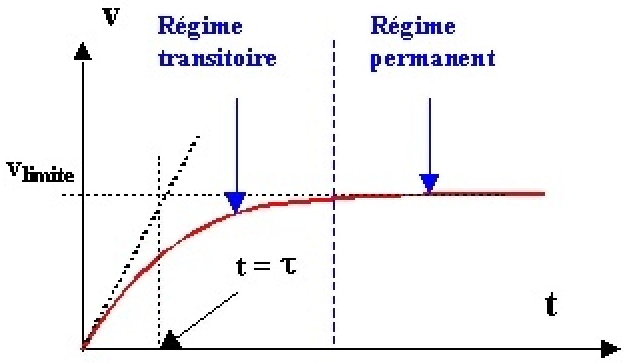


FIGURE 7 – Graphique représentant $v = f(t)$ lors de la chute d'une bille dans un fluide

Dans ce cas, la vitesse limite est à la fois la vitesse qu'on ne dépasse pas en chute libre (sauf si on part avec une vitesse initiale supérieure à limite) et la vitesse vers laquelle on tend quand on fait une chute infiniment longue. Ces deux aspects se retrouvent dans la manière de résoudre le problème :

— soit on se place comme si on était à l'équilibre,

— soit on résout l'équation différentielle et on tombe sur une exponentielle.

Bien sûr, mathématiquement, encore une fois ces deux solutions sont théoriquement « disjointes » : soit on est à v_{limite} et on n'en bouge pas, soit on ne l'atteint jamais. Le physicien se satisfait d'une solution approximative, il parle de régime transitoire puis de régime permanent, fixe même très arbitrairement un moment au passage de l'un à l'autre (au bout de quelques temps caractéristiques).

2.3 Charge d'un condensateur : limite dans le temps

Il s'agit d'un autre exemple classique d'équation différentielle linéaire du premier ordre, avec régime transitoire et régime permanent (à noter : il n'y a plus d'électrocinétique au

19. http ://thierry.col2.free.fr/restreint/exovideo_lycee/resum/10_chute_verticale.html

lycée à l'heure actuelle).

Comme dans l'exemple précédent (chute libre), il y a ambigüité sur le terme « limite ». Dans cet exemple de la charge du condensateur, du point de vue mathématique, la grandeur étudiée (charge, tension ou intensité) n'atteint jamais sa valeur limite (c'est une asymptote) alors que pour le physicien, tout est affaire de modélisation et de mesure. Un modèle de type « régime stationnaire » dans lequel l'asymptote est considérée comme atteinte et où la grandeur étudiée ne varie plus sera considéré comme satisfaisant s'il est compatible avec les mesures (ce qui au passage nécessite un traitement rigoureux des incertitudes).

3 Implicites et confusions

Qu'il s'agisse des limites d'un modèle, d'une limite au sens de « borne » ou du sens classique de limite en mathématiques (suites ou fonctions), le physicien est rarement explicite dans ses expressions ou notations. Ainsi, en ce que concerne les limites d'un modèle, une fois le modèle défini, on travaille dans le cadre de ce modèle et on passe souvent les approximations faites au prélable. On a ainsi aussi facilement tendance à dire que « des rayons provenant de l'infini sont parallèles » (plutôt que « quasi-parallèle ») ou qu'un « référentiel est galiléen » (plutôt que « pouvant être considéré comme galiléen ») par raccourci.
Les notations des physiciens entretiennent ce caractère implicite du passage à la limite : on remarquera que l'expression « lim » (au sens classique des mathématiciens) apparaît bien peu :

— vitesse instantanée $\frac{dx}{dt}$ au lieu de $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$
— variation de charge $\frac{dq}{dt}$ au lieu de $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$
— énergie potentielle $E_p(\infty) = 0$ au lieu de $\lim_{x \to +\infty} E_p(x) = 0$
— vitesse limite $v_{limite} = \frac{m - \rho V}{k} g$ ou $\lim_{t \to +\infty} v(t) = v_{limite}$

Les différentes acceptions du terme se recouvrent parfois partiellement (comme dans le cas du rebond ou dans celui de la chute avec frottement) ce qui contribue à la confusion autour de ce terme.
Terminons par citer deux domaines où les physiciens utilisent de façon cachée les procédures de passage à la limite :

— Dans la mesure des grandeurs, qui utilise les nombres réels, donc des passages à la limite, et surtout la procédure intégrale, qui est fondamentalement un passage à la limite assez délicat. À ce propos, on peut consulter [43], [109] et [107].
— Dans la procédure de l'accroissement différentiel qui sert beaucoup pour modéliser des phénomènes physiques au moyen d'équations différentielles. À ce propos, on peut consulter [86], [3] et [127].

Troisième partie
Éléments pour faire autrement

Introduction

Dans cette partie nous proposons de mettre en avant d'autres approches, au travers quatre thèmes.

— Une étude de deux ingénieries actualisées et testées avec nos étudiants d'aujourd'hui.
— L'exemple du flocon de von Koch et ce qu'il peut apporter à des activités autour de la convergence.
— Une motivation possible de l'introduction formelle de la notion de limite.
— Un type de discours possible à tenir auprès des étudiants, avec des exemples d'activités, autour de la méthode du raisonnement à ε près.

Dans les deux premières sections nous reprenons la communication faite en 2015 pour l'Espace Mathématique Francophone [62], qui introduit les deux ingénieries. Nous y décrivons et argumentons l'adaptation, pour un public d'étudiants actuels de première année de licence ou de niveau équivalent en sciences, de deux ingénieries didactiques développées au début des années quatre-vingt en France.
Il faut penser ingénieries dans le sens de déroulement de séquences auprès des étudiants. La première [98] vise à favoriser l'entrée des étudiants dans un point de vue conceptuel sur l'analyse à partir d'un travail sur les suites ; la seconde [103] vise à motiver et à introduire la définition formelle quantifiée de limite de fonction. Le projet de la reprise, en l'adaptant, d'une ingénierie didactique destinée à un public d'un autre temps (ici au début des années quatre-vingt) pose nécessairement question. Ces reprises sont sous-tendues dans les deux cas par un constat et une hypothèse.

Le constat est que les difficultés rencontrées en début d'université sur la compréhension et la formalisation du concept de limite sont toujours d'actualité, ceci étant bien documenté dans la littérature (voir par exemple [17] [58] [113]) et corroborée par les observations naturalistes des enseignants des premières années d'université. Au sein de la commission Inter IREM Université nous faisons l'hypothèse que malgré ces difficultés récurrentes, on ne peut pas faire l'impasse sur la question de la formalisation, car celle-ci est nécessaire pour une conceptualisation adéquate des concepts de l'analyse et en premier lieu du concept de limite.

On oppose souvent formalisme et signification dans la mesure où la mise en place d'un formalisme opératoire permet un traitement syntaxique des preuves. Néanmoins, dans l'activité mathématique, le contrôle sémantique sur les écritures manipulées joue un rôle essentiel, ceci étant une différence décisive entre novices et experts (Durand-Guerrier et Arsac 2003). En particulier, alors que la langue naturelle est par essence porteuse d'ambiguïté, dans la perspective sémantique initiée par Frege, le langage formel vise à lever ces ambiguïtés, et de ce point de vue, formaliser, c'est choisir une interprétation [51].

Dans le cas de la notion de limite de suite par exemple, nous pouvons l'illustrer en considérant la traduction formelle d'une définition informelle souvent donnée oralement :

« la suite u converge vers un réel a en $+\infty$ si et seulement si on peut s'approcher de a aussi près que l'on veut à condition d'aller assez loin ».

Pour formaliser un tel énoncé, il faut pouvoir :
- d'une part traduire ce que signifie : « s'approcher de aussi près que l'on veut », ce qui correspond dans le cas qui nous intéresse à définir une distance entre deux réels, ici la valeur absolue, et traduire qu'on peut la rendre inférieure à n'importe quel nombre réel strictement positif fixé à l'avance,
- d'autre part traduire ce que signifie l'expression « à condition d'aller assez loin ».

La formalisation de ce deuxième point s'appuie sur le fait que l'ensemble des entiers naturels est non borné (on peut considérer des entiers aussi grands que l'on veut).
Ceci fait, il reste deux interprétations possibles :

1. étant donné un réel strictement positif ε, pour tout entier N on peut trouver un entier n supérieur à N tel que la distance entre le terme de la suite de rang n et le réel a soit inférieure à ε ; formellement :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \ \exists n \geq N \quad |u_n - a| < \varepsilon$$

2. étant donné un réel strictement positif ε, on peut trouver un entier N tel que quel que soit l'entier naturel n supérieur à N, la distance entre le terme de la suite de rang et le réel soit inférieure à ε ; formellement :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad |u_n - a| < \varepsilon$$

.

La première correspond à l'idée de valeur d'adhérence, la deuxième, que nous retenons ici, à la définition de la limite. On retrouvera ces deux aspects développés dans le paragraphe 4 de cette partie.
Dans ce qui suit, nous expliquons ce que nous avons gardé de ces deux ingénieries et nous insistons sur les choix d'adaptations qui nous semblent nécessaires afin de pouvoir les expérimenter auprès de nos étudiants de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences.

1 La limite d'une suite : reprise et adaptation de l'ingénierie de Robert

1.1 Motivations

À partir du dépouillement de copies d'environ 1200 étudiants en début de parcours universitaire, Robert, dans [98], a mis en évidence des régularités sur l'acquisition de la notion de convergence. Elle avait notamment repéré chez les étudiants deux types de représentation de la notion. Les représentations dynamiques sont des représentations en termes d'action où converger est exprimé en termes de « se rapprocher de ». Les représentations statiques sont des représentations en langue naturelle de la définition formalisée. Or, Robert a montré que les étudiants chez qui le modèle statique était présent réussissaient mieux les exercices portant sur la notion de convergence. Des représentations erronées où converger est assimilé à être « monotone borné » étaient également présentes et menaient au même constat.
Un pré-test visant à étudier les acquis des étudiants (manipulation d'inégalités, ordre sur les réels, la valeur absolue, ...) révélait aussi leurs difficultés à donner du sens à des phrases formalisées et à tenir compte de l'ordre des quantificateurs. Cet obstacle du formalisme continue d'être évoqué dans les travaux qui se situent à la transition secondaire-supérieur [48], [65] et [64].
Enfin, l'enseignement au lycée, en Belgique et en France au moins, met l'accent sur l'algèbre des limites ; les exercices proposés aux élèves restent souvent de nature calculatoire. A l'université en revanche, la définition en (ε, N) devient un outil de démonstration et la notion de limite amène également un nouveau point de vue sur l'égalité entre deux nombres réels. [20] Il y a donc un saut conceptuel important à franchir par les étudiants pour accepter la nécessité de la définition formalisée de la convergence.

1.2 Description de l'ingénierie

L'ingénierie comporte deux séquences. Nous n'abordons ici que la première [21]. Elle démarre avec les trois questions suivantes :

I- Représenter graphiquement les suites de terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{n^2-25}{2n^2+1}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 2 cm).*
2. $u_n = (-1)^n$
3. $u_n = \dfrac{1}{n}\cos n$ *attention, sur les calculettes, n en radians*
4. $u_n = \cos n$
5. $u_1 = 2$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = -1$, *pour tout* $n \geq 5$, $u_n = 2$
6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10 cm).*
7. $u_n = \cos n\dfrac{\pi}{6}$
8. $u_n = \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10 cm).*

20. $\big(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2(\text{ou } \mathbb{Q}^2),\ \forall \varepsilon > 0,\ |a-b| < \varepsilon \Longrightarrow a = b\big)$. Cette propriété peut par exemple être utilisée pour démontrer l'unicité de la limite d'une suite. Voir aussi dans le III-5-2.
21. Les deux séquences sont présentées dans [98].

9. $u_n = n^2 + 1$

10. $u_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$ *(* $n \geq 2$*)*

II- Pouvez-vous classer ces dessins ? Rédigez rapidement les critères permettant vos classements.

III- Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre l *et un entier* n *à partir duquel* $|u_n - l|$ *reste inférieur à* $\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{100}\right)$ *? Mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.*

Nous avons choisi de conserver le travail papier-crayon pour la première question en ajoutant un choix d'échelle pour chaque suite et en demandant préalablement de réaliser un tableau de valeurs permettant de calculer les dix premiers termes de chaque suite. Nous faisons l'hypothèse que ce travail peut amorcer une réflexion sur des comportements plus globaux tels que la croissance, le caractère borné ou non des suites et sur leur convergence. Nous avons remplacé la deuxième suite par la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{20}\right)$. Ce choix sera motivé à la troisième question.
Si les notions de croissance et de suite majorée/minorée/bornée ont déjà été travaillées dans le cours, la question II peut être conservée telle quelle. D'autres alternatives seront développées plus loin dans le texte.
Ce travail graphique et les classements établis en petits groupes par les étudiants servent alors d'appui pour introduire, à la troisième question, une formulation « numérique » de la définition en (ε, N). Nous avons choisi ici de remplacer l'inégalité avec valeur absolue par la double inégalité $l - \dfrac{1}{10} \leq u_n \leq l + \dfrac{1}{10}$. Celle-ci peut selon nous être un levier pour faire émerger plus facilement une interprétation géométrique en termes de bande autour de la limite l. Les dessins permettent de répondre pour $\dfrac{1}{10}$ mais pas pour $\dfrac{1}{100}$. La suite 2 que nous avons modifiée vérifie les inégalités avec $\dfrac{1}{10}$ mais pas avec $\dfrac{1}{100}$, alors qu'elle ne converge pas.

La question suivante est alors ensuite proposée aux étudiants.

IV- Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier vos réponses par écrit.

i) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 *est décroissante à partir d'un certain rang.*

ii) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

La suite 10 est un contre-exemple pour la première affirmation. Pour la deuxième affirmation, nous faisons l'hypothèse que la première représentation développée à la question III permet aux étudiants de conjecturer le résultat mais pas de le démontrer car il manque une définition de la convergence. C'est à ce moment que la définition formalisée est introduite par l'enseignant.

Sur le plan mathématique, nous n'avons donc apporté que très peu de modifications à l'ingénierie initiale. Une expérimentation de l'ingénierie auprès d'étudiants universitaires donnant notamment des précisions sur le rôle de l'enseignant à chacune de ses étapes est présentée dans [22].

1.3 Principaux objectifs de l'ingénierie

L'objectif principal de cette ingénierie est de sensibiliser les étudiants aux enjeux de l'analyse réelle à l'université afin de favoriser une entrée dans le point de vue conceptuel nécessaire pour une appropriation de la notion de limite si l'on ne veut pas se limiter à l'approche intuitive dynamique mentionnée plus haut. Pour cela, il est nécessaire que les étudiants soient capables de mobiliser les différentes manières de traduire l'égalité de deux réels à l'aide des valeurs absolues, des doubles inégalités, des intervalles centrés et des bandes de largeur arbitrairement petite, entre langage naturel, représentation graphique et langage formel. Il s'agit de permettre aux étudiants de s'approprier les outils qui permettent d'approcher le concept de nombre réel, sa continuité (ou sa complétude) au sens de Dedekind, qui suivant Sinaceur, réduit la continuité de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels à l'ordre [134]. Ceci motivant l'introduction d'une définition formelle puisqu'en effet, les représentations graphiques ne permettent pas de distinguer entre la droite rationnelle ou décimale et la droite réelle. Un autre objectif important est de questionner un certain nombre de théorèmes en acte [135] que l'on observe fréquemment chez les étudiants tels que par exemple :« Toute suite strictement croissante diverge vers $+\infty$ », ou « toute suite convergente est monotone à partir d'un certain rang », en proposant aux étudiants un « herbier » de suites leur permettant d'identifier que certaines suites strictement croissantes divergent tandis que d'autres convergent, et que certaines suites convergentes sont monotones, et d'autres non.

1.4 Des prolongements possibles et leurs effets sur les pratiques en classe

La mise en place de l'ingénierie de Robert telle que décrite plus haut présuppose l'existence préalable d'un milieu organisé pour les étudiants (notion de suite majorée/minorée/bornée, croissante, répertoire de suites). Nous sommes conscients que l'énoncé de la question II laisse aux étudiants une variété de réponses possibles et peut dès lors représenter une difficulté de gestion en classe pour l'enseignant. Nous y reviendrons dans le point suivant. Notons cependant que l'ouverture de cette question II permet de faire émerger des critères liés non seulement à la convergence, mais aussi à la croissance des suites considérées. Cela permet donc de travailler également des conceptions erronées (comme par exemple que « seules les suites croissantes majorées sont convergentes »), comme le montre Bridoux dans [22]. A noter qu'une expérimentation sur la convergence des suites est disponible sur INDRUM mars 2016 [22].

Enfin, un prolongement de cette ingénierie pourrait être d'amener les étudiants à réfléchir à une manière opérationnelle d'énoncer le « théorème des gendarmes », en appliquant le principe de la bande définie à ε près : « si une suite est comprise entre deux suites convergentes vers la même limite, alors, à partir d'un certain rang, les termes de cette suite sont compris dans une bande de largeur 2ε autour de cette limite ». Bien entendu, l'idée de bande à ε près peut encore se traduire au moyen d'une double inégalité comme mentionné plus haut.

22. https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016/public/indrum2016proceedings.pdf

1.5 Conclusions et perspectives

L'objectif premier de cette ingénierie est de faire émerger une première représentation de la notion de convergence, en termes de bande. C'est en ce sens qu'il faut comprendre la question III, et non comme un travail algébrique pour justifier les inégalités en jeu (comme un mathématicien pourrait être tenté de le faire). Et la nécessité d'une définition en est ressentie, à la deuxième partie de la question IV, comme un outil (Douady 1986) permettant de démontrer une propriété. Cependant, certains pourraient penser que des étudiants de L1 ne sont pas sensibles à cette manière d'amener la définition. Une alternative qui pourrait leur être proposée, dans la perspective de l'approximation de la limite ([17] et [58]) serait alors d'être explicite dès la formulation de la question II sur le but recherché : étudier le comportement « se rapprocher de ». La nécessité d'une définition de la convergence sera alors ici liée à la discrimination des critères fournis par les étudiants dans l'étude du comportement des suites. Reste encore la question de la mise en œuvre de cette alternative dans la classe : continuation de travail en petits groupes ou instauration d'un débat scientifique en amphi comme étudié dans [78]. Nous avons aussi déjà mentionné, en début de cette partie, que cette ingénierie pourrait également poser les jalons d'une réflexion sur la construction des réels (avec une égalité « à epsilon près »). Cette perspective amène aussi la question de l'approximation qui peut être investie pour introduire la notion de convergence. En effet, une généralisation de la question III formulée en termes d'approche de la limite à « 10^{-n} près » pourrait permettre à l'enseignant d'utiliser l'image d'une bande (autour de la limite) dont la largeur est en relation avec le degré d'approximation que l'on s'est fixé. L'idée sous-jacente qu'il faudrait alors faire émerger est qu'il y a convergence lorsqu'on peut envisager n'importe quel degré d'approximation.

2 La limite d'une fonction : reprise et adaptation de l'ingénierie de Robinet

2.1 Introduction

L'ingénierie construite par A. Robinet [103] dans les années quatre-vingt semblait avoir permis, d'après son auteur, de partir d'une étude qualitative pour conduire les élèves de la classe de Première B (*filière économique et social*) vers une définition formalisée du concept de limite, et d'introduire ensuite des théorèmes généraux. Actuellement au lycée, l'enseignement construit une conception ponctuelle et technique de la limite d'une fonction en un point ou en l'infini, la justification des techniques étant renvoyée à l'intuition. Expliquons cela. Conception ponctuelle, car les seuls moments où le point de vue « local » est présent sont l'introduction et la définition, et ce point de vue est délaissé ensuite au profit de techniques algébriques opératoires, à partir de fonctions de référence et de nombres dérivés donnés (tels que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$).
Le point de vue analytique est absent : les infiniment petits ou infiniment grands, à peine évoqués par des expressions telles que « aussi près que » ou « aussi grand que » ne sont pas travaillés, même si on trouve quelques exercices « alibis ». Conception technique : les manuels proposent un grand nombre de « théorèmes » ou propriétés qui consistent uniquement en une liste de limites prêtes à l'emploi, ou en des règles algébriques sur les limites. Comme ces « théorèmes » ne sont pas démontrés et qu'on renvoie l'élève à l'intuition pour les comprendre (et même les justifier !), la boucle est bouclée. Il manque dans les programmes actuels :

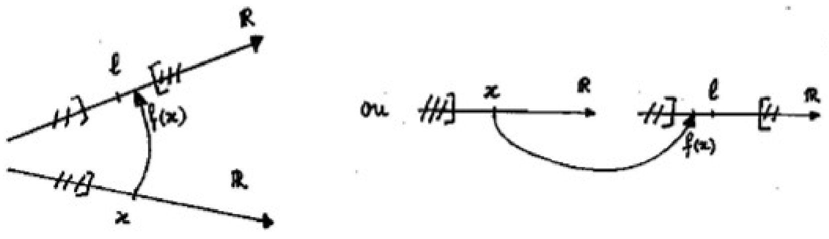
- une approche qualitative du concept de limite de fonction ;
- un travail introductif sur les approximations numériques. Par exemple : que dois-je choisir pour x pour que $f(x)$ soit inférieur en valeur absolue à une puissance de 10 donnée (pour une fonction à limite nulle).
- de vrais problèmes qui mettraient en relation les calculs d'approximation et les représentations des voisinages (par des bandes) dans l'objectif de donner du sens à des expressions comme « être près de » ou « être plus grand que », etc ..., préliminaires à celles dont on se sert pour les limites.

2.2 Description brève de l'ingénierie

Robinet a situé son ingénierie didactique entre deux extrêmes :

- une approche uniquement quantitative, reliant la notion de limite aux phénomènes réels qui peuvent lui donner du sens, mais ne permettant pas d'établir des théorèmes généraux ;
- une approche formalisée qui permet de résoudre des problèmes de limite pour un large ensemble de fonctions (y compris non explicitées), mais risquant de créer des décalages formels (et épistémologiques).

Cette ingénierie était destinée à des élèves de Première B (*filière économique et social*) dans les années quatre-vingt. Dans les programmes de l'époque, le cours devait « être assis sur des fondements théoriques précis et clairement définis » -i.e. la théorie générale des fonctions réelles d'une variable réelle appuyée sur la topologie générale - les notions et propriétés devaient être présentées chacune en déduction logique des précédentes, et les théorèmes démontrés. Les manuels étudiés par Robinet révélaient un même schéma d'enseignement : étude topologique de $\mathbb{R}$, formalisation de la continuité puis définition et formalisation de la limite d'une fonction en un point en termes de voisinages. Robinet avait en revanche constaté une grande diversité d'utilisation des graphiques dans les manuels, plusieurs ne donnant aucune représentation cartésienne des limites et de la continuité, et les seuls graphiques présents étant du type ci-dessous.



Ces graphiques - un peu surprenants - ne représentent en rien la notion de limite ; on peut se demander ce qu'il reste dans la tête des étudiants après de tels dessins « généraux ». L'ingénierie de Robinet était organisée pour introduire la formalisation comme outil nécessaire pour distinguer différents types de limites à l'infini ou en 0, à partir de l'étude globale et locale de courbes de fonctions. Elle était organisée en trois temps : étude locale puis globale de la parabole, étude des hyperboles et enfin une « généralisation ». Nous n'allons pas décrire cette ingénierie ici, mais elle sera présente en filigrane lorsque nous expliciterons les raisons pour lesquelles nous avons repris (ou non) certaines situations dans notre ingénierie, et les adaptations que nous en avons faites.

2.3 Choix généraux pour la « nouvelle ingénierie »

Ces choix ont été guidés à la fois par la volonté de garder l'esprit et les objectifs de l'ingénierie de Robinet et la nécessité de l'adapter aux élèves à qui elle est destinée (L1 Sciences) et aux évolutions des programmes depuis 1980. Notre objectif final est de construire des situations qui permettent de justifier l'intérêt et la nécessité de la formalisation pour l'étude générale des limites et des comportements asymptotiques des fonctions. Robinet avait elle aussi cet objectif dans son ingénierie, mais une question est restée ouverte : est-il possible de réduire le saut conceptuel entre une approche intuitive et qualitative du concept de limite (par une étude locale ou globale graphique) et sa formalisation. La mise en relation des notions de voisinage et d'encadrement et leurs représentations graphiques par des « bandes » peut être un pont entre les ostensifs associés à l'approche intuitive et qualitative et la formalisation.

Nous avons choisi de regrouper paraboles et hyperboles, et d'ajouter d'autre fonctions n'ayant pas d'asymptotes mais pour lesquelles nous avons fait l'hypothèse que les tracés sont connus des étudiants (nous les donnons ci-après). Notre objectif premier est la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$. La situation de départ de l'ingénierie de Robinet (consigne 1 de la phase d'étude de la parabole) est abandonnée. Elle consistait en l'étude au voisinage de points très loin de l'origine ($x = 100,\ 1000$ etc.) de la position de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ relativement à une sécante dans des voisinages de ces points. Nous n'avons pas conservé cette tâche car elle nous a semblé concerner davantage les notions de sécante et tangente à une courbe que la notion de limite. Mais aussi pour d'autres raisons : c'est une tâche chronophage si on l'exécute à la main, et elle pose des questions d'échelles non orthonormées si on utilise un logiciel ; enfin, un doute existe quant à la possibilité de motiver des étudiants sur une telle question.

2.4 Une expérimentation en 2014 de la « nouvelle ingénierie »

Un membre de notre groupe de travail a expérimenté le tout début de notre projet d'ingénierie. Cette expérimentation a été réalisée en classe avec une trentaine d'étudiants, dans un parcours maths-informatique-physique-chimie de L1 [23] Sciences au semestre 1, au début d'un cours sur les limites, et après le cours sur les suites. Nous ne donnons ici que les résultats les plus significatifs.
La tâche consistait à tracer l'allure générale des courbes sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et le classement de quelques fonctions, pour moitié classiques et pour l'autre moitié moins connues. Les étudiants ont travaillé en groupes, chaque groupe a étudié deux fonctions, une « facile » et une « délicate ». Un représentant de chaque groupe est passé au tableau. Les constats sont les suivants : l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ n'a soulevé aucune difficulté, de même que celles des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \dfrac{4}{(2-x)^2}$ qui sont en fait dans l'herbier usuel des étudiants, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{2+x}{7-x}$ d'allure correcte a été tracée avec un décalage vertical (le tracé correspondait à celui d'une fonction ayant une limite nulle à l'infini). En revanche, le tracé de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'a pas été immédiat, les étudiants déclarant ne pas s'en souvenir ont hésité sur la forme - mais pas sur les limites. Pour la fonction $x \mapsto x+\sin(x)$, c'était la panique : si les placements de quelques points ont été corrects, ceux-ci ont été reliés par une courbe régulière, les oscillations de la fonction $x \mapsto \sin x$ ne semblant pas intervenir. Bien que l'enseignant ait proposé de placer plus de points et de réfléchir à l'incidence des oscillations bien connues de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur le tracé de la courbe représentative de cette fonction, le tracé n'a pas été produit. Enfin, pour les fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $x \mapsto \cos(\dfrac{1}{x})$ l'échec a été total.

2.5 Description de notre ingénierie dans sa version actuelle

Les résultats de cette expérimentation nous ont amenés à préciser les choix de notre ingénierie. Sa version actuelle est présentée ci-après. Elle a été expérimentée début 2015 par un membre de notre groupe et nous présentons cette expérimentation plus loin.
Nous avons choisi de ne pas utiliser de logiciel graphique pour deux raisons. D'une part, pour repérer ce que les étudiants ont retenu des représentations de fonctions par des courbes, après avoir utilisé largement ce type de support informatique au lycée. D'autre part, parce que l'utilisation de tels outils ne se justifie pas ici, l'objectif de cette ingénierie étant l'énoncé d'une définition formelle et la motivation de son intérêt.

- ⋆ **Situation 1** : Une étude qualitative globale de quelques fonctions (monotones, non monotones, ayant ou non une limite en l'infini, et des points de non-définition en 0, ou autre x_0) :

$$x \mapsto x^3 \text{ et } x \mapsto \frac{2+x}{7-x}$$

$$x \mapsto x+\sin(x) \text{ et } x \mapsto \sqrt{x}$$

$$x \mapsto \cos\frac{1}{x} \text{ et } x \mapsto \frac{4}{(2-x)^2}$$

23. Première année de licence

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \text{ et } x \mapsto x^2$$

La tâche demandée est double : tracé de l'allure générale de la courbe de chacune de ces fonctions sur l'intervalle $[0, +\infty[$, puis classement - le critère du classement n'est pas explicité, mais on peut faire l'hypothèse que ce sera en relation avec les comportements supposés à l'infini. Les critères de classement pourraient être les suivants : limite finie ou infinie en $+\infty$, limite finie ou infinie en x_0, asymptote ou non. Les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne devraient pas poser (trop de) difficultés, de même que les fonctions homographiques usuelles.

- $\star$ **Situation 2** : Reprise et adaptation de la consigne 2 de la partie concernant la parabole de Robinet. Etude locale des courbes des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ avec la question : « Comment choisir x pour que x^2 soit (respectivement $\sqrt{x}$) supérieur à 25, à 10^2 , à 10^6 ? ». Il s'agit, pour chacune de ces fonctions, de trouver un nombre A à partir duquel les valeurs de la fonction sont plus grandes qu'une valeur donnée. Les encadrements matérialisés par des bandes devraient permettre de rendre visibles les différences de comportements en l'infini de ces deux fonctions, et susciter l'intérêt d'une formalisation de « limite en » comme outil nécessaire pour préciser ces différences (voir par exemple [113]).

- $\star$ **Situation 3** : Formalisation de la limite quand le cas où la fonction tend vers l'infini en $+\infty$ illustrée avec les fonctions étudiées en situation 1 et 2 : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x + \sin(x)$. Puis formalisation de la « limite finie en $+\infty$ » exemplifiée sur d'autres fonctions vues en situation 1 : $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, $x \mapsto \frac{4}{(2-x)^2}$; $x \mapsto \frac{2+x}{7-x}$ avec des représentations par des encadrements (bandes). Réinvestissement : étude de la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = cos(1/x)[100-x]$, en demandant de la tracer sur l'intervalle $[100, 110]$. On pourrait demander deux graphiques différents, dans une tâche papier-crayon, dans l'objectif de créer un herbier consistant de fonctions, dont on étudierait le comportement dans certaines « fenêtres ».

- $\star$ **Situation 4** : Définition de la limite en un point. Cette dernière phase distingue les notions de « limite de suite » et « limite de fonction ». Nous suggérons que le point choisi ne soit pas exclusivement situé en $x = 0$ et que la fonction n'ait pas forcément une limite nulle - bien que des difficultés calculatoires soient fréquentes lorsque la limite est non nulle. On peut reprendre les fonctions déjà étudiées dans les situations précédentes : $x \mapsto \frac{1}{x}$ en $x = 0$; $x \mapsto \frac{4}{(2-x)^2}$ en $x = 2$; $x \mapsto \frac{2+x}{7-x}$ en $x = 7$; $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ en $x = 0$; $x \mapsto \cos\frac{1}{x}$ en $x = 0$. On pourrait rajouter $x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$ en $x = -1$.

2.6 Son expérimentation en version actuelle

Nous avons testé cette ingénierie en semestre 2 de première année de Licence portail sciences de l'ingénieur, en amphithéâtre, avec 80 étudiants. Les étudiants n'avaient pas encore formalisé la notion de limite de fonction dans leur cursus, mais l'avaient utilisée de

manière calculatoire comme au lycée. En revanche, la notion de limite de suite avait été formalisée avec eux.
Le protocole suivi est celui décrit précédemment :
pour la situation 1, les fonctions tests sont données aux étudiants pour qu'ils en tracent l'allure. L'amphithéâtre est divisé en quatre et l'enseignant fournit deux fonctions par groupe. Ces fonctions sont classées tous ensemble : un représentant de chaque groupe est envoyé au tableau et en discutant, les critères de classement sont donnés. Les fonctions test sont données par paire comme présenté au paragraphe précédent ;
pour la situation 2, la question est : comment choisir x réel pour que x^2 soit supérieur à 25, puis supérieur à 100 même question avec $\sqrt{x}$?
Un étudiant de chaque groupe dessine des quarts de plan au tableau pour les deux fonctions ; les situations 3 et 4 correspondent aux phases de formalisation de (respectivement) la limite infinie en $+\infty$ et de la limite en un point avec les fonctions du début ; elles sont traitées de façon magistrale. Pour un réinvestissement (voir l'exercice en annexe) ce sera un exercice à faire à la maison et à rendre.

Réalisation

⋆ Situation 1 :
les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \dfrac{2+x}{7-x}$, $x \mapsto \dfrac{4}{(2-x)^2}$ ont été tracées correctement (sans calculatrice) par les étudiants.
Les fonctions $x \mapsto x+\sin(x)$, $x \mapsto \cos(\dfrac{1}{x})$, $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ leur ont posé des problèmes :
— pour $x \mapsto x+\sin(x)$: en leur disant d'abord de tracer la droite d'équation $y = x$ et « d'ajouter $\sin(x)$ », les étudiants ont trouvé l'allure facilement ;
— pour $x \mapsto \cos(\dfrac{1}{x})$: les étudiants disent que ça oscille entre -1 et 1 et c'est tout ;
— pour $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$: à part dire que la limite vaut 1 en 0 et que ça oscille, les étudiants ne fournissent aucun tracé (avec ces 2 exemples il sont bien convaincus que dire que « ça oscille » n'est vraiment pas précis....).

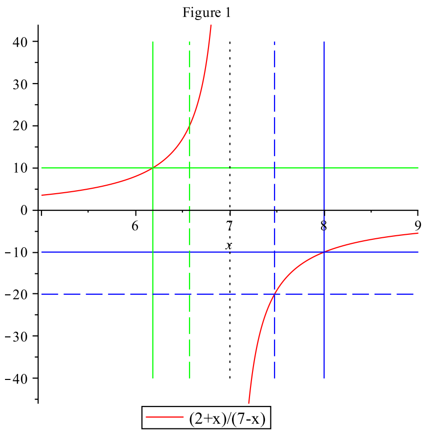
Pour conclure, les fonctions trigonométriques ne sont pas du tout maitrisées, alors quand on les combine avec d'autres fonctions, cela représente une difficulté insurmontable.
Pour le classement : ils ont mis ensemble celles que tendent vers 0, 1 ou -1 en l'infini. Ainsi les fonctions :
$x \mapsto \dfrac{2+x}{7-x}$, $x \mapsto \dfrac{4}{(2-x)^2}$ ont été mises ensemble,
après discussion ils ont mis les fonctions $x \mapsto x^3$, et $x \mapsto \sqrt{x}$ $x \mapsto x+\sin(x)$ ensemble (tendent vers l'infini en +infini).
Ils ne savaient pas où placer $x \mapsto \cos(\dfrac{1}{x})$ et $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.
Les étudiants en ont conclu qu'il fallait privilégier un seul critère à la fois : ici on regarde uniquement le comportement à l'infini. De ce fait des discussions se sont engagées au sujet des asymptotes : à savoir que le graphique seul ne nous permet pas de conclure si la représentation graphique de la fonction possède ou non une asymptote horizontale ou verticale, « *après tout la fonction $x \mapsto x^2$ pourrait bien avoir une asymptote verticale et $x \mapsto \sqrt{x}$ une asymptote horizontale* ».

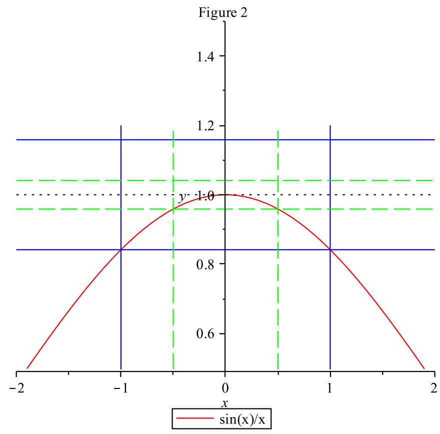
⋆ Situation 2 :
les étudiants s'appuient sur le graphique et cela leur suffit pour répondre à la question posée. On peut remarquer qu'aucun étudiant n'essaye spontanément de

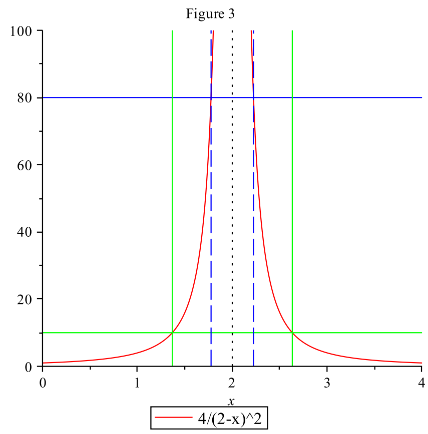
répondre à la question en manipulant des inéquations. Mais après discussion au sujet de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ les étudiants disent que « *pour* $\sqrt{x} > 125$ *on voit rien du tout, si on ne fait pas de zoom* », ce qui a motivé le passage à l'écriture « symbolique » pour écrire :
Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\sqrt{x} > 125 \iff x > 125^2$ et donc si $x > 125^2$ alors $\sqrt{x} > 125$.
L'utilisation du formalisme s'est trouvée vraiment bienvenue ici. Comme la lecture graphique devenait insuffisante, les étudiants se sont tournés naturellement vers l'inégalité écrite au tableau.

⋆ Situation 3 : il semble que les étudiants ont bien compris la nécessité du passage au formalisme.

⋆ Situation 4 : un certain nombre de situations ont été représentées par des graphiques, comme par exemple







Les droites horizontales et verticales servent alors de support pour une explication orale d'énoncés de la forme : soit $\varepsilon > 0$, quelle condition sur $x - x_0$ peut permettre d'avoir soit une minoration ou une majoration de $f(x)$, soit un encadrement de $f(x) - l$, selon le cas.

Pour le sujet sur $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \lfloor 100 - x \rfloor$ 30 étudiants ont rendu l'exercice qui était facultatif. L'énoncé est le suivant :

Exercice
On considère la fonction de la variable réelle x donnée par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \lfloor 100 - x \rfloor$.

1- Tracer la fonction f sur l'intervalle $I_1 = [90\,;100]$, puis sur l'intervalle $I_2 =]100\,;110]$.

2- Démontrer que :

a- $\forall x \in I_1$, $0 \leq f(x) \leq 10$.

b- $\forall x \in]101\,;110]$, $f(x) \leq -1$.

c- $\forall x \in]111\,;120]$, $f(x) \leq -10$.

3- Comment choisir x pour avoir $f(x) \leq -40$?

4- Quelle est la limite de la fonction en $+\infty$? justifier.

Résultats

Question 1). Une partie (1/3) des étudiants tracent une droite et les autres des escaliers à marches « plates ». Ils ont utilisé leur calculatrice sans pouvoir calculer des valeurs et parler du sens de variations par intervalle.

Questions suivantes : pour les encadrements, ils ont écrit
si $y < -10$ alors $\cos(u)\, y < -10$ car $0 < \cos u < 1$ et cette erreur a été retrouvée jusqu'à la question 3), des étudiants ont deviné une erreur sans réussir à l'identifier et sont venus voir l'enseignant avant de lui rendre l'exercice. Il se sont perdus dans les inégalités en pensant que la difficulté était là et ont oublié l'objectif des questions.

Pour la question 4) une toute petite partie (1/6) a généralisé la question précédente (avec l'erreur dans les signes) et le reste des étudiants a présenté la limite sous forme d'un produit de limites connues mais non justifiées.

Pour simplifier l'exercice et mieux mesurer l'incidence de cette ingénierie, une idée serait de proposer un exercice plus simple avec par exemple la fonction $x \mapsto \cos(\frac{1}{x}) \lfloor 100 + x \rfloor$, ainsi les problèmes de gestion d'inégalités ne distrairaient pas les étudiants.

3 Le Flocon de von Koch

3.1 Construction d'une situation introduisant la notion de limite

3.1.1 Les programmes du secondaire et les limites

Les actuels programmes de mathématiques de première S s'appuient sur une approche intuitive de la notion de limite, et signalent que (Bulletin Officiel 9 du 30-09-2010 et 8 du 13-10-2011) :

> « Les fonctions étudiées sont toutes régulières et on se contente d'une approche intuitive de la notion de limite finie en un point. L'approche de la notion de limite d'une suite est faite à partir d'exemples. Par exemple, dans le cas d'une suite croissante non majorée, on peut déterminer un rang à partir duquel tout terme de la suite est supérieur à un nombre donné. On ne donne pas de définition formelle de la limite ».

En terminale :

> « L'un des objectifs du programme est de permettre à l'élève, par une consolidation et un enrichissement des notions relatives aux suites et aux fonctions, d'étudier un plus grand nombre de phénomènes discrets ou continus. La notion de limite de suite fait l'objet d'une étude approfondie. On prépare ainsi la présentation des limites de fonctions. ».

Cependant, « l'étude approfondie » mentionnée n'inclut pas la définition formelle d'une limite, avec des quantificateurs notamment :

> « Pour exprimer que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que :
> *tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.*
> Pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que :
> *tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.* Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A ».

Le théorème de convergence des suites majorées est admis, de même que le théorème des gendarmes. Le programme précise que

> « On peut étudier des situations où intervient la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique. »

Puis, pour les fonctions :

> « Le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en terminale. La composée de deux fonctions est rencontrée à cette occasion, mais sans théorie générale. »

Il est à noter que les manuels ne vont pas plus loin dans la formalisation, mais proposent des exemples de suites et fonctions (voir I) 2)). Par exemple [32] (p160) donne cette définition d'une fonction ayant une limite infinie en $+\infty$: f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si les images $f(x)$ sont plus grandes que n'importe quel réel donné à condition de prendre x assez grand. Dans la marge figure néanmoins une définition formelle, dans laquelle « il existe » et « pour tout » sont écrits en français, et donc sans les quantificateurs. Suivent des « limites de référence » et des exemples e^x, $\sqrt{x}$; on trouve aussi des contre-exemples, ainsi pour montrer que la fonction $x \mapsto x.\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi x)$ ne tend pas vers l'infini quand x

tend vers $+\infty$.

L'état actuel des programmes du secondaire conduit à ce que l'introduction du formalisme des limites est reportée au niveau de la première année d'université ; de ce fait, la situation du flocon devient tout à fait adaptée à une motivation du formalisme au début de la licence. En effet il serait judicieux, à ce niveau, de motiver les étudiants à se poser des questions de définition, d'existence, de nature des nombres limites, etc. La situation du flocon peut être moins coûteuse en temps à ce niveau, car les étudiants connaissent–au moins intuitivement, et par des calculs–la notion de limite ; si en première trois séances de deux heures sont nécessaires, en L1 une seule séance devrait suffire. Nous souhaitons insister sur les bénéfices d'une situation donnant du sens à ces notions : de nombreux étudiants « décrochent » car ils ne comprennent pas la raison d'être des savoirs formels, et donc le sens de l'activité mathématique.

3.1.2 Quels choix pour une situation d'introduction ?

La situation expérimentée est celle du calcul de l'aire et du périmètre du flocon de von Koch, après construction des premières générations des figures F_n (voir figure 8, page 105).

La situation du flocon de von Koch a été construite au départ pour introduire la notion de limite, au niveau secondaire, avec deux contraintes et quelques objectifs :

— cette situation doit être compatible avec les programmes de mathématiques du lycée, et notamment elle n'exige pas comme préalable une connaissance des nombres réels –notamment des irrationnels, mais elle contribue à les introduire et faire comprendre leur nature ; ainsi une suite de nombres rationnels peut (souvent !) tendre vers un irrationnel ;

— les objets proposés dans la situation doivent être accessibles aux élèves et leur permettre de calculer, conjecturer, et valider leurs conjectures ;

— la situation doit introduire un usage au moins implicite des quantificateurs, de façon à pouvoir déboucher *in fine* sur la définition formelle d'une limite ;

— la situation est aussi construite pour faire prendre conscience aux élèves qu'il existe des limites finies et des limites infinies.

Le problème constituant la base de la situation du flocon est donc un problème de recherche de limite. A priori il est possible de choisir une limite de fonction ou une limite de suite. Cependant les limites de fonctions amènent à manipuler l'infini continu dans les deux ensembles de départ et d'arrivée ; il faut définir des applications allant de l'ensemble des voisinages de x_0 vers l'ensemble des voisinages de L, et de l'ensemble des voisinages de L vers l'ensemble des voisinages de x_0, qui ont leur image dans un voisinage de L. Ceci est dans le cas d'avoir à prouver que L est la limite ; mais pour prouver qu'une limite pressentie ne convient pas, il faut envisager l'ensemble des voisinages de x_0 et prouver qu'il existe un voisinage de L, tel que, quel que soit le voisinage de x_0 considéré, au moins un x de ce voisinage n'a pas son image dans ce voisinage de L. Il faut donc gérer des ensembles de voisinages du côté de x, et du côté des images de ces voisinages et de L. Or les voisinages dans $\mathbb{R}$ étant des ensembles contenant des intervalles ouverts, ce sont bien des conditions sur le continu qu'il faut gérer à chaque étape.

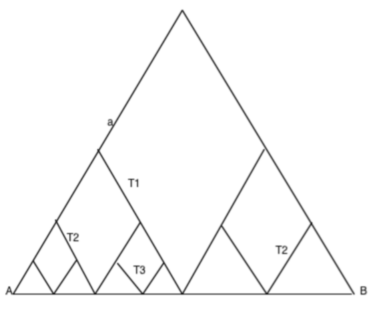
Pour les suites au contraire, la condition sur les éléments de l'ensemble de départ est une condition sur du discret dénombrable, au voisinage de l'infini, ce qui revient à gérer des conditions du type : pour tout n à partir de N, soit $(\forall n \geq N)$. De plus, la limite d'une suite ne s'envisage qu'au voisinage de l'infini, alors que pour une fonction, il est possible

de choisir une limite à l'infini ou en x_0.
Il est donc plus facile de justifier la recherche de la limite d'une suite dans la logique et la culture de la classe ; en effet les renseignements que l'on peut avoir sur les premiers termes de la suite ne nous disent rien sur ce qui se passe « à l'infini », autrement dit lorsque n continue à augmenter indéfiniment (idée de l'infini potentiel).

Les supports des situations de recherche
Ces supports peuvent être de type cinématique comme le paradoxe d'Achille et la tortue, qui illustre bien l'idée de l'infini potentiel, par un personnage qui continue à avancer et ne s'arrête jamais ; ou géométrique, comme les polygones inscrits dans un cercle, dont on double à chaque étape le nombre de côtés ; ou numériques, comme la recherche d'une solution d'une équation par encadrement et dichotomie, qui pourrait sembler être une bonne entrée dans l'analyse, car ce problème pose d'emblée la question de l'existence de la limite.
En effet, le travail sur les nombres est le plus adapté à la validation en analyse, car il permet d'introduire la représentation par un voisin, c'est-à-dire le fait qu'à partir d'un certain rang, le terme de la suite diffère de la limite de moins que ε, ou 10^{-p}, de façon générale un nombre fixé à l'avance. Mais la résolution d'une équation par dichotomie pose d'entrée le problème de l'intersection d'une infinité d'intervalles emboîtés, problème dont les élèves n'ont à ce stade pas les moyens (les connaissances) de se saisir. D'autre part cet exemple présente un inconvénient majeur : la suite dont on s'occupe n'est pas explicitable, on ne sait pas exprimer son terme général en fonction de n, donc tout travail sur des signes mathématiques à la portée des élèves est rendu très difficile à organiser, en particulier l'utilisation du numérique explicite (calculs) est impossible, or le numérique :

- d'une part comporte des connaissances antérieures des élèves, sur lesquelles s'appuyer ;
- d'autre part permet d'introduire la représentation par un voisin.

L'approche géométrique a pour elle de donner des signes intuitifs à visualiser, c'est-à-dire de permettre la construction d'un support matériel dans un environnement familier aux élèves, et dans lequel ils peuvent réinvestir des connaissances. Mais les « limites géométriques » comme la suite de polygones dont le périmètre a pour limite le périmètre du cercle, ont l'inconvénient de pouvoir donner lieu à confusion entre la limite d'une grandeur attachée à la figure géométrique considérée, et ce que serait une limite de la suite de figures avec la topologie de $\mathbb{R}^2$; or on sait bien que ces deux limites peuvent ne pas marcher de concert, et que les représentations géométriques des limites sont dangereuses à cause de ces hiatus. Un exemple classique est celui de la suite des triangles qui « tendent vers » la base du plus grand d'entre eux, alors que le périmètre de la figure zigzag ainsi formée à chaque étape ne tend pas vers la longueur de cette même base, car le périmètre de la figure zigzag est constant et égal à $2a$, où a est le côté du triangle équilatéral de départ.



Si l'on veut pouvoir utiliser les connaissances attachées au domaine numérique, et l'avantage, du point de vue de la visualisation, que représente le fait de pouvoir s'appuyer sur une figure, il faut éviter que la « figure limite », au sens des points du plan, soit visualisable, afin que la confusion analysée ci-dessus ne puisse s'installer. En récapitulant les conditions auxquelles la problématique de départ doit être soumise si l'on veut obtenir l'apprentissage souhaité, il vient :

- Le problème de départ est géométrique donc visualisable ;
- La « figure limite » n'est pas connue ni accessible facilement ;
- Le terme général de la suite peut s'exprimer en fonction de n, et si possible par une suite connue des élèves ou accessible à leurs connaissances ;
- La nature de la suite permet le travail numérique : conjectures sur la limite, et évaluation de ce que le terme un diffère de L de moins de ε.

Il existe des figures répondant à ces différentes spécifications, ce sont les fractales [24] : pour certaines d'entre elles, les premières générations de figures sont constructibles facilement par les élèves : la courbe limite n'est pas facile à décrire ; on peut associer à la suite des générations de figures, un périmètre ou une aire qui est une suite dont l'expression du terme général n'est pas trop complexe ; elles ont des propriétés curieuses, qu'on ne peut déterminer que par passage à la limite (par exemple, aire finie et périmètre infini). Ce qui devra cependant rester implicite dans la situation, ce sont les raisons pour lesquelles on ne rencontre pas, dans le cas choisi, de paradoxe comme celui signalé ci-dessus : les élèves n'ont aucune raison de mettre en doute, à leur niveau, le fait que la limite du périmètre est bien le périmètre de la figure limite.

Dialectique limite finie / limite infinie

Une approche empirique de limite par le calcul peut donner lieu à deux éventualités et deux types de conjectures : la limite est finie ou infinie (écartons pour l'instant la troisième alternative, d'une suite sans limite). Au niveau envisagé (classe de première), les élèves n'ont aucune connaissance sur les limites de suites. Ils ne peuvent donc se référer à leur expérience pour décider si une suite « ressemble » plutôt à une suite divergeant vers l'infini, ou à une suite convergente. Il semble donc qu'il serait souhaitable de leur présenter les deux cas, afin qu'ils puissent construire des connaissances et des critères sur ce qui fait que ces deux suites diffèrent, et en quelque sorte se référer à l'une pour pouvoir affirmer que l'autre n'est pas de même nature. De cette façon la situation comporterait au moins une référence interne, pour permettre de décrire le comportement différent des deux suites.

Du point de vue de la phase de recherche et de calculs dévolue aux élèves, on peut prévoir que c'est là qu'un apport de connaissances du professeur sera nécessaire, pour :

- valider lors du débat sur la différence entre les deux suites ;
- introduire le vocabulaire pour parler de cette différence ;
- introduire les critères de validation permettant de prouver que les deux suites ont des limites qui ne sont pas de même nature.

Pour disposer de deux suites dont l'une converge, et l'autre diverge vers plus l'infini, il suffit de trouver une fractale d'aire finie et de périmètre infini : le **flocon de von Koch** vérifie cette propriété. De plus, de par son mode de construction, le périmètre et l'aire s'obtiennent comme des suites géométriques ou sommes de suites géométriques ; or les élèves ont étudié ces suites peu auparavant, et les programmes sont compatibles avec cette approche.

24. Cf. IREM de Poitiers (1996) Les fractales, réflexions et travaux pour la classe.

Moyens d'exploration et de validation

1. **Exploration**
Les élèves doivent pouvoir explorer la ou les suites calculées, afin d'être en mesure de faire des conjectures sur les limites. A cette fin il semble utile de prévoir l'usage de la calculatrice, afin qu'ils aient une première approche numérique de la limite. Ceci comporte deux aspects :
   - ils doivent pouvoir réinvestir et sans doute aussi questionner leurs connaissances numériques ;
   - il faut gérer les effets de la calculatrice : les problèmes d'arrondi, éventuellement les problèmes de représentation graphique de la suite, car les élèves à ce niveau ont presque tous des calculatrices graphiques ; il faut donc prévoir aussi de faire le lien entre les propriétés numériques de la suite et la représentation graphique de la fonction associée.
2. **Validation**
La phase de bilan des recherches numériques doit comporter des outils de formulation et de validation des conjectures faites. La définition classique de la notion de limite n'est plus au programme. On peut néanmoins l'adapter en ne prenant comme voisinages de l'infini que les intervalles du type $]10^p, +\infty[$ et comme voisinages de zéro les intervalles $] - 10^{-p}, 10^{-p}[$, ou $]0, 10^{-p}[$ si l'on n'a affaire qu'à des suites positives.
Ceci suppose que les élèves soient capables de gérer des inégalités du type $u_n > 10^p$, ou $u_n < 10^{-p}$, et d'en déduire une condition sur n. Faute d'éléments préexistants de la théorie dans les connaissances des élèves, il faut prévoir qu'ils aient à le faire « à la main ». Or ceci implique que les suites soient très simples. Pour une suite arithmétique, il n'y a pas de difficulté ; mais les suites arithmétiques n'ont pas de limite finie. La suite la plus simple ayant une limite finie, envisageable à ce niveau, est une suite géométrique comme dit ci-dessus. Ceci suppose de savoir extraire une condition sur n d'une égalité comme $a_n > 10^p$; c'est-à-dire de savoir utiliser les propriétés de la fonction logarithme décimal, ou d'utiliser l'inégalité de Bernoulli.
On peut donc envisager un apprentissage minimum de la fonction logarithme, d'autant que cette fonction figure au programme de terminale. Ceci peut être fait lors de l'étude des suites géométriques, étude qui est au programme. Dans les manuels, on trouve des questions sur le doublement d'un capital, ou la valeur de n à partir de laquelle u_n vérifie une inégalité. Dans les classes où la situation a été expérimentée, il y a eu une demande d'apport de savoirs du professeur, concernant la façon mathématique de résoudre les équations données, comme $a^x = 10^p$.
A ce niveau, les élèves n'ont aucune raison de penser qu'il existe des équations pour lesquelles on ne sait pas « tirer x ». Ceci nécessite d'ailleurs une explication, car bien entendu on ne « tire x » que parce que la fonction logarithme a été construite « ad hoc ».
L'accès à la fonction logarithme peut être obtenu grâce à la calculatrice [25] : les élèves

25. Il faudrait étudier les inconvénients que peut présenter, à ce niveau, une telle introduction de la fonction log. Mais ils ne nous paraissent pas comparables à ceux que l'on peut observer lors de l'introduction de la fonction « racine carrée » en classe de quatrième. En effet, au niveau de la première scientifique, les élèves identifient bien que l'on introduit une fonction, et pas une notation ; ils ont les moyens (les connaissances) nécessaires pour faire entrer cette nouvelle fonction parmi celles qu'ils connaissent déjà, avec ses propriétés particulières. Ils ont aussi les ostensifs pour en parler et travailler avec cette nouvelle fonction (et les ostensifs nouveaux qui lui sont attachés). Les élèves de la classe où la situation a été

tracent sur l'écran de la calculatrice graphique la représentation graphique cartésienne de la fonction, et en déduisent :
qu'elle n'est pas définie si $x \leq 0$; que $\log 1 = 0$; que la fonction est croissante, donc si $0 < x < 1$, alors $\log x < 0$, et si $1 < x$, alors $\log x > 0$.
La propriété fondamentale de la fonction logarithme décimale : $\log xy = \log x + \log y$, est un apport du professeur ; les élèves en déduisent $\log x^p = p \log x$, et comme $\log 10 = 1$, $\log 10^p = p$.

Moyennant cette introduction, on se trouve avoir résolu les difficultés techniques relatives à la validation : en effet les critères de validation des suites géométriques de limite nulle, comme celles qui tendent vers l'infini, en deviennent accessibles par le calcul. Il devient possible de jouer sur les valeurs de p avec des critères du type donné ci-dessus, comme $u_n > 10^p$ ou $u_n < 10^{-p}$. On peut organiser le jeu des élèves, l'un des joueurs donnant une valeur de p, et l'autre devant fournir la valeur de n à partir de laquelle u_n vérifie la condition demandée, ou bien prouver que ce n'est pas possible. On peut penser que le jeu avec n et p suffit, dans un premier temps, à la construction de connaissances sur les limites.

3.2 Le Flocon de von Koch

Le problème posé est :

On considère un triangle équilatéral, qui joue le rôle de figure initiale et on construit une suite de figures obtenue de la manière suivante :
- *chaque segment composant le bord de la figure est découpé en trois segments isométriques ;*
- *le segment central est supprimé et remplacé par deux segments qui lui sont isométriques et ont un sommet commun pris à l'extérieur de la figure (pour l'anti- flocon ce serait à l'intérieur).*

Etudier le périmètre et l'aire de la figure fractale obtenue par application itérée du processus récursif ci-dessus.

Suivant le choix fait (flocon ou anti-flocon, l'anti-flocon consistant donc à construire la figure fractale à l'intérieur du triangle équilatéral de base) les deux segments ajoutés le sont à l'extérieur ou à l'intérieur de la figure F_0. Ici, comme l'on veut obtenir des aires croissantes, afin de disposer de deux suites croissantes pour lesquelles on sera obligés de trouver un critère de différenciation, on décide de construire le flocon. L'anti-flocon pourra être gardé pour réfuter les arguments prévisibles du type : l'aire et le périmètre se comportent nécessairement de la même façon.

Figures et calculs
Le point de départ est un triangle équilatéral de côté a (dans les figures demandées aux élèves, sur papier millimétré, $a = 18\,cm$).

Le périmètre du flocon

(P_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$. En effet, à chaque étape, on remplace

expérimentée ont utilisé la fonction logarithme pour la recherche de la limite de A_n, et ils contrôlent bien l'usage qu'ils en font.

chaque segment par quatre autres, de longueur égale au tiers du segment remplacé, donc : $P_n = \frac{4}{3} P_{n-1}$ On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = +\infty.$$

L'aire de flocon

L'aire A_0 est celle du triangle équilatéral de côté a : $A_0 = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

À chaque étape, le nombre de triangles ajoutés est multiplié par 4 et l'aire de chacun de ces triangles est le neuvième de l'aire des triangles précédents :

$$A_2 = A_1 + 3\frac{4\,A_0}{9^2} \text{ et } A_n = A_{n-1} + 3\frac{4^{n-1}A_0}{9^n}.$$

Finalement, en utilisant la somme de la série géométrique, on trouve :

$$A_n = A_0 + \frac{3}{5}A_0\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] \text{ et } A_\infty = \lim_{n \to +\infty} A_n = \frac{8}{5}A_0$$

Les premières figures de la suite sont construites par les élèves, sur du papier millimétré.

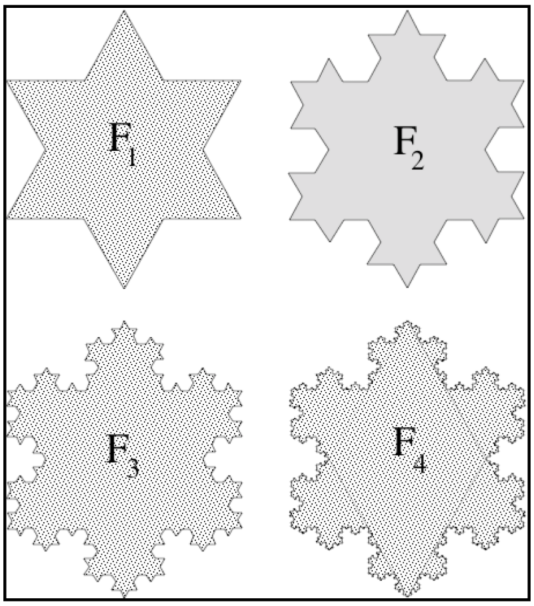


FIGURE 8 –

Le support pour les calculs

Ce support peut être constitué des figures F_n résultant de la construction des générations successives du flocon. Ce support permet :

- de calculer le périmètre et l'aire des premières figures F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 ;
- de calculer le périmètre P_n et l'aire A_n de la figure générique F_n en fonction de n ;
- de formuler des conjectures sur les limites des suites (P_n) et (A_n).

Les recherches et premières conjectures

Le milieu qui permet le débat sur les limites est constitué des conjectures, et des éléments de preuve de ces conjectures, qui permettent de les confronter. Ces éléments de preuve sont numériques, et c'est là que le professeur devra faire un apport de connaissances, sur le mode de validation de l'analyse. Les élèves calculent P_n sachant que n correspond à l'étape de la construction (on a construit les triangles supplémentaires 3 fois, 4 fois, etc.) ; ils sont aidés par le fait d'avoir eux-mêmes fait cette construction sur papier millimétré).
Questions et éléments de validation qui pourront être mis dans le débat :

- P_n dépasse la capacité de la calculatrice « vers le haut » ; peut-il également dépasser n'importe quel nombre ?
- A_n semble se stabiliser lorsque n grandit : l'aire devient-elle constante ? et sinon (comme le support matériel de la figure semble infirmer cette conjecture) comment interpréter ce phénomène ?
- quels sont dans cette situation, les éléments variables, ceux qui peuvent être interprétés comme des fonctions ? quel est leur comportement (devenir « grand », devenir « petit », osciller...) ?
- en analyse, on peut traduire « devenir aussi grand qu'on veut » par : dépasser 10^p et « devenir aussi petit qu'on veut » par : devenir plus petit que 10^{-p}. Peut-on utiliser ces validations pour interpréter le comportement de la suite (P_n) ? et celui de la suite (A_n) ?

Le jeu de la situation

Etant donnée une suite, par exemple (P_n), le but est de poser une conjecture sur un nombre 10^p atteint par P_n, moyennant une condition à donner sur n. Un élève avance une conjecture sur P_n, et l'autre élève doit donner n, à partir duquel P_n atteint la valeur proposée, ou de réfuter que P_n puisse atteindre cette valeur.
Le jeu avec les valeurs A_n est plus complexe : les connaissances des élèves ne leur permettant sans doute pas de raisonner directement sur une limite éventuelle de la suite (A_n), il faudra d'abord que le jeu se centre sur le terme fonctionnel de cette suite, celui qui dépend de n, à savoir $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$; ceci implique que les élèves soient capables d'identifier ce terme.
Il faut compter sur les connaissances des élèves relatives aux fonctions ; si ces connaissances sont défaillantes, le professeur devra intervenir. Après quoi le jeu est du même type que pour P_n , mais en montrant que $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ peut devenir plus petit que 10^{-p}.

Les variables didactiques

Rappelons qu'une variable didactique est une caractéristique de la situation qui peut changer les stratégies des élèves, et les modalités d'interaction du professeur. L'usage de la calculatrice a été retenu pour permettre une exploration numérique des suites construites, et étayer des conjectures.
Les valeurs maximales de n pour lesquelles on calcule effectivement P_n et A_n dépendent de la capacité de la calculatrice donc ne sont plus accessibles comme variables didactiques pilotées par le professeur ; du reste il n'est pas sûr qu'elles auraient pu jouer ce rôle, ou alors cela aurait pu être au détriment de la nécessité de valider, si la classe disposait d'un instrument de calcul assez puissant pour inspirer l'idée que « on a atteint la limite ».
Les valeurs de p pour lesquelles le jeu est organisé sont des variables didactiques car il n'est pas équivalent, pour les élèves, de prouver que $P_n > 10^2$ ou que $P_n > 10^{2500}$, même

si en fait le raisonnement est le même ; d'ailleurs dans le premier cas, cela pourra être fait directement à la calculatrice, sans nécessité de passer par le raisonnement. Il faut donc que la situation, ou le professeur, impose des valeurs de p telles que le calcul de P_n ne puisse pas être fait directement à la calculatrice, celle-ci ne devant avoir qu'une fonction exploratoire.
Dans le cas de la suite ayant une limite finie, la principale variable didactique est la valeur de cette limite, ou plutôt la nature du nombre L : entier, décimal ou non décimal. En effet une limite entière entraînera certainement une réponse par effet de contrat ; si par exemple la limite est 4, le calcul donnant des valeurs du type $3,999998$ incitera les élèves, qui ont l'habitude de fonctionner dans le contrat classique où les nombres à trouver sont des nombres « simples », à donner la valeur « 4 » comme réponse la plus probable. Or le savoir sur le fait que « derrière » une suite de décimaux dont seules les dernières décimales changent, peut se cacher un nombre réel qui est la limite de cette suite de décimaux, ce savoir ne fait bien sûr pas partie des connaissances des élèves sur les nombres à ce stade de la scolarité.
C'est justement l'un des objectifs de la situation, que de montrer la nécessité, dans ce cas, d'une validation spécifique, faute de pouvoir connaître la limite uniquement par le calcul de quelques termes de la suite, à la calculatrice. C'est aussi une première étape, par rapport à l'objectif plus général sur l'ensemble $\mathbb{R}$, de pouvoir considérer tout nombre réel comme étant lui-même une limite (objectif qui ne fait pas partie des finalités de l'enseignement secondaire).
Il faut donc que la limite cherchée soit non décimale, ce qui imposera d'avoir à la calculer par une autre méthode que l'ostension de la valeur numérique approchée de quelques termes.
Le flocon de von Koch est bien adapté à cette exigence, puisque le fait de partir d'un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est un entier a, aboutit à une aire A_0 égale à : $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ c'est-à-dire un irrationnel. Comme la suite des aires est une somme de suite géométrique dont la raison est rationnelle, il s'ensuit que toutes les aires sont irrationnelles, et la limite de la suite (A_n) est également irrationnelle puisqu'elle ne dépend que de A_0, avec des coefficients rationnels. Ceci imposera donc aux élèves, qui ne pourront anticiper la limite facilement, d'avoir à valider la valeur de cette limite.

Les obstacles

Les obstacles prévisibles sont de deux sortes :

1. Ceux qui sont liés à l'emploi de la calculatrice et aux conceptions sur les nombres. La capacité de la calculatrice est dépassée « vers le haut » pour les valeurs de la suite (P_n), ce que les élèves peuvent interpréter comme le fait que le périmètre grandit indéfiniment, ou en tout cas plus que l'on ne peut le calculer. Mais surtout elle est dépassée « vers le bas » pour celles de la suite (A_n), les valeurs de la suite n'ayant plus l'air de changer ; l'interprétation de ce phénomène risque d'être une difficulté.
2. Ceux qui sont liés aux conceptions des élèves sur les grandeurs et les fonctions.
   - conceptions relatives aux grandeurs, en particulier le fait de faire un lien entre variation de l'aire et variation du périmètre ;
   - conceptions relatives aux fonctions, en particulier la difficulté à identifier n comme variable, et à savoir faire le lien entre une expression qui est variable et le fait qu'elle contienne la variable n.

   On peut alors prévoir a priori plusieurs types d'interprétations du calcul de A_n, suivant les conceptions des élèves sur les nombres et sur les grandeurs et les fonctions :

- l'aire est constante à partir d'un certain rang (conception du type « tout nombre est égal à la valeur lue à la calculatrice ») , soit un décimal ayant au maximum 10 chiffres après la virgule ;
- l'aire augmente indéfiniment, comme le périmètre.

Cependant par passage à la limite, le calcul montre que

- l'aire de la figure obtenue à l'issue du processus itératif est finie.

Ceci est en accord avec les informations empiriques que l'on peut lire sur la figure. En effet la figure semble être contenue dans le domaine limité par l'hexagone déterminé par les sommets de la figure F_1, ou dans celui délimité par le cercle circonscrit à F_1.

Remarque : Donner une preuve géométrique de ce résultat ne semble pas totalement trivial pour les élèves.

Nous allons maintenant donner quelques indications sur le déroulement tel qu'il était prévu puis tel qu'il a eu lieu dans une classe de première S.

3.3 Analyse préalable au déroulement

3.3.1 Calculs et tests à la calculatrice

Calcul de (P_n) et (A_n)

Le calcul de (P_n) ne devrait pas poser de difficultés, car cette suite est géométrique de raison $\frac{4}{3}$. Celui de (A_n) est plus délicat, car :

- il faut compter correctement le nombre de triangles que l'on ajoute à chaque étape, or ce nombre est 3×4^n pour passer de la figure F_n à la figure F_{n+1} , et donc 3 pour passer de F_0 à F_1 ;
- à chaque étape l'aire de chacun des triangles ajoutés est égale à 1/9 de celle des précédents, si bien que les exposants de 9 et de 4 ne sont pas les mêmes ; or beaucoup d'élèves de première ont encore des difficultés avec le maniement des exposants ;
- l'aire de F_n est une somme de termes d'une suite géométrique, ce qui nécessite de contrôler le nombre de termes de la somme ; on sait que c'est une difficulté pour les élèves.

On peut envisager que le professeur apporte une aide à ce calcul, par exemple en suggérant de faire un tableau permettant de compter les triangles ajoutés et l'aire de chacun d'eux, lorsque l'on passe de F_n à F_{n+1}.

Transformation de l'écriture algébrique de A_n

La deuxième étape importante consiste à mettre A_n sous une forme plus propre au travail numérique, en utilisant la formule de somme d'une suite géométrique. Il peut apparaître à cette occasion des difficultés relatives à la compréhension de cette formule et à son utilisation dans ce cas précis, c'est-à-dire à la mise en œuvre des connaissances d'algèbre des élèves. Là encore il est possible qu'une aide du professeur soit souhaitable ; cependant l'organisation du travail en groupes de quatre élèves devrait assurer la réussite de cette phase ; en effet si certains élèves ont des difficultés avec l'algèbre, d'autres au contraire sont tout à fait performants dans l'application des formules.

Tests à la calculatrice

1. Pour P_n
   Ce que la calculatrice peut permettre de repérer, c'est :
   - que la suite (P_n) est croissante, ce qui peut être validé facilement, et par la figure, et par les connaissances des élèves sur les suites géométriques ;
   - qu'à partir d'un rang à trouver, la valeur de P_n dépasse la capacité de la calculatrice.

   Les conjectures qui pourront être faites à partir de ces constatations sont au nombre de deux :
   - soit P_n dépasse toute capacité supposée de n'importe quelle calculatrice, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de maximum ;
   - soit (P_n) a un maximum, à déterminer.
2. Pour A_n
   Pour l'aire les élèves vont pouvoir calculer un certain nombre de termes ; mais le phénomène qu'on observe à la calculatrice est moins facile à interpréter que dans le cas de (P_n) : en effet la suite semble se stabiliser et devenir constante. Cette affirmation peut cependant être contestée grâce à la figure, puisqu'il est clair qu'à chaque étape, on rajoute des triangles, même s'ils sont de plus en plus petits : l'aire est donc strictement croissante. Le premier calcul de A_n doit d'ailleurs confirmer cette propriété, puisque ce calcul fait apparaître une somme de termes tous positifs, un terme étant ajouté à la somme à chaque étape. Il ne s'ensuit pas pour autant que le comportement de la suite (A_n) soit facile à interpréter pour les élèves.

3.3.2 Conjectures sur les limites

La limite de la suite (P_n)
Un nombre raisonnable d'élèves devrait conjecturer que la suite (P_n) tend vers l'infini. Cependant, il ne faut pas surestimer les connaissances des élèves sur les nombres ; certains ne vont sans doute rien inférer de ce que P_n dépasse 10^{99}, qui est la capacité supérieure de la plupart des calculatrices. Il est par contre très invraisemblable que des élèves puissent postuler une limite, qui serait supérieure à 10^{100}, rien dans leur expérience antérieure n'ayant pu les confronter à une telle éventualité. Comme dit ci-dessus, ils peuvent par contre imaginer un « maximum très grand » pour P_n , ce qui serait l'équivalent pour eux d'une limite.

La limite de la suite (A_n)
Il paraît très improbable, étant données les connaissances des élèves sur les nombres, qu'ils soient capables de postuler l'existence d'une limite finie pour la suite (A_n). Par contre, ils peuvent grâce à la figure trouver des arguments pour étayer l'idée que (A_n) est bornée (le flocon est inscrit dans le cercle circonscrit au triangle de départ). D'autre part la suite (A_n) est croissante, tout comme (P_n) ; il y a donc une confrontation due au fait que, bien que toutes deux croissantes, elles n'évoluent pas de la même façon.
Quelles connaissances permettraient de postuler une limite finie pour (A_n) ? La principale est qu'une suite dont on calcule des valeurs à la calculatrice, et dont les valeurs ne changent presque plus (seuls les derniers chiffres changent puis se stabilisent), est *peut-être* une suite dont le terme u_n calculé diffère de moins de 10^{-p} d'un nombre fixe : autrement dit, pour penser que cette suite « tend vers un nombre L » il faut *déjà* connaître la notion de limite. C'est ce qui fait que l'ostension numérique –c'est-à-dire le fait de se baser uniquement sur des calculs – est inefficace, car elle suppose déjà connue la notion

qu'elle prétend introduire.
D'où peuvent alors provenir les conjectures sur (A_n) ? Seulement d'un engagement dans une procédure de reconnaissance d'un terme fonctionnel dans la formule donnant A_n, et des conjectures sur ce que devient ce terme lorsque n grandit indéfiniment ; ou d'une possible reconnaissance d'une symétrie de comportement entre une suite géométrique qui tend vers l'infini et une suite géométrique qui tend vers zéro.
Dans ce processus de reconnaissance d'une suite de même nature que celle obtenue avec (P_n), mais de limite différente, il est clair que l'étape de conjectures et de validations sur (P_n) est essentielle, puisque sans elle, il ne peut y avoir d'engagement dans ce processus. Ceci revient à dire que la situation ne donne pas l'accès directement aux suites de limite finie, mais prévoit un passage obligé par une suite de limite nulle, et ceci par référence à une suite déjà étudiée de limite infinie.

3.3.3 Débats et validations

Débat pour (P_n)
On peut faire deux remarques :
- la situation mise sur le fait que les connaissances des élèves sont insuffisantes au départ pour trancher entre les deux conjectures pour (P_n), à savoir (P_n) n'a pas de maximum ou (P_n) a un maximum ;
- il y a donc un débat possible, mais les critères de validation font partie des éléments inconnus des élèves, donc le professeur devra donner, à un moment du débat, ces critères.

Débat pour (A_n)
Comme dit ci-dessus, pour (P_n) les critères peuvent être introduits directement à partir de la question qu'on se pose : « Est-ce que (P_n) peut dépasser 10^p ? », alors que pour (A_n), il va falloir transformer la question en identifiant d'abord que $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ est le terme variable de la suite, et en posant la question pertinente par rapport à ce terme. Puis les élèves devront utiliser implicitement deux règles particulières de l'algèbre des limites : la première, que si (u_n) a pour limite zéro, alors (ku_n) a pour limite zéro ; puis la deuxième, que si (v_n) a pour limite zéro, alors $(v_n + L)$ a pour limite L.
Il n'est pas prévu que ces deux règles soient démontrées à ce moment-là, ou que la situation puisse les valider autrement que par une vérification empirique : on peut calculer à la calculatrice une valeur approchée de la limite L trouvée, et constater que cette valeur approchée diffère peu des valeurs trouvées à la calculatrice lors du calcul des termes de la suite (A_n).

Institutionnalisation
Les critères de validation introduits ainsi que les notations usuelles des limites sont institutionnalisés par le professeur en fin d'apprentissage. La définition d'une suite tendant vers plus l'infini est donc institutionnalisée sous une forme équivalente à :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ si et seulement si } \forall p\ \exists N \ / \ \forall n > N,\ u_n > 10^p$$

(où p, n et N sont des entiers), même si l'écriture formalisée de la définition n'est pas forcément donnée par le professeur, et pas exigée des élèves. De même la définition équivalente d'une suite (positive) convergeant vers zéro est :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ si et seulement si } \forall p\ \exists N \ / \ \forall n > N,\ u_n < 10^{-p}.$$

Les deux règles énoncées ci-dessus, sur la limite de (ku_n) et de $(v_n{+}L)$, font aussi partie des savoirs énoncés durant le processus d'institutionnalisation. On peut en effet considérer que ces règles font partie des savoirs de la classe, savoirs réutilisables dans un autre problème de limite.

3.4 Résulats d'expérimentations

La situation du flocon a été expérimentée durant trois années dans des classes de première scientifique du lycée Saint-John Perse, à Pau entre 1996 et 2010.

3.4.1 Formule du terme général de la suite

Le calcul du terme général de (P_n) est relativement aisé. Les élèves utilisent des raisonnements du type : « On remplace chaque segment de longueur x par quatre segments de longueur $\frac{x}{3}$ donc la longueur est multipliée par $\frac{4}{3}$ ». Ils en déduisent la longueur P_{n+1} en fonction de la longueur P_n, puis P_n en fonction de n, grâce aux connaissances sur les suites géométriques.
Le calcul pour A_n pose comme prévu plus de difficultés ; de plus certains élèves sont bloqués car ils n'arrivent pas à calculer A_0, et ne peuvent imaginer se lancer dans le calcul sans connaître sa valeur, puisque chacun des petits triangles ajoutés a pour aire une fraction de l'aire du triangle de départ.
Le professeur apporte donc une aide au calcul de A_0, afin de débloquer le travail du groupe. Il apporte aussi une aide à l'organisation du calcul pour la première forme de A_n (suggestion de disposer en tableau, le nombre de triangles ajoutés et l'aire de chacun d'eux). Utiliser la somme d'une série géométrique pour mettre A_n sous la forme définitive souhaitée n'est pas évident pour certains élèves ; il y a là, comme prévu, l'occasion d'un travail algébrique au demeurant intéressant à ce niveau. On peut d'ailleurs observer un épisode didactique concernant ce travail algébrique : une élève, Flavie, comprend à cette occasion, avec l'aide de Florence, que la formule donnant $S_n = 1 + q^2 + q + ... + q^{n-1}$ s'écrit : $\frac{(q^n - 1)}{q - 1}$ et non $\frac{q^{n-1}}{q-1}$ son erreur venant de ce qu'oralement cela s'énonce de la même façon : q puissance n moins un sur q moins n...

3.4.2 Recherche empirique à l'aide de la calculatrice

La question étant posée : « Que deviennent le périmètre et l'aire quand on a itéré le procédé *jusqu'à l'infini* ? », le professeur demande ce que l'on pourrait faire pour avoir une première idée de la réponse à cette question. Des élèves proposent de calculer P_n et A_n, et se posent alors plusieurs questions :

- pour calculer il faut la valeur de P_0 et A_0 ; elles sont calculées pour $a = 18$, la valeur en cm du côté de la figure F_0 tracée par les élèves ;
- certains élèves n'identifient pas une fonction dans les données, or ils ont manifestement l'habitude de calculer $f(x)$ pour des valeurs de x, et sont déroutés ;
- pour certains élèves, il n'est absolument pas évident, malgré la formulation de la question, qu'il soit intéressant, ne serait-ce que dans un but heuristique, de prendre des « grandes valeurs » pour n.

Il faut donc croire que l'appui sur l'infini culturel n'entraîne pas automatiquement la compréhension du fait que n peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut. Pour les élèves qui ne voient pas de contradiction, entre le fait de dire que « n tend vers l'infini »

et le fait de limiter n à des « petites » valeurs, par exemple 5 ou 10, l'approche qui est généralement proposée dans les manuels (calculer u_n pour n égal à 10, 100, 1000, 100000 ...) risque de n'avoir guère de sens.
Est-ce que, par manque d'habitude ou effet de contrat, les élèves pensent qu'il n'est pas nécessaire de calculer aussi loin ? D'habitude, pour étudier une fonction, on ne calcule pas $f(1000)$, tout au plus $f(10)$. Est-ce que la difficulté à imaginer la construction de la figure support F_n pour des valeurs aussi grandes de n, fait que ces élèves s'interdisent de calculer sur une figure qu'ils ne peuvent construire ?
On peut aussi interpréter cette difficulté en se référant aux travaux sur les nombres [18] de la treizième école d'été de didactique des mathématiques, où les ateliers de Birebent, d'une part, et de Bloch, Chiocca, Job et Schneider, avaient développé le fait que les élèves du secondaire n'avaient que peu de familiarité avec des nombres variés, et que les nombres effectivement « fréquentés » par ces élèves étaient peu nombreux et de nature très restreinte : quelques entiers en général inférieurs à 25, quelques racines carrées, et π....

a) **Calcul du périmètre P_n**
   Le calcul de P_n permet de déterminer comme prévu, qu'à partir de $n = 786$, P_n dépasse la capacité de la calculatrice.

b) **Calcul de l'aire A_n**
   Le calcul de A_n se heurte à une difficulté non prévue : les élèves ont programmé leur machine en tabulation automatique avec deux chiffres après la virgule. Dès lors s'engage une discussion avec le professeur, où manifestement il y a malentendu. Des élèves (Davy, Flora) disent que A_n est **égal** à $224,48$, pour $n = 27$; d'autres pensent que c'est impossible. Le professeur, ayant enfin compris l'origine de la difficulté, intervient pour demander l'affichage de tous les chiffres disponibles ; mais ceci ne fait que reporter le problème, comme en témoigne la remarque d'un élève : « Elle est stabilisée ». Sébastien arrive à calculer A_{33}, et Frédéric A_{36}, mais là encore les élèves butent sur le problème d'arrondi, et trouvent contradictoire qu'une machine puisse afficher $224,47378461$ et l'autre $224,4737846091$ pour une valeur de n supérieure, alors que la suite est croissante ; ceci prouve bien qu'ils n'ont pas compris le mécanisme d'arrondi.
   Le professeur ne fait pas d'intervention plus explicite sur le fonctionnement de la machine. Ceci serait pourtant sans doute nécessaire, car on voit apparaître un obstacle dû à l'instrument, qui ne sera pas traité dans cette séance. Par contre le professeur fait à ce moment là une intervention sur la traduction de ce phénomène (la suite (A_n) se « stabilise ») en disant que la capacité de la machine est dépassée, mais cette fois dans les petits nombres. Or il est loin d'être évident que cette interprétation peut être comprise des élèves : c'est un apport de connaissances du professeur, mais qui ne s'appuie pas sur la base de l'action et la formulation des élèves à ce stade de leur recherche. Cette interprétation n'est d'ailleurs pas reprise par des élèves à ce moment là ; ce n'est que plus tard, après avoir identifié $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ comme l'élément variable de la suite (A_n), que des élèves reprennent cette explication.

3.4.3 Conjectures sur les limites des suites (P_n) et (A_n)

Les conjectures sur les limites de (P_n) et (A_n) se déroulent comme prévu. Pour la suite (P_n), il n'y a qu'une moitié des élèves de la classe environ qui pense que la suite « a un maximum infini », les autres pensent que (P_n) est bornée, même si l'on n'est pas capable

de déterminer son maximum.
Pour (A_n), comme prévu également, les élèves pensent qu'elle est croissante et bornée ; mais, un élève ayant avancé l'hypothèse qu'elle « se rapproche autant qu'on veut » d'un nombre fixe, la plupart pensent que ce n'est pas possible car comme dit un élève « il y a toujours des chiffres après la virgule »(sous-entendu : qui changent).

Lors du débat, les élèves soutiennent plusieurs idées :
- (A_n) est bornée, car on ajoute des quantités, mais de plus en plus petites ;
- (A_n) est bornée, car le flocon est inscrit dans l'hexagone construit à partir de la figure de départ (cet hexagone ne sera pas précisé davantage, mais plusieurs élèves le dessinent) ;
- le périmètre augmente indéfiniment ;
- le périmètre et l'aire se comportent de la même façon ;
- n devient infini, mais (A_n) « prend des valeurs », ça « rajoute des décimales », tout en restant inférieure à l'aire de l'hexagone (Yaëlle).

L'idée de Yaëlle est en fait une affirmation de ce que (A_n) est une *fonction*, n étant la variable, et que la variation de n ne détermine pas celle de la fonction : autrement dit que les deux suites n'ont aucune raison de varier de la même façon.
Le professeur fait alors un apport de connaissances sur l'aire et le périmètre, avec un contre-exemple, afin de tenter de régler ce qui est un obstacle depuis l'école primaire : en cycle 3 de l'enseignement primaire, on le trouve sous la forme « Deux figures de même périmètre (aire) ont forcément la même aire (périmètre) » ; ici il apparaît comme « l'aire et le périmètre d'une figure varient nécessairement dans le même sens ». La remarque de Yaelle, et l'apport du professeur, se renforcent mutuellement.
A l'issue de cette phase il apparaît bien que les élèves ne peuvent aller plus loin sans apport aidant à la validation : les critères de validation ne peuvent se dégager seuls d'une phase de recherche empirique. C'est donc à ce moment que le professeur doit prendre en charge l'introduction de savoirs, sous la forme du critère qui doit être mis en jeu : si je donne un nombre quelconque, aussi grand que je veux, est-ce que P_n peut dépasser ce nombre ? [26]

Validation pour la suite (P_n)
Le professeur donne la règle du jeu : on se donne un nombre, aussi grand qu'on veut, et il s'agit de déterminer n afin que P_n dépasse ce nombre. Les élèves sont invités à proposer des nombres à dépasser, dans un premier jeu public destiné à familiariser la classe avec la problématique énoncée juste avant par le professeur. Or certains élèves proposent systématiquement des nombres plus petits que ceux qui ont déjà été trouvés empiriquement : ainsi 100, puis, lorsque 100 est rejeté car plus petit que P_{786} , Jérôme propose 5000 qui est rejeté pour la même raison. Jérôme avance alors $5,92\,\dot{1}0^{128}$; certains veulent alors essayer la calculatrice, bien que les essais empiriques aient prouvé qu'on ne dépasserait pas P_{786} . Lorsque la méthode de recherche avec la fonction logarithme s'impose, les élèves trouvent par contre très rapidement les premières valeurs de n. Le professeur a proposé de remplacer $5,92.10^{128}$ par 10^{129} pour simplifier le calcul, ce qui donne $n > 1019$; le nombre suivant proposé par un élève est 10^{3637}. Un élève propose alors : « Et en général ? une règle générale ? », sans même attendre que le calcul soit fait pour 10^{3637}. À ce stade de la validation, la réponse à la question est claire pour beaucoup d'élèves : ce qu'on est en train de faire avec 10^{3637}, on pourrait le faire avec 10^p, donc la suite (P_n) n'est pas bornée.

26. Il faut noter que cette formulation est ambigue ; mais, à ce niveau et avec des élèves ne connaissant pas la notion de limite, ni évidemment celle de valeur d'adhérence, c'est une première approximation. Il serait contreproductif, à ce stade, d'introduire des subtilités au niveau des concepts.

C'est d'ailleurs ce qui est exprimé par Frédéric et Laurent, puis d'autres, et résumé par le professeur. À la suite de cet épisode le professeur institutionnalise la définition d'une suite tendant vers plus l'infini, et la notation correspondante. On a rencontré ici une demande de savoirs venant des élèves : on peut considérer que dès qu'ils ont compris le jeu, 10^{3637} joue pour eux le rôle d'expérience décisive ; que 3637, étant un nombre « quelconque », joue pour un entier quelconque désigné par une lettre, et les élèves sont conscients que le jeu est fini, et que le calcul pour 10^p est le savoir qui permet de conclure.

Validation pour la suite (A_n)
La validation pour (A_n) s'engage dans la troisième séance après que le professeur a rappelé les résulats trouvés pour (P_n) :

$$P_n > 10^p \Longleftrightarrow n > \frac{p - \log 54}{\log \frac{4}{3}}$$

(rappel : le côté a du triangle de départ est de mesure 18 cm d'où $P_0 = 54\text{cm}$).
Un premier calcul permet de simplifier l'expression de A_n obtenue par la somme d'une série géométrique. Le professeur fait une intervention pour diriger clairement les élèves vers le même type de validation que celui utilisé pour (P_n) (le professeur est peut-être inquiet de la capacité des élèves à se rendre compte qu'on peut utiliser, pour (A_n), un critère symétrique de celui qui a réussi pour (P_n)). A partir de l'intervention de Karine le travail se focalise sur le terme $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$. Frédéric entame directement un raisonnement du type « algèbre des limites » pour prouver que (A_n) a pour limite $\dfrac{8}{5}A_0$: mais c'était déjà le seul élève persuadé que la suite (A_n) convergeait.
Les autres élèves essayent de regarder empiriquement, à la calculatrice, ce que devient ce terme $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ lorsque n grandit ; on retrouve d'ailleurs la même difficulté, relativement aux valeurs de la variable n, que lors du calcul avec (P_n) : Ludivine propose d'essayer $n = 100$, et Laure hésite : « C'est un petit peu beaucoup ? ». Des élèves expriment alors que la calculatrice ne peut plus voir les accroissements de $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$. Karine passe au tableau, et exprime que :
Karine : « Si $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ tendait vers zéro, si on pouvait considérer que ça tendait vers zéro... »
et le professeur demandant pourquoi $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$, elle affirme : « c'est la seule chose qui varie, quand n varie ».
Le professeur repose alors la question de savoir si (A_n) est bornée. Cette question résolue, le professeur repose la question : est-ce que $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ tend vers zéro, en rappelant le critère utilisé pour montrer que $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ tend vers l'infini. Après dix minutes de recherche, Sandra va au tableau et explique que dans son groupe, les élèves ont cherché si on pouvait avoir : $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n < 10^{-99}$. Ils ont trouvé $n > 282$. Le professeur demandant si cette condition ressemble à celle trouvée pour le périmètre, Sandra répond : « Oui, n augmente ».
Un autre groupe a fait de même avec $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n < 10^{-100}$ et a trouvé $n > 284$; Karine inter-

vient alors pour déclarer que son groupe a cherché si $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n < 10^{-p}$, avec p quelconque ; Laurent dit alors : « Ça fait $n > \dfrac{-p}{\log \frac{4}{9}}$ et à Sylvain qui ne comprend pas pourquoi on change le signe ($<$devient $>$) Caroline répond : « Mais $\log \dfrac{4}{9}$ est négatif ! ».

Remarquons que les interventions du professeur, dans cet échange, ne sont que des reformulations, ou des explications sur le fait que $\dfrac{-p}{\log \frac{4}{9}} > 0$, ou des questions demandant de préciser le sens des interventions. Il apparaît donc que les élèves manifestent un contrôle du jeu, qui les conduit à interpréter convenablement le résultat trouvé (n **supérieur** à...) et à se servir de leurs connaissances sur la fonction logarithme pour contrôler ce « n supérieur à ». Il y a là un double contrôle qui prouve que les élèves ont réinvesti le critère trouvé lors de la recherche de la limite de (P_n), en l'aménageant pour une suite qui converge vers zéro, et que loin d'être déstabilisés par le calcul avec $\log \dfrac{4}{9}$, ils sont capables de retrouver la cohérence du résultat : n est supérieur à un nombre qui s'avère bien positif. La mise en œuvre du jeu avec (P_n), bien que très brève, a donc permis de construire des connaissances relatives à la validation des limites.

La fin de la séance est consacrée à la mise en forme, par le professeur, du résultat concernant la limite de la suite (A_n). Un résultat important de cette étape est que, si une suite (u_n) a pour limite zéro, alors $(k.u_n)$ converge aussi vers zéro. La situation qui s'est déroulée est dans une large mesure celle qui avait été prévue : la recherche empirique des valeurs de (P_n) a permis aux élèves de poser des conjectures sur sa limite ; ils ont utilisé le critère de validation fourni par le professeur pour résoudre ces conjectures. Le calcul des valeurs de (A_n) a, plus encore que prévu, fait rencontrer des difficultés relatives à l'usage de la calculatrice et à l'interprétation de ses résultats. La situation n'a pu se dénouer que grâce à l'identification correcte, par les élèves, du terme fonctionnel de (A_n). À cette condition, les élèves ont pu réinvestir, en l'aménageant, le critère de validation employé pour (P_n), et ont fait preuve de beaucoup d'adresse et de maîtrise dans le calcul d'inégalité permettant de conclure sur la limite de $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

Les connaissances des élèves à l'issue de cette situation portent sur :

- le fait que deux suites peuvent être croissantes et ne pas avoir le même comportement à l'infini : celle qui est majorée converge, l'autre tend vers plus l'infini ;
- les critères de validation introduits (réponse aux questions : A quoi reconnaît-on – comment prouve-t-on – qu'une suite tend vers l'infini, ou converge vers zéro ?) ;
- un début d'algèbre des limites.
- Et de façon annexe, la situation permet de traiter des connaissances sur :
  - l'aire, le périmètre, et leurs variations ;
  - les nombres non décimaux, la nature des nombres affichés par la calculatrice ;
  - l'usage des formules sur les suites géométriques ;
  - ce qui est fonctionnel (dépend d'une variable) et ce qui est constant dans une formule ;
  - la fonction logarithme.

La situation a été reprise l'année suivante dans une classe de première, mais le professeur a intercalé, après la phase empirique de recherche des valeurs de (A_n) à la calculatrice, une séquence didactique d'explication sur les nombres et sur le fait que $\sqrt{3}$ a une infinité de décimales. La phase de recherche de limite de (A_n) en a été aussi rendue plus dirigée, car les élèves, à la suite de la phase d'apport de savoirs sur les nombres, étaient très nombreux à être convaincus que (A_n) avait une limite. Cependant les élèves ont réagi, dans le débat, de la même façon que lors de la première expérimentation, les principaux points soulevés étant :

- (A_n) est croissante jusqu'à $n = 33$, après la fonction est constante : affirmation contrée par d'autres élèves par référence au milieu matériel constitué par les dessins ;
- c'est la calculatrice qui « fait que ça a l'air constant » : « ça augmente de façon tellement infime que la calculatrice ne peut plus le voir » ;
- c'est une fonction parce que ça dépend de n ;
- (P_n) n'est pas majorée, et tend vers l'infini (une majorité d'élèves le pense) ;
- (A_n) est majorée, et doit avoir une limite (affirmé aussi par un nombre plus grand d'élèves qu'en 1996, même avant le cours sur les réels non décimaux fait par le professeur) ;
- pour prouver que (P_n) n'est pas majorée, on peut prouver que $P_n > M$, où M est un nombre arbitraire, ou une puissance de 10 arbitraire (« il faut le faire dans le cas général, le cas général c'est 10^x » dit un élève).

D'autre part :

- le travail avec la fonction logarithme se déroule sans encombre pour (P_n), mais pour (A_n) certains élèves (un groupe) n'isolent pas le terme $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ et écrivent $\log\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \log 1 - \log\left(\frac{4}{9}\right)^n = \log 1 - n\log\frac{4}{9}$, puis n'arrivent pas à conclure ; les autres groupes ne rencontrent pas de difficultés ;
- des élèves posent des questions comme : « Alors est-ce qu'une suite qui tend vers l'infini, c'est la même chose qu'une suite non majorée ? », question que le professeur ne trouve pas le temps de traiter dans le courant de la situation. Mais on peut avancer que ce type de question, non pris en charge habituellement par les élèves, serait à introduire dans la suite du travail, en fournissant un milieu pour les traiter ; car ce type de question est fondamental dans la conception que peut avoir l'élève d'une suite tendant vers l'infini ;
- la question de savoir si (A_n) est majorée est également posée, et résolue algébriquement comme la première année ; mais un groupe avance que (A_n) est majorée, car elle a une limite qui est le plus petit des majorants (ils l'énoncent exactement dans ces termes mais bien entendu ils ne savent pas le prouver).

Globalement on peut avancer que la situation a permis de poser un certain nombre de questions tout à fait fondamentales relatives aux nombres réels et aux limites ; certaines de ces questions ont pu être confrontées au milieu du flocon, et être l'occasion d'une interaction de connaissances professeur/élèves. Cependant une partie de ces questions n'a pu être exploitée autant qu'il aurait été souhaitable, et ceci essentiellement à cause des contraintes temporelles de l'institution. Néanmoins, une analyse plus fine des possibilités engendrées par ces questions (nombres réels et calculatrices, suites non majorées ne tendant pas vers l'infini, limite et majorant, ...) et une organisation du milieu et du jeu adaptée, permettraient sans doute que les élèves et le professeur mettent en œuvre, ensemble, davantage de connaissances à propos de ces questions.

3.5 Conclusions

1) Sur les objectifs de la situation

Points positifs
La situation s'est jouée conformément à ce qui avait été prévu ; la dialectique : suite croissante tendant vers l'infini / suite croissante convergente, a fonctionné. Les critères de validité ont pu être mis en œuvre, et à partir de celui qui a été donné pour (P_n), les élèves ont trouvé celui qui était adapté au cas d'une suite convergeant vers zéro.
On peut supposer que ces critères de validité, étant d'un maniement relativement aisé, du moins pour des suites simples, font bien partie des savoirs utiles à la validation que les élèves pourront réinvestir pour l'étude des limites ; il faudrait néanmoins prévoir un temps pour le réinvestissement et l'entraînement (travail de la technique) avant de vérifier ce point.
Le calcul de (A_n) conduit à poser des questions fondamentales sur les nombres réels, en particulier les réels non décimaux.
La situation permet d'institutionnaliser une définition correcte d'une suite tendant vers « plus l'infini », et d'une suite convergeant vers zéro, tout en ne sacrifiant pas le sens.

Questions à travailler
La situation du flocon met en jeu deux suites croissantes, dont l'une tend vers l'infini, l'autre ayant une limite. Le fait que les deux suites soient croissantes induit des propriétés particulières qui peuvent ensuite, si les élèves les généralisent en théorèmes pour les suites quelconques, s'ériger en obstacles [97]. C'est un point qui avait été repris par Legrand [78] et qui avait conduit, pour la situation du pétrolier, à choisir une suite qui oscille autour de sa limite. Ce choix conduit néanmoins à des validations hors de portée des élèves, ou du moins le professeur est obligé de faire un apport massif de savoirs pour valider la convergence, et ces savoirs ne sont pas institutionnalisables et réinvestissables à ce niveau. C'est pourquoi la situation du flocon met en concurrence deux suites (en fait, une suite et une série) géométriques croissantes. Cependant il sera nécessaire de confronter ensuite les élèves à des suites moins régulières.
À cette occasion on peut envisager de construire un problème qui permette de se confronter aux questions posées qui n'avaient pu être travaillées, comme la différence entre suite non majorée et suite tendant vers « plus l'infini ». On peut aussi prévoir d'introduire une situation pour travailler les suites adjacentes (cf. la remarque d'un élève sur la limite comme plus petit majorant), ce qui peut conduire à un travail intéressant sur la topologie de $\mathbb{R}$.
Le travail sur les nombres pourrait aussi sans nul doute être approfondi ; mais cela nécessiterait la construction d'une situation spécifiques [18], [12], [24]. Il y a en effet trop de connaissances à traiter, et de savoirs à introduire, pour que cela puisse se faire en marge d'une situation consacrée à une autre notion, même si cette dernière est étroitement reliée aux problèmes numériques et aux propriétés de la topologie de $\mathbb{R}$. Les élèves se sont confrontés à un milieu qui nécessitait pour la validation, des éléments théoriques de l'analyse : à partir de questions sur des processus infinis, des infiniment grands et des infiniment petits, mettre en œuvre des procédés impliquant qu'à partir d'un certain rang, tous les termes d'une suite sont plus grands ou plus petits qu'un nombre arbitraire, fixé à l'avance. La situation ne permet pas d'entrer plus avant dans le concept de limite, ou les méthodes de validation de l'analyse. En ce sens, elle nécessiterait une suite qui pourrait prévoir d'entraîner les élèves à ces méthodes de validation, sur un champ d'exemples suffisamment varié. Ce travail sera fait au niveau terminale et surtout en licence.

2) Bilan des apports de la situation

Etudier le comportement de fonctions ou de suites et engager les preuves des conjectures.
Organiser l'activité des élèves en appui sur des objets qu'ils peuvent construire à partir d'objets suffisamment familiers, afin qu'ils puissent interpréter les résultats de leurs actions.
S'assurer que les élèves ont des connaissances suffisantes pour émettre et étayer des conjectures, ceci bien qu'ils ne disposent pas encore de la connaissance visée.
Faire émerger la nécessité de prouver les conjectures et pour cela d'introduire sous une forme ou sous une autre une définition de la limite.
Et donc la situation permet de travailler les points suivants :

Sur le plan conceptuel, faire émerger un questionnement sur la distinction entre infini potentiel et infini actuel :
Infini potentiel : Quel que soit l'entier n considéré, on peut construire F_{n+1} à partir de F_n. Chaque figure F_n est un polygone, son aire et son périmètre sont finis.
Infini actuel : On considère la *figure* F obtenue à l'issue du processus.

Par rapport aux obstacles identifiés cela permet de remettre en cause la conception selon laquelle toute suite strictement croissante converge vers $+\infty$, et le théorème en acte selon lequel toute suite croissante majorée par un nombre réel M converge vers M.
Ré-interroger la réduction de l'analyse au numérique : mettre en valeur les liens entre l'analyse et la mesure des grandeurs.

Un travail possible sur l'algorithmique et sur la récurrence Programmation du processus d'engendrement de la figure. Tracé de la figure avec Géogebra, Python ou Logo, ce qui met en jeu la récursivité.
Identification de ce que « l'algorithme » ne s'arrête pas sauf si on ajoute un critère d'arrêt.
Étude de la preuve de l'algorithme avec critère d'arrêt.
Programmation du calcul de l'aire et du calcul du périmètre ? lien avec la récurrence ? choix des variables.

Reprise des notions d'aire et de périmètre
Mise en œuvre de l'équidécomposabilité des aires sur des figures génériques.
Mise en œuvre (implicite) de l'axiome de la mesure (additivité).
Travail sur l'effet de l'agrandissement (homothétie) sur l'aire d'une part, sur le périmètre d'autre part, autrement dit entre la dimension D d'une figure et l'effet d'une homothétie de coefficient k sur cette figure : la mesure est multipliée par k^D . *Ici D est égal à* 1 *ou* 2 *pour les figures F_n selon que l'on considère le polygone ou la surface qu'il délimite.*
La courbe *Flocon de von Koch* délimite une surface d'aire finie tout en ayant un périmètre infini. Il s'agit donc d'un objet dont la dimension n'est pas un entier, ce qui introduit la nécessité de considérer d'autres types de mesure, par exemple la mesure de Hausdorff.

Comment définit-on une fractale ?
C'est une figure qui possède une propriété d'autosimilarité par agrandissement ou réduction. Elle peut s'obtenir à partir d'un polygone par un procédé d'engendrement récursif à partir d'un générateur initial. Ces figures ont été introduites par Peano (1858-1932), et utilisées par Mandelbrot (1924-2010), qui les a caractérisées par le fait que leur dimension de Hausdorf est supérieure strictement à leur dimension topologique (pour le flocon de

von Koch, la dimension topologique est 1, et la dimension de Hausdorf est $\frac{\ln 4}{\ln 3}$).
Les fractales sont utilisées pour modéliser des situations irrégulières ou de chaos. Pour en savoir plus, le site de G. Villemin [67] ou encore l'ouvrage d'Alain Le Méhauté [85].

3) À quels niveaux faire travailler sur cette situation ?

Au lycée
Pour donner du sens à la notion de limite de suite, motiver les premières définitions pour dépasser les approches informelles, pour questionner les relations entre infini potentiel et infini actuel ; pour travailler sur la modélisation, en TPE, dans les relations maths/physique ou maths/biologie ; ou encore dans un travail associant Mathématiques et Philosophie (exemple de thématique : la raison et le réel).

En licence première ou deuxième année, ou en classe préparatoire
Pour donner du sens à la notion de limite et en motiver la définition formelle ; pour servir de situation de référence pour le cours d'analyse, pour remettre en cause les conceptions erronées et pour questionner les relations entre infini potentiel et infini actuel. C'est aussi une situation pour travailler la récurrence dans un cas non trivial, et pour travailler les algorithmes.

En licence troisième année ou en Master première année
Dans le cadre d'un cours sur la théorie de la mesure ; par exemple un TP sur les objets fractals.
On peut aussi utiliser cette situation dans un mémoire de recherche.

En master Métiers de l'Enseignement de l'Éducation et de la Formation (second degré)
Pour revisiter le concept de limite de suite, les différentes notions associées et débusquer les conceptions erronées. Pour travailler les liens entre les mathématiques du secondaire et les mathématiques du supérieur, entre mathématiques et physique, entre mathématiques et réalité. Pour travailler sur les principales notions de la théorie des situations didactiques (variable didactique, situation d'action, de formulation ou de validation, milieu d'une situation).

4 Motivations possibles à la formalisation de la notion de limite d'une suite

4.1 Pourquoi approcher à ε près, et pourquoi pour des n arbitrairement grands ?

Dans la définition de la limite d'une suite, on demande d'approcher la limite r à ε près pour tous les n assez grands (la formulation « $\ldots\forall\varepsilon > 0\,\exists N$ tel que $\forall n \geq N\ldots$ »). Pourquoi avoir fait ce choix ? Pourquoi ne pas avoir dit « pour des n arbitrairement grands » ou « pour une infinité de n » (c'est équivalent, et c'est équivalent à « il existe une sous-suite (u_{n_p}) qui tend vers r quand p tend vers $+\infty$ » : à faire montrer !) ? Et pourquoi pour tout ε ?
Comprendre **la raison de ce choix** peut favoriser sa bonne compréhension et permettre aux étudiants de surmonter les difficultés logiques de la formulation de la limite, avec ses trois quantificateurs $\forall\varepsilon$, $\exists N$ et $\forall n$. Certes, il s'agit là d'un postulat, mais il vaut la peine de le tester, sutout si on l'accompagne de dispositions didactiques susceptibles de favoriser les discussions entre étudiants et entre étudiants et enseignant.

La première idée, c'est **qu'on cherche à approcher certains nombres réels particuliers intéressants**, tels π, $\sqrt{2}$, e, $\gamma, \cdots$ par des suites de nombres connus, si possible des rationnels. On cherche aussi à approcher des nombres définis par des équations, ou par un procédé particulier (intégrale, séries,...).
Rappelons d'abord qu'il faut familiariser les étudiants avec **le vocabulaire et le sens de l'approximation**, plus ou moins disparus des pratiques du second degré. On dit qu'un nombre a est une approximation de x à 10^{-n} près si on a l'inégalité

$$|x - a| \leq 10^{-n},$$

et chercher une approximation de x à 10^{-n} près, c'est chercher un nombre a vérifiant cette inégalité. Le nombre 10^{-n} s'appelle l'ordre d'approximation. Le nombre 10^{-n} est à choisir chaque fois en fonction des besoins, et on peut le généraliser à un nombre $\varepsilon > 0$ qu'on se donne *a priori*, mais qu'on va avoir de bonnes raisons, dans les processus de limite, de choisir arbitrairement petit, mais **fixé dans les raisonnements** : c'est ce qu'on appelle le point de vue statique, complément nécessaire au point de vue dynamique, sur l'idée d'approximation.
Cet aspect approximation de l'idée de limite est bien analysé dans [13], et la différence des deux aspects statique et dynamique se voit clairement en lisant deux textes de Cauchy [30] (1821, page 49), de style statique et très efficace pour montrer une convergence, et de Liouville [79] (1998, édition originale 1848, page 7) s'appuyant uniquement sur le point de vue dynamique, et échouant de ce fait à montrer qu'une fonction de dérivée nulle est constante.
Dans le contexte de l'approximation au moyen d'une limite de suite, on cherche à obtenir un **ordre d'approximation** *a priori*, en fonction des besoins ; on note ε cet ordre d'approximation, c'est-à-dire qu'on cherche à obtenir un n tel que $|u_n - r| \leq \varepsilon$, si (u_n) est la suite d'approximations qu'on espère avoir trouvée du nombre r. Par exemple, selon les besoins de précision, on voudra approcher à $\varepsilon = 10^{-3}$ près, ou $\varepsilon = 10^{-6}$ près, ou $\varepsilon = 10^{-20}$ près...Cette préoccupation explique la locution « pour tout $\varepsilon > 0$ », en abrégé : $\forall\varepsilon > 0$, qui signifie qu'on cherche **des ordres d'approximations arbitrairement petits**, mais fixés dans les raisonnements.

Ensuite, il est facile de se rendre compte que si on a une suite de **rationnels** (u_n) qu'on espère approcher un nombre **irrationnel** r, alors pour avoir des approximations de plus en plus fines de r par cette suite, il faudra nécessairement prendre des n de plus en plus grands (**faire faire ce point par les étudiants**). Mais ce point ne permet pas encore de trancher le choix entre « des entiers n de plus en plus grands »(formulation « $\cdots \forall N, \exists n \geq N \cdots$ ») et « tous les entiers assez grands ».

Nous allons dans ce qui suit comparer deux manières d'approcher par exemple le nombre $\sqrt{2}$, et comprendre ce qui incite à trancher pour la bonne formulation de la notion de limite. Du point de vue didactique, l'idée serait de **faire faire cette étude aux étudiants avant de leur donner la notion de limite, en ne s'appuyant que sur l'idée intuitive de limite, en utilisant le discours « méta [27] » précédent** pour justifier la définition choisie.
Il s'agirait alors d'une approche de la notion de limite différente de celles suggérées par les diverses ingénieries présentées dans les chapitres précédents, approche ayant pour but de **motiver** cette notion, **dans la mesure où la définition formelle serait justifiée pour les étudiants**. L'idée est que le caractère parachuté de la notion de limite est due aux choix de l'enseignement (d'origine bourbakiste dans les cours actuels ?) de partir de la définition formelle, sans donner ni faire découvrir aux étudiants de « raison d'être » de la formulation choisie.
Mais avant d'étudier le cas emblématique de la racine carrée de 2, il importe de faire travailler les étudiants sur l'idée essentielle de l'approximation de nombres par des suites.

4.2 Approximations de nombres intéressants

L'idée, tout en utilisant d'abord une idée naïve de convergence, telle qu'héritée de l'enseignement secondaire, est d'approcher des nombres intéressants, connus des étudiants ou à construire par des moyens élémentaires ; dans cette première approche, on peut plus ou moins s'intéresser à une notion naïve de vitesse de convergence.

4.2.1 Une approximation rationnelle non monotone de $\sqrt{2}$

Pour $\sqrt{2}$, et afin de ne pas avoir de suite monotone, on peut utiliser la suite

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}.$$

On obtient ainsi une suite classique « en colimaçon », et l'étude va réinvestir des pratiques de terminale, y compris une approche de la vitesse de convergence géométrique.

4.2.2 Une suite convergeant vers un nouveau nombre : γ

Une suite intéressante est celle qui converge vers le nombre γ. On pose

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Avec la relation $\ln(1+x) \leq x$, il est facile de voir que γ_n est décroissante et que $\gamma_n \geq \frac{1}{n}$. Donc il est intuitif (car on se borne ici à la notion naïve de convergence) que $\gamma_n \to \gamma \geq 0$.

27. Voir le paragraphe 5-2 de cette partie pour une définition

Ensuite, avec l'inégalité $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ et la relation $\ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(\frac{k+1}{k})$, on voit que $\gamma_n \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} > \frac{1}{6}$; donc $\gamma \geq \frac{1}{6}$. En essayant d'approcher avec un calculateur le nombre γ à 10^{-1} ou 10^{-2} près, on se rend compte de la vitesse de convergence très lente de la suite γ_n. Il peut être intéressant de signaler aux étudiants qu'on ignore même si ce nombre γ, qui s'introduit dans de nombreux chapitres de l'analyse, est ou non irrationnel.

4.2.3 Approximation de π

On peut étudier la suite des périmètres des polygones réguliers convexes à 2^n côtés incrits dans le cercle unité, pour approcher le nombre π (mais la suite n'est pas une suite de nombres rationnels).
On a noté 2π le périmètre (dont l'existence provient d'une intuition géométrique) du cercle unité. Notant a_n la longueur du côté du polygone régulier P_n à 2^n côtés, inscrit dans le cercle unité, avec $a_2 = \sqrt{2}$, on fait calculer aux étudiants l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n. Ils en déduisent une relation de récurrence entre les périmètres de P_n et P_{n+1}, qu'on fait exploiter numériquement pour montrer des approximations de 2π. On peut alors énoncer l'irrationalité de π, en renvoyant à plus tard une preuve classique. On peut aussi dans cette partie utiliser les polygones circonscrits, et aussi étudier l'aire du disque unité, voir [112] (chap 3).

4.2.4 Approcher le nombre e par la série classique

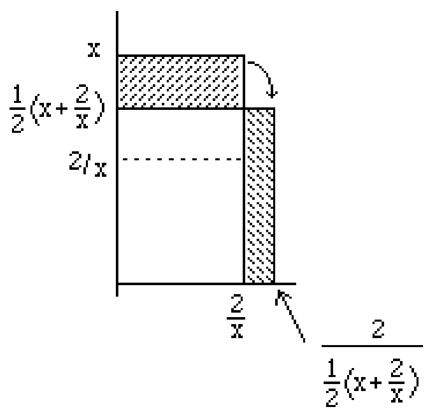
En prouvant les inégalités

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n.n!},$$

on montre facilement la convergence, et on a en prime facilement l'irrationnalité du nombre e (voir aussi III-5-4).

4.3 L'approximation de $\sqrt{2}$ par la suite de Héron

C'est l'occasion de jouer sur le changement de cadres, entre géométrie : diagonale du carré, et algèbre/analyse : résolution de l'équation $x^2 = 2$. Cette dernière peut donner plusieurs preuves classiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (son existence allant de soi au début), mais la preuve géométrique est aussi instructive. On peut mettre en œuvre un algorithme de dichotomie, ou mieux de « décatomie », pour faire apparaître un grand nombre de décimales successives de $\sqrt{2}$.
Un changement de cadre amène les étudiants à transformer peu à peu un rectangle de base 1 et hauteur 2 en des rectangles successifs de même aire 2 mais se rapprochant de plus en plus d'un carré.



L'idée est de transporter la moitié de l'aire en excédent par rapport au carré de côté 1, pour construire un rectangle d'aire 2, de hauteur plus petite que 2 et de base plus grande que 1, donc plus proche d'un carré : un rectangle de hauteur 3/2 et de base 4/3. On peut alors proposer aux étudiants de recommencer la même opération sur ce nouveau rectangle, etc, et construire ainsi une suite de rectangles de plus en plus proches d'un carré, et ayant constamment une aire égale à 2.
Les étudiants peuvent montrer que la différence entre la hauteur et la base des rectangles diminue « vite ».
On renvoie au cadre numérique l'approximation obtenue dans le cadre géométrique, sous la forme d'une suite de nombres rationnels :

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}).$$

C'est la méthode de Héron pour approcher $\sqrt{2}$. On peut alors faire évaluer aux étudiants une « vitesse de convergence quadratique » de la suite de Héron, pour qu'ils voient que « le nombre de décimales exactes double à peu près à chaque itération » (voir annexe 1). Ce qu'il faut noter, c'est que l'inégalité $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq 2(0,3)^{2^n}$ permet de montrer (voir l'annexe 1) que si on se donne $\varepsilon > 0$ alors si on pose

$$N = 1 + \left\lfloor \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{\ln(\frac{\varepsilon}{2})}{\ln(0,3)} \right) \right\rfloor, \text{ **pour tous les** } n \geq N \text{ on a bien } 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \varepsilon.$$

Ce nombre N est ainsi calculable, et pour n'importe quel entier plus grand l'aproximation est au moins aussi bonne. Et la convergence est très rapide.
Si on ne suppose pas connu le logarithme, on peut utiliser l'inégalité de Bernoulli : si $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$, et chercher n pour que $\varepsilon \geq 2(0,3)^{2^n}$ (le faire en exercice, en posant $\dfrac{1}{0,3} = 1 + a$ puis $2 = 1 + 1$). Et remarquer alors qu'on n'obtient sur le nombre N qu'une **condition suffisante, et pas du tout nécessaire !** Et cet aspect est très important : les étudiants sont habitués à raisonner algébriquement, c'est-à-dire souvent en conditions équivalentes ; c'est donc un raisonnement de type assez nouveau pour eux : se débrouiller pour qu'une certaine inégalité soit vraie, assurant l'approximation souhaitée, en quelque sorte par « n'importe quel moyen ! ».

4.4 Etude de la manière dont on peut approcher $\sqrt{2}$ par la suite $v_n = 2\cos n$

On va maintenant proposer un autre mode d'approximation de $\sqrt{2}$. Il s'agit de se convaincre numériquement que cette suite (v_n) a la propriété suivante.

Proposition 1 *Pour tout $\lambda \in [-2,\, 2]$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des entiers n aussi grands qu'on veut tels que $|\lambda - 2\cos n| \leq \varepsilon$. C'est en particulier le cas pour $\lambda = \sqrt{2}$.*

D'abord, le calcul d'un grand nombre de termes (pris au hasard) étonne les étudiants : les valeurs sont très dispersées dans [-2,2]. Cela peut motiver l'énoncé. Pour que les étudiants se convainquent de ce résultat, on peut construire un petit programme MAPLE très simple qui permet, pour $x \in [-2,\, 2]$, $\varepsilon > 0$, N et p dans $\mathbb{N}$, de déterminer les n dans l'intervalle $[N,\, N + p]$ tels que $2\cos n$ approche x à ε près. Les étudiants peuvent alors voir, par exemple, que dans la plupart des tranches de 100 000 termes consécutifs on trouve environ

4 ou 5 termes de la suite qui approchent $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près ; et faire un constat analogue pour d'autres nombres λ de $[-2, 2]$ tels $\sqrt{3}$, 1, $\frac{\pi}{2}\dots$
Voici ce programme :

```
DensCOS := proc(e ::numeric, x ::numeric, N ::integer, p ::integer) local i ;
for i from N to N + p
        do
          if   is(abs(evalf(e − 2 ∗ cos(i), 10)) < x)
               then print(i, evalf(2 ∗ cos(i), 10))
          end if
        end do
end proc
```

Il n'y a plus qu'a le particulariser pour des valeurs des paramètres. Par exemple, on trouve :

DensCOS(evalf($\sqrt{2}$, 10), 10^{-4}, 1000000, 100000) ;

1015973 : 1.414232203
1016683 : 1.414146940
1067437 : 1.414117446
1068147 : 1.414202710
1068857 : 1.414287970

ou

DensCOS(evalf($\sqrt{2}$, 10), 10^{-4}, 10000000, 100000) ;

10030715 : 1.414178205
10031425 : 1.414263465
10082534 : 1.414283760
10083244 : 1.414198500

ou

DensCOS(evalf($\sqrt{3}$, 10), 10^{-4}, 1000000, 100000) ;

1024077 : 1.731988301
1024787 : 1.732048593
1025497 : 1.732108878
1058623 : 1.732129730
1059333 : 1.732069447
1060043 : 1.732009157

ou

DensCOS(evalf(1, 10), 10^{-4}, 1000000, 100000) ;

1006804 : 0.9999059630
1007514 : 1.000010388
1076606 : 1.000046508
1077316 : 0.9999420850

ou

DensCOS(evalf($\frac{\pi}{2}$, 10), 10^{-4}, 10000000, 100000) ;

10048523 : 1.570846993
10049233 : 1.570772358
10049943 : 1.570697717
10064726 : 1.570754591
10065436 : 1.570829228

On trouvera dans l'annexe 2 une preuve de la proposition 1.

4.5 Conclusion sur la raison d'être du choix de la formalisation de la notion de limite

Si on compare les deux manières d'approcher $\sqrt{2}$, par la suite de Héron et par la suite $(2\cos n)$, on constate plusieurs choses.
D'abord, et même si des termes d'indices de plus en plus grands des deux suites approchent arbitrairement $\sqrt{2}$, on n'a dans le deuxième cas aucun moyen de déterminer un n tel que $(2\cos n)$ approche $\sqrt{2}$ à un ordre d'approximation donné ; de plus, si on en a trouvé un, pour un p nettement plus grand on peut être plus proche d'un autre nombre de $[-2, 2]$ que $\sqrt{2}$, par exemple $\sqrt{3}$ ou 1 ! La suite $(2\cos n)$ est donc un moyen très peu efficace d'approcher $\sqrt{2}$, on ne peut aisément contrôler les approximations obtenues.
On choisit donc de formaliser la notion de limite pour avoir les propriétés du type de celles de la suite de Héron : pour un ordre d'approximation donné ε, on est sûr d'y arriver **pour tous les entiers n à partir d'un certain rang N.**

On peut ainsi espérer que les réflexions suscitées chez les étudiants par l'étude de ces deux suites rendent pour eux nécessaire et naturelle la formalisation choisie pour la notion de limite, et leur permettent de mieux comprendre la logique qui y est à l'œuvre. Et après avoir donné la définition formelle de la convergence, l'unicité de la limite permet de voir **l'efficacité** de cette définition. Elle permet aussi de prouver simplement les « théorèmes de limite automatique »(somme, produit,...), puis de rentrer vraiment dans l'étude de la convergence.

Annexe 1 : sur la suite de Héron

On a posé $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$. On a facilement

$$0 < u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n} - 2\sqrt{2}) = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} < \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2}.$$

Comme $u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} < 0,6$, une récurrence aisée montre que

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leq \frac{0,6^{2^n}}{2^{2^n - 1}} = 2(0,3)^{2^n}.$$

Si on veut alors avoir $u_n - \sqrt{2} \leq \varepsilon$, **il suffit donc** de majorer $2(0,3)^{2^n}$ par ε. Il ne reste plus qu'à prendre les logarithmes deux fois pour trouver le N annoncé au paragraphe 3.
De plus, l'inégalité montre que si $u_n - \sqrt{2} < 10^{-p}$ alors $u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{10^{-2p}}{2}$; autrement dit, dans la plupart des cas, le nombre de décimales exactes obtenues à un rang n double à l'itération suivante.
Remarquons enfin que la différence entre la hauteur et la largeur du rectangle obtenu au rang n , c'est-à-dire $u_{n+1} - \frac{2}{u_{n+1}}$ vaut

$$\frac{\left(u_n - \frac{2}{u_n}\right)^2}{2\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)} < \frac{\left(u_n - \frac{2}{u_n}\right)^2}{2}$$

Elle décroit avec le même ordre de rapidité que la vitesse de convergence de la suite (u_n) vers $\sqrt{2}$.

Annexe 2 : sur la suite $(2\cos n)$

1. Soit I ou J l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou T (le cercle unité) ou $[a,\, b]$, soit $f : I \to J$, continue et surjective, et soit $D \subset I$.
   Alors si D est dense dans I, $f(D)$ est dense dans J (où « D dense dans X » signifie « tout point de X est limite d'une suite de points de D »).
2. Soit G un sous-groupe (notion à définir) de $\mathbb{R}$. S'il existe des $g \in G$ positifs et arbitrairement petits, alors G est dense dans $\mathbb{R}$ (soit g tel que $0 < g < \dfrac{1}{n}$, et soit un x réel ; il est dans l'un des intervalles $[kg,\, (k+1)g]$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, donc si x_n est ce nombre kg, alors $|x - x_n| \leq g \leq \dfrac{1}{n}$).
3. Soit α un nombre irrationnel (qu'on peut supposer dans $]0,\, 1[$). Alors le sous-groupe $G = \{n + p\alpha \mid n, p \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (sinon-utiliser la borne inférieure - il existe un minimum g_0 dans l'ensemble $G \cap \mathbb{R}^{*+}$, et comme on voit qu'alors $g_0\mathbb{Z} = G$, g_0 serait rationnel, et donc α aussi).
4. Prenons $\alpha = 2\pi$. Alors $G = \{n + 2\pi p \mid n, p \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   Soit $f : \mathbb{R} \to T : x \mapsto e^{ix}$ continue surjective.
   Alors $f(G) = \{e^{in}e^{2i\pi p} \mid n, p \in \mathbb{Z}\} = \{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans T.
5. Mais l'application *cos* : $T \to [-1,\, 1]$ est continue surjective, donc
   $\cos[f(G)] = \{\cos n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, qui coincide avec $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,\, 1]$ (attention, ici on utilise l'application *cos* définie sur le cercle unité : c'est l'abscisse d'un point de ce cercle).
6. Soit $\varepsilon > 0$, N un entier, et $A = \{2\cos 0, 2\cos 1 \cdots, 2\cos N\}$. Si $\lambda \in [-2,\, 2]$ on l'approche à $\varepsilon/2$ près par un $y \notin A$; soit $d > 0$ la distance de y à A ; on approche y par un $2\cos n$, de sorte que $|y - 2\cos n| \leq \min(\varepsilon/2, d/2)$. Alors nécessairement $n > N$ et $|\lambda - 2\cos n| \leq \varepsilon$.

5 Le raisonnement à ε près, emblématique de l'analyse, et instrument indispensable de ses preuves

5.1 Introduction

Pourquoi le raisonnement à ε près est-il spécifique de l'analyse, et indispensable dès ses premiers résultats ? La raison profonde est que l'analyse se fait dans $\mathbb{R}$ et qu'un nombre réel est rarement connu autrement que par une suite d'approximations, que ce soit via la définition générale des réels, ou avant même, dans l'histoire comme dans l'enseignement, par le mode de définition ou de construction de nombres réels particuliers, tels π, $\sqrt{2}$, γ, e ...

Dès lors, pour montrer une inégalité ou une égalité entre deux réels x et y *a priori* quelconques, une méthode très fréquente est, en utilisant des suites approximantes, de montrer les deux assertions :

$$(\mathbf{a})\ \ \forall\varepsilon > \mathbf{0},\ \ \mathbf{x} \leq \mathbf{y} + \varepsilon\ ;$$
$$(\mathbf{b})\ \ \forall\varepsilon > \mathbf{0},\ \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \varepsilon.$$

L'assertion (a) implique l'inégalité $x \leq y$, et l'assertion (b) implique l'égalité $x = y$. Il faut d'ailleurs remarquer que c'est déjà le cas dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels (quitte à prendre des ε rationnels, par exemple de la forme 10^{-n}). Les deux implications ci-dessus sont rarement explicitées dans l'enseignement, ou plutôt elles y sont « naturalisées » : les enseignants pensent implicitement qu'elles sont naturelles et d'ailleurs immédiates pour les étudiants ; de plus il est rare qu'on explique aux étudiants pourquoi le recours à ce type de **raisonnement à ε près** est nécessaire : dit autrement, aucun discours « méta » n'est tenu à son propos, alors même que pendant le cours les enseignants auront à l'utiliser plusieurs fois.

Il en résulte que lorsqu'on soumet aux étudiants des questionnaires portant, d'une façon ou d'une autre, sur ce qu'on peut déduire des assertions (a) ou (b), les taux d'insuccès sont grands. *A fortiori* ne faut-il pas s'attendre à ce que le raisonnement à ε près soit disponible chez les étudiants, qu'ils pensent spontanément à y avoir recours.
Nous pensons que cette disponibilité doit être l'un des objectifs fondamentaux d'un enseignement d'analyse de première année d'université scientifique. Dans ce qui suit, nous allons examiner divers points de l'analyse élémentaire où ce raisonnement peut être mis en valeur, en regardant en particulier, d'une part **son rapport étroit avec le concept de limite**, et de l'autre **le discours « méta » qu'on peut tenir chaque fois qu'on l'utilise**. Ce type de discours est essentiel pour faire comprendre aux étudiants le **pourquoi** de certains concepts mathématiques (origines, objectifs, raisons d'être), et le **comment** de leurs fonctionnement (types variés de méthodes ...), tant dans les cours que dans les problèmes.
Précisons un peu plus ce que nous entendons par discours « méta » : il s'agit d'un discours explicite de l'enseignant qui porte sur la connaissance des étudiants sur leurs connaissances en mathématiques ; ou bien sur leur manière de les apprendre ; ou encore sur les mathématiques elles-mêmes (fonctionnement, utilisation, distinction entre domaines particuliers ou généraux, rôle des détours théoriques...) ; ou encore sur les mathématiques précises enseignées, par exemple création de problématiques, introduction de méthodes ou d'éléments amenant une réflexion sur des concepts particuliers, des questionnements sur le rôle

respectif des divers énoncés dans une progression, etc.
Ce discours doit être **écrit** chaque fois que possible par l'enseignant, **noté** par les étudiants. Il est souhaitable qu'il s'accompagne de la mise en œuvre avec ceux-ci de **situations didactiques** propres à les amener à prendre conscience du pourquoi et du comment, et **à élaborer eux-mêmes** une partie du discours « méta ». Il s'agit d'activités des étudiants, choisies par l'enseignant pour que les étudiants prennent conscience de l'utilité de ces connaissances générales, et s'en saisissent eux-mêmes comme instrument de compréhension des concepts et de résolution de problèmes, même si ces connaissances sortent du cadre traditionnel des énoncés de théorèmes ou des recettes de calcul.

5.2 Premières utilisations, autour de la notion de limite

5.2.1 L'unicité de la limite

Le premier résultat qu'on donne sur la notion de limite d'une suite $(u_n)_n$ est l'unicité de la limite. Comment montrer que si r et s sont deux limites de cette suite, elles sont égales ? Comme r et s ne sont connues que par les **approximations** qu'en donnent la suite, et non directement (en général), la méthode raisonnable est effectivement de montrer que r et s sont **« arbitrairement proches »**, c'est-à-dire vérifient l'assertion (b) (le vocabulaire noté en gras est à introduire à ce moment précis, s'il ne l'a pas été avant, il fait partie des commentaires méta à donner aux étudiants, à écrire au tableau et à faire noter par les étudiants). Il faut donc **se donner un $\varepsilon > 0$ arbitraire** (rôle du $\forall$), et montrer l'inégalité **souhaitée** $|r - s| < \varepsilon$. On va donc **approcher à $\varepsilon/2$ près** chacune des limites :
il existe N_1 tel que pour tous les $n \geq N_1$, $|u_n - r| \leq \varepsilon/2$,
et il existe N_2 tel que pour tous les $n \geq N_2$, $|u_n - s| \leq \varepsilon/2$,

alors, par **l'inégalité triangulaire**, $|r-s| \leq |r-u_n|+|u_n-s|$; si $n \geq N := \max(N_1, N_2)$, on a $|r - s| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$: c'est l'assertion (b), car ε a été choisi arbitraire.

Parmi les autres commentaires méta à tenir, il y a évidemment à nommer **« la méthode du découpage de ε en deux »** , méthode qui resservira souvent. On peut aussi donner sa variante équivalente, en jouant sur le $\forall$ de la définition : partir de deux fois le même ε, et obtenir 2ε à la fin (« méthode du 2ε »).

On peut aussi remarquer que dans la définition de la limite choisie, **le rôle du « pour tous les $n \geq N$ » a été essentiel**, et que si on n'avait gardé dans la définition que « pour des n arbitrairement grands » ou « pour une infinité de n », cas de la notion de valeur d'adhérence, on n'aurait pu montrer l'unicité de « la » valeur d'adhérence (faute de trouver nécessairement un n commun vérifiant les deux inégalités à la fois $|u_n - r| \leq \varepsilon/2$ et $|u_n - s| \leq \varepsilon/2$). Nous reviendrons sur ce point plus loin.
Bien entendu, le même argument est à reprendre avec l'unicité des limites de fonctions.
Remarque
On peut bien entendu montrer l'unicité de la limite par un raisonnement par contraposition élémentaire. On peut d'ailleurs montrer ainsi le prolongement des inégalités ou la proposition 2 ci-dessous sur la monotonie d'une fonction à dérivée $f' \geq 0$. Mais au fond cela revient chaque fois à refaire plus ou moins la preuve de ce que les inégalités ou égalités à ε près impliquent les inégalités ou égalités, c'est donc plus économique - et plus conforme au sens de l'analyse - de se ramener chaque fois au raisonnement à ε près.

5.2.2 Le prolongement des inégalités

Préalable : question de vocabulaire
Dans la suite, nous utiliserons souvent le vocabulaire : « pour n assez grand », « pour ε assez petit »,$\cdots$ Rappelons qu'il s'agit d'abréviations qui sous-entendent l'usage de quantificateurs existentiels et universels : « $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$ », « $\exists \eta > 0$ tel que $\forall \varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon < \eta$ ˇ $\cdots$
De même, l'expression (déjà utilisée) « approcher un nombre a à ε près » signifie : trouver un nombre x tel que $|a - x| \leq \varepsilon$.

Le prolongement des inégalités est l'énoncé qui affirme que si on a pour tout n assez grand $u_n \leq v_n$, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$, alors $u \leq v$.

Là encore, la preuve se fait par un raisonnement à ε près : on écrit

$$u - v = u - u_n + u_n - v_n + v_n - v \leq u - u_n + v_n - v \leq |u - u_n| + |v - v_n| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

si $n \geq \max(N_1, N_2)$ comme dans le paragraphe précédent.

Là aussi il faut tenir le **discours méta sur les raisons de la méthode utilisée** et sur la raison pour laquelle ce résultat ne marche pas pour les valeurs d'adhérence (par exemple avec $(-1)^n \leq (-1)^n + 1/2$).

5.2.3 La limite avec $\varphi(\varepsilon)$

Il s'agit d'étendre la « méthode du 2ε » à un cas plus général. Soit θ un nombre strictement positif, et soit

$$\varphi :]0, \theta[\to]0, +\infty[: \varepsilon \mapsto \varphi(\varepsilon)$$

une fonction φ vérifiant la condition $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varphi(\varepsilon) = 0$.
Si on a réussi à prouver que pour tout $\varepsilon \in]0, \theta[$ on a $|u_n - r| \leq \varphi(\varepsilon)$ à partir d'un certain rang N, alors $u_n \to r$ (**discours méta sur : raisonner avec ε assez petit suffit**).

Voici un exemple classique. On étudie la suite « pseudo-récurrente » définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{\frac{n}{n+1} + u_n}.$$

L'idée est que le comportement de la suite va être assez analogue à celui de la suite où le terme $\dfrac{n}{n+1}$ est remplacé par sa limite 1, au moins pour n assez grand (discours méta à tenir).
On précise alors ce constat intuitif :
pour un $\varepsilon \in]0, 1[$ donné on a donc pour un certain N : $1 > \dfrac{n}{n+1} \geq 1 - \varepsilon$ si $n \geq N$.
À partir de ce N, on va donc considérer les deux suites récurrentes (plus simples) où le terme variable $\dfrac{n}{n+1}$ est remplacé par $1 - \varepsilon$ et par 1 :

$$v_N = u_N \text{ et si } n \geq N\,, \quad v_{n+1} = \sqrt{1 - \varepsilon + v_n} \;\; ; \;\; w_N = u_N \text{ et si } n \geq N\,, \quad w_{n+1} = \sqrt{1 + w_n}.$$

Alors une récurrence simple montre qu'on a $\forall n \geq N$, $v_n \leq u_n \leq w_n$.
Mais on a facilement

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1 + \sqrt{5 - 4\varepsilon}}{2}$$

(on a supposé $\varepsilon < 1 < 5/4$; **occasion d'un discours méta : pourquoi a-t-on pu supposer cela ?**).
Donc, si $n \geq N_1 \geq N$, on a *à la fois* (il y a là un **autre discours méta à tenir** : pourquoi le même N_1 ?)

$$\frac{1+\sqrt{5-4\varepsilon}}{2} - \varepsilon \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \varepsilon$$

Du coup on peut encadrer $u_n - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$\varepsilon \geq u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq -\varepsilon - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5-4\varepsilon}}{2}\right) = -\varepsilon\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{5-4\varepsilon}}\right).$$

On peut donc appliquer la méthode annoncée avec $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{5-4\varepsilon}}\right)$ définie sur $]0, \dfrac{5}{4}[$.

Remarquons qu'on a utilisé **une version plus abstraite** du « théorème de comparaison » :

> si on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = w$, alors pour $\varepsilon > 0$ donné,
>
> on a, si n est suffisamment grand : $v - \varepsilon \leq u_n \leq w + \varepsilon$.

Il faut évidemment développer un discours méta à ce sujet : **souvent préférer un énoncé qui réutilise la définition de la limite** à un énoncé « automatique » où on n'a pas à utiliser ce que signifie « limite », du type des énoncés algébriques sur les limites.

5.3 Deuxièmes types d'utilisation avec les premiers résultats de l'analyse

5.3.1 Monotonie et signe de la dérivée

Supposons qu'on ait montré la

Proposition 2 *Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et si $\forall x \in I$ on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*

On peut alors prouver l'énoncé

Proposition 3 *Avec les mêmes hypothèses, si $f' \geq 0$ sur I alors f est croissante (au sens large) sur I.*

On montre l'inégalité souhaitée $f(x) \leq f(y)$ si $x < y$ **en la montrant à ε près**.
Soit donc $\varepsilon > 0$ donné, arbitraire, et considérons la fonction définie par $g(x) = f(x) + \varepsilon x$.
On a évidemment $\forall x \in I,\ g'(x) = f'(x) + \varepsilon \geq \varepsilon > 0$.
Par la proposition 1, si $x < y$ on a donc $g(x) < g(y)$, soit $f(x) + \varepsilon x < f(y) + \varepsilon y$ soit encore $f(x) - f(y) < \varepsilon(y - x)$.
Pour x et y donnés (avec $x < y$), ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$.
Une petite explication méta pour dire que ce n'est autre que l'assertion fondamentale (**a**), et donc que $f(x) \leq f(y)$.

Commentaire méta général : quand on a un énoncé avec inégalité stricte, on passe souvent à l'inégalité large par un raisonnement à ε près. Et **autre commentaire méta, un peu surprenant** : il est souvent plus facile de montrer un résultat d'inégalité stricte qu'un résultat d'inégalité large, en particulier **en raisonnant par contraposée**. On va le vérifier en montrant la proposition 2 par contraposée.

Remarque. Il y a une preuve classique par un « chemin déductif long », qui a été mis au point tout au long du XIXième siècle (voir [35]) :

de l'existence du maximum d'une fonction continue sur $[a, b]$ on déduit le théorème de Rolle, qui lui même entraîne le théorème des accroissements finis, qui implique enfin la relation entre monotonie et signe de la dérivée.

Cette preuve est celle présentée par la quasi-totalité des manuels. Antérieurement, il y avait des preuves « directes », mais souvent incorrectes ou incomplètes à nos yeux modernes. Avec la rigueur pratiquée de nos jours, et une claire notion de ce que sont les nombres réels, en particulier la complétude de leur ensemble, il est plus simple de revenir à ce type de preuve. C'est ce que nous proposons ici.

Preuve de la proposition 2
Supposons qu'il existe $x < y$ dans I tels que $f(x) \geq f(y)$. Si t est le milieu de $[x, y]$, alors, ou bien on a $f(x) \geq f(t)$, ou bien on a $f(t) \geq f(y)$ (sinon. . .).
On note $[a_1, b_1]$ l'intervalle le plus à gauche qui vérifie cette inégalité, et on recommence le même raisonnement avec $[a_1, b_1]$, etc. On fabrique ainsi par récurrence une suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$ vérifiant

$$b_n - a_n = \frac{y - x}{2^n} \text{ et } f(a_n) \geq f(b_n).$$

Alors (a_n) et (b_n) tendent vers un point commun c. On peut alors montrer que

$$(\star) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(c).$$

Comme $f(a_n) \geq f(b_n)$ on déduit que $f'(c) \leq 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Commentaire méta : avec l'hypothèse $f' \geq 0$ (et non $f' > 0$) on n'aurait pu conclure à une contradiction.

Reste à prouver $(\star)$. Nous laissons la démonstration au lecteur, signalons seulement qu'il faut distinguer deux cas : ou bien a_n ou (exclusif) b_n est égal à c partir d'un certain rang, ou bien $a_n < c < b_n$. Seul ce dernier cas n'est pas tout à fait immédiat. En cas de difficultés, voir l'annexe p.134.

Remarque. L'existence cruciale du point c où l'on va localiser la contradiction est le point clé où la complétude de $\mathbb{R}$ (via le théorème des intervalles emboîtés) est essentielle dans la démonstration.
Pour convaincre les étudiants de ce fait, il peut être utile de leur faire étudier la fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ définie par

$$f(x) = x\mathbb{1}_{]-\infty,\sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}} + (x-1)\mathbb{1}_{]\sqrt{2},+\infty[\cap\mathbb{Q}},$$

en leur faisant montrer successivement les points suivants :

— f est partout dérivable sur $\mathbb{Q}$;
— $f'(x) = 1$ sur $\mathbb{Q}$;
— f n'est pas croissante sur $\mathbb{Q}$.

Suivre pas à pas la démonstration précédente sur cette fonction est très instructif ...

Remarque. Le lecteur pourra choisir une autre preuve, s'appuyant sur le théorème de l'existence de la borne inférieure : si $a < b$ avec $f(a) \geq f(b)$, on note s, « le premier point de $]a, b[$ où $f(x) = f(b)$ » et en ce point on aurait $f'(s) \leq 0$.

5.3.2 Quand on approche une suite par sa limite à ε près : le théorème de Césaro, le partage d'une somme en deux paquets

Remarquons d'abord que c'est un peu bizarre : d'habitude, l'objectif d'avoir une suite (u_n), c'est de disposer d'un moyen d'approcher le nombre réel qui en est la limite. Mais quand on veut prouver un énoncé général portant sur une suite non précisée, supposée convergente, remplacer cette suite à ε près par sa limite peut être efficace (**discours méta, à rapprocher de ce qui a été fait pour la suite pseudo-récurrente du paragraphe 5.2.3**, où la méthode est utilisée pour une suite particulière : $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$). Voyons sur l'énoncé suivant comment cela peut marcher.

Proposition 4 (Théorème de Césaro) *Soit (u_n) une suite convergeant vers un nombre r. On considère la suite $v_n = \dfrac{u_1 + u_1 + \cdots + u_n}{n}$ (nommée « moyenne de Césaro » de la suite u_n). Alors (v_n) converge aussi vers le nombre r.*

Preuve . Dans la moyenne, si n est grand, tous les termes sont proches de leur limite r. Précisons cette intuition : si $\varepsilon > 0$ est donné, on écrit pour $n \geq N$: $u_n = r + \varepsilon_n$, avec $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$ (on a donc approché les u_n par r à ε près si $n \geq N$). On a alors

$$v_n = \frac{\displaystyle\sum_{1 \leq p \leq N-1} u_p}{n} + \frac{\varepsilon_N + \varepsilon_{N+1} + \cdots + \varepsilon_n}{n} + r\,\frac{n - N + 1}{n}$$

Si M est un majorant de la suite $(|u_n|)$ (elle est bornée car convergente), le premier terme est majoré en valeur absolue par $M(N-1)/n$, le deuxième par $\varepsilon(n-N+1)/n$, donc par ε. Si on soustrait alors r des deux membres, on obtient

$$|v_n - r| \leq \frac{M(N-1)}{n} + \varepsilon + \frac{M(N-1)}{n} = \frac{2M(N-1)}{n} + \varepsilon$$

Prenons alors $n \geq N_1 \geq N$, avec N_1 choisi assez grand pour que $2M(N-1)/N_1 \leq \varepsilon$. Pour $n \geq N_1$ on a donc trouvé que $|v_n - r| \leq 2\varepsilon$: c'est la définition de la convergence de la suite v_n vers r (avec 2ε au lieu de ε , voir un **discours méta antérieur**).

Il y a alors **tout un discours méta à tenir sur** : quand une suite s'écrit sous la somme d'une somme d'une suite de n termes $v_{n,p}$ pour $p = 1, 2, \cdots, n$ il est souvent utile, pour deviner sa limite, **de partager la somme en deux paquets**, l'un proche d'un nombre r si n est assez grand, puis de faire n encore plus grand pour que l'autre paquet tende vers 0. Nous allons voir en détail un autre exemple classique sur lequel développer cette méthode.

5.4 Un exemple supplémentaire : deux suites tendant vers la base e de l'exponentielle

En général, selon les choix des cours, on introduit le nombre e, soit comme $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ou comme $\sum_{0\leq n<+\infty}\frac{1}{n!}$.

En fait, on peut montrer *a priori* que si l'une de ces deux limites existe, l'autre aussi, et elles sont égales, grâce au résultat suivant.

Proposition 5 *La suite* (u_n)*, définie par* $u_n = (1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!}) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$*, tend vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini.*

Preuve. On a, par la formule du binôme

$$u_n = \sum_{2\leq p\leq n}\frac{1}{p!}\left[1-\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{n^p}\right].$$

L'idée qui va nous guider est que pour p fixé la quantité entre crochets tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On prend donc **un entier K qu'on choisira plus loin assez grand, mais fixé**, et on se donne un $\varepsilon > 0$.

Pour $n \geq N_2 \geq K$, l'expression entre crochets pour $p = 2$ est majorée par $\frac{\varepsilon}{K-1}$;

pour $n \geq N_3 \geq K$, l'expression entre crochets pour $p = 3$ est majorée par $\frac{\varepsilon}{K-1}$; ...

pour $n \geq N_K \geq K$, l'expression entre crochets pour $p = K$ est majorée par $\frac{\varepsilon}{K-1}$.

Donc pour $n \geq N' = \max(N_2,\cdots,N_K)$, la somme des termes de $p = 2$ à $p = K$ est majorée par $\frac{(K-1)\varepsilon}{K-1} = \varepsilon$. On a alors la majoration :

$$0 \leq u_n \leq \varepsilon + \sum_{K+1\leq p\leq n}\frac{1}{p!} \leq \varepsilon + \frac{1}{K.K!},$$

car on peut majorer la somme $\sum_{K+1\leq p\leq n}\frac{1}{p!}$ par le multiple d'une somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{K+2}$:

$$\sum_{K+1\leq p\leq n}\frac{1}{p!} = \frac{1}{(K+1)!}\left(1+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(K+2)(K+3)}+\cdots+\frac{1}{(K+1)\cdots n}\right)$$

$$< \frac{1}{(K+1)!}\left(1+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\cdots\frac{1}{(k+2)^{n-K-1}}\right)$$

$$< \frac{1}{(K+1)!}\frac{1}{(1-\frac{1}{K+2})} = \frac{K+2}{(K+1)(K+1)!} \leq \frac{1}{K.K!}.$$

Alors, ε étant donné, il aura suffit de choisir K pour que $\frac{1}{K.K!} \leq \varepsilon$ pour obtenir, pour $n \geq N'$, l'encadrement $0 \leq u_n \leq 2\varepsilon$: c'est la convergence de (u_n) vers 0.

Le **discours méta** alors à tenir devrait mettre en valeur la méthode consistant **à choisir un K qu'on déterminera plus tard**, en fonction des inégalités à prouver, sufisamment grand mais fixe, et à faire tendre ensuite n vers l'infini, **quitte à faire les calculs dans l'ordre inverse**, comme ici.

Remarques.
(1) Une variante un peu plus simple de la démonstration est la suivante :
à partir de l'inégalité

$$0 \leq u_n \leq \sum_{2\leq p\leq n} \frac{1}{p!}\Big[1 - \Big(\frac{n-p+1}{n}\Big)^p\Big],$$

obtenue en minorant la fraction dans chaque crochet, on obtient (penser à l'égalité $1-a^p = (1-a)(1+a+a^2+\ldots+a^{p-1})$ pour $0<a<1$)

$$0 \leq u_n \leq \sum_{2\leq p\leq n} \frac{1}{p!}\frac{p-1}{n} \times p = \frac{1}{n}\sum_{0\leq q\leq n-2}\frac{1}{q!} \leq \frac{1}{n}\Big[1+1+\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{3^{n-4}}\Big)\Big];$$

d'où l'inégalité $\quad 0 \leq u_n \leq \dfrac{11}{4n}$.
(2) Une fois montrée l'existence de e par la série, l'encadrement $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!} < e < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!}+\frac{1}{n.n!}$ (qui prouve cette existence) permet de montrer aisément l'irrationalité du nombre e : on suppose que $e=\frac{p}{q}$ on choisit $n=q$ dans les inégalités précédentes, on multiplie par $n!$ et on en déduit un encadrement impossible d'un entier.

Annexe : la dérivée bilatérale

Il s'agit de montrer le résultat suivant :

Proposition 6 *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle ouvert I, et soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres de I vérifiant $a_n < b_n$ et $a_n \uparrow c$, $b_n \downarrow c$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(c).$$

Preuve. Si $a_n = c$ à partir d'un certain rang, alors $b_n \neq c$ à partir de ce même rang, et le quotient de l'énoncé s'écrit $\dfrac{f(b_n)-f(c)}{b_n-c}$, dont la limite est $f'(c)$ par définition. Même raisonnement si $b_n = c$ à partir d'un certain rang.

Si aucune de ces circonstances n'a lieu, on a $a_n < c < b_n$ pour tout n.

On écrit alors le quotient dont on cherche la limite $\dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$ comme :

$$\frac{f(b_n)-f(c)}{b_n-c}\times\frac{b_n-c}{b_n-a_n}+\frac{f(c)-f(a_n)}{c-a_n}\times\frac{c-a_n}{b_n-a_n}$$
$$=\frac{f(b_n)-f(c)}{b_n-c}\times t_n+\frac{f(c)-f(a_n)}{c-a_n}\times(1-t_n)$$

avec $0 < t_n < 1$. On a donc un barycentre (variable) de deux nombres tendant tous deux vers $f'(c)$ quand n tend vers $+\infty$. Il n'est alors pas difficile de montrer que ce barycentre tend aussi vers $f'(c)$.

Remarques

(1) Bien sûr, seule la dérivabilité de f au point c intervient.

(2) **Le résultat précédent est faux si** (a_n) **et** (b_n) **sont du même côté du point** c. Le contre-exemple classique est la fonction définie par $f(0) = 0$ et, si $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Elle est dérivable de dérivée 0 en 0, mais si on pose $a_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2}$ et $b_n = \dfrac{1}{2n\pi - \pi/2}$, le lecteur vérifiera aisément que $\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ tend vers $-\dfrac{4}{\pi}$ et non 0 quand n tend vers $+\infty$.

6 Une bibliographie raisonnée

La bibiographie est donnée sous deux formes ; un classement alphabétique puis un groupement par thème. Une même référence peut figurer dans plusieurs thèmes : les cinq thèmes retenus sont :

1. les ouvrages et publications concernant l'épistémologie ou l'histoire,
2. les publications de didactiques générales,
3. les manuels,
4. les diagnostics d'enseignements et d'apprentissages,
5. les ingénieries ou scénarios d'enseignement.

6.1 Classement alphabétique

Références

[1] M. Artigue. « Analysis ». In : *Advanced mathematical thinking.* 66. D.O.tall (Ed.), Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Press Publishers, 1991, p. 167–198.

[2] M. Artigue. « Enseignement de l'analyse et fonctions de références ». In : *Repères IREM* 11 (1993), p. 115–139.

[3] M. Artigue. « Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes ». In : *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de Strabourg* Vol 2 (1989), p. 173–190.

[4] M. Artigue, C. Batanero et P. Kent. « Mathematics thinking and learning at post-secondary level ». In : *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Sous la dir. de F. Lester (Eds.)-Greenwich-Connecticut : Information Age Publishing-Inc. 2007, p. 1011–1049.

[5] E. Azoulay, J. Avignon et G. Auliac. *Les maths en licence -Tome 1.* Ediscience, 2007.

[6] G.T. Bagni. « The historical roots of the limit notion : Cognitive development and development of representation registers ». In : *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education* 5(4) (2005), p. 453–468.

[7] S. Balac et F. Sturm. *Algèbre et analyse, cours de mathématiques de 1ère année.* PPUR, 2014.

[8] J. Barbé, M. Bosh et L. Espinoza NAD J. Gascòn. « Didactic restrictions on the teacher's practice : the case of limits of functions in spanish high schools ». In : *Educational Studies in Mathematics* 59 (2005), p. 235–268.

[9] R. Barra et al. *Trans Math première S.* Nathan, 2011.

[10] A.M. Bellido et al. *Polycopié de la FST de Limoges - L1 Semestre 1 et Semestre 2.* 2016.

[11] J. Bezuidenhout. « Limits and continuity : some conception of first-year students ». In : *International Journal of Mathematical Education in Science and Technologys* 32(4) (2001), p. 487–500.

[12] A. Birebent. « La rupture algébrique / analytique dans le numérique : questions écologiques et instrumentales ». In : *Perspectives en Didactique des Mathématiques, Actes de la* $13^{ième}$ *École d'Été*. Sous la dir. d'IUFM d'Aquitaine. 2007.

[13] R. Bkouche. « Point de vue sur l'enseignement de l'analyse : des limites et de la continuité dans l'enseignement ». In : *Repères IREM* 24 (2000), p. 67–76.

[14] I. Bloch. « Teaching functions in a graphic milieu : what forms of knowledge enable students to conjecture and prove ». In : *Educational Studies in Mathematics* 52 (2003), p. 3–28.

[15] I. Bloch. « The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and university ». In : *ICME10, communication to the Topic Study Group 12*. Copenhagen, 2004.

[16] I. Bloch. « Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée ». In : *Petit x* 58 (2002), p. 25–46.

[17] I. Bloch. « Une situation d'introduction à la notion de limite en première scientifique : le flocon de von Koch ». Thèse de doctorat. Université Bordeaux, 2000.

[18] I. Bloch et al. « Du numérique aux limites : quelle forme prend la transition secondaire / supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse ». In : *Perspectives en Didactique des Mathématiques, Actes de la* $13^{ième}$ *École d'Été* (2007). Sous la dir. d'IUFM d'Aquitaine.

[19] A. Bodin et al. *Exo7*. 2016. url : `http://exo7.emath.fr/un.html`.

[20] C. Boyer. *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover Books on Mathematics : New-York, 1959.

[21] S. Bridoux. « Enseignement des premières notions de topologie à l'université : une étude de cas ». Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, 2011.

[22] S. Bridoux. « Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique ? » In : *Actes INDRUM*. Montpellier, 2016.

[23] S. Bridoux et al. « Les moments d'exposition des connaissances ». In : *Cahier du LDAR* 14 (juillet 2015).

[24] A. Bronner. « Étude didactique des nombres réels ». Thèse de doctorat. Laboratoire Leibnitz IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble., 1997.

[25] F. Bruneau et al. *Maths repères première S*. Hachette, 2011.

[26] B. Burn. « The vice : some historically inspired and proof-generated steps to limits of a sequence ». In : *Educational Studies in Mathematics* 60 (2005), p. 269–295.

[27] M. Le Cam et F. Salles. « Les performances des élèves de terminale en mathématiques. Évolution sur vingt ans ». In : *DEPP, Note d'information* 15 (2016).

[28] S. Cante et al. *Indice Maths, terminale S*. Bordas, 2012.

[29] C. Castela. « Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 15(1) (1995), p. 7–48.

[30] A-L. Cauchy. *Analyse algébrique*. Cours de l'École polytechnique, 1821.

[31] M.L. Chabanol et al. *Polycopié de l'Université de Bordeaux - L1 Semestre 1*. 2016.

[32] B. Chareyre et al. *Math'x terminale S*. Didier, 2012.

[33] A. Choquer et al. *Maths repères terminale S*. Hachette, 2012.

[34] R. Chorlay. « Local-global : the first twenty years ». In : *Archives for History for Exact Sciences* 65 (2011), p. 1–66.

[35] R. Chorlay. « Signe de f' et variation de f : la fabrique d'une chaîne déductive longue ». In : *Petit x* 94 (2014).

[36] E. Comin. « Variables et fonctions, du collège au lycée. Méprise didactique ou quiproquo institutionnel ». In : *Petit x* 67 (2005), p. 33–61.

[37] S. Coppé, J-L. Dorier et L. Yavuz. « De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonctions en France en seconde ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27(2) (2007), p. 151–186.

[38] A. Coquio et al. *Polycopié de l'Université de Grenoble-Alpes. MAT 101 - L1 Semestre 1*. 2016.

[39] B. Cornu. *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. Grenoble : Publications de l'Université J. Fourier. 1983.

[40] B. Cornu. « Limits ». In : *Advanced Mathematical Thinking*. 66. D.O. Tall (Ed.), Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 153–166.

[41] G. Costantini. *Analyse : MPSI-PCSI 1ère année : cours, exercices corrigés*. De Boeck, 2013.

[42] C.Troesler. *Syllabus du cours d'Analyse Mathématique I, Université de Mons*. 2017. url : `https://math.umons.ac.be/anum/fr/enseignement/analyse/Analyse.pdf`.

[43] A. Decroix et M. Rogalski. « Atelier : l'intégrale, de la physique aux mathématiques ». In : *Actes du colloque de Lyon la reforme des programmes du lycée et alors ?* IREM de Paris-Diderot, 2013.

[44] C. Deschamps et al. *Mathématiques tout-en-un : MPSI*. Dunod, 2015.

[45] C. Deschamps et al. *MPSI - J'intégre Tout en un*. De Boeck, 2013, 2015.

[46] M. Dieudonné et al. « Bilan de praticiens sur la transition lycée-université, exemple de l'algèbre linéaire ». In : *Repères IREM* 85 (2011), p. 5–30.

[47] J. Dixmier. *Cours de mathématiques du premier cycle, Première année*. Gauthier-Villars, 1964.

[48] J-L. Dorier. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble, 1997.

[49] R. Douady. « Jeux de cadres et dialectique outil-objet ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) (1986), p. 5–31.

[50] P. Dugac. *Histoire de l'analyse*. Vuibert, 2003.

[51] V. Durand-Guerrier. « Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques ». In : *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (2013). Sous la dir. de La Pensée Sauvage - Grenoble.

[52] V. Durand-Guerrier. « Questions de logique dans l'enseignement supérieur. Quelques pistes pour faire évoluer les pratiques enseignantes ». In : *Actes Question de pédagogie dans l'Enseignement Supérieur*. Lille, 2005.

[53] V. Durand-Guerrier. « Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique ». Habilitation à diriger des recherches. Université Claude Bernard-Lyon 1, 2005.

[54] V. Durand-Guerrier et G. Arsac. « Méthodes de raisonnement et leur modélisation logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) (2003), p. 295–342.

[55] R. Duval. « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée ». In : *Annales de Didactique et Sciences Cognitives de Strasbourg* 5 (1993), p. 37–65.

[56] C.H. Edwards. *The historical development of the calculus*. Springer-verlag, 1982.

[57] J-P. Escofier. *Toute l'analyse de la Licence : cours et exercices corrigés*. Dunod, 2014.

[58] I. Ghedamsi. « Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : articuler contrôles pragmatiques et formels ». Thèse de doctorat. Université de Tunis et Université V. Sagalen-Bordeaux II, 2008.

[59] I. Ghedamsi, I. Haddad et T. Lecorre. « Les notions de limite et d'intégrale du secondaire au supérieur. TD à l'école d'été ». In : *Actes de la* 18^{ième} *École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Brest, Août 2015.

[60] J. Grabiner. *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Dover Books on Mathematics : New-York, 2005.

[61] N. Grenier-Boley. « Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de mathématiques à l'université ». In : *Cahier de Didirem* 59 (2009). Sous la dir. de Publication de l'IREM de Paris 7.

[62] N. Grenier-Boley et al. « Introduction aux concepts de limite de fonction et de suite : adaptation de deux ingénieries ». In : *EMF2015-GT7* (2015).

[63] B. Guçler. « Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom ». In : *Educational Studies in Mathematic* 82(3) (2013), p. 439–453.

[64] G. Gueudet. « Investigating the secondary-tertiary transition ». In : *Educational Studies in Mathematic* 67 (2008), p. 237–254.

[65] G. Gueudet. « La transition secondaire-supérieur : résultats et perspectives des recherches en didactique ». In : *Actes de la* 13^{ième} *École d'Été de Didactique des Mathématiques*. 2008, p. 159–175.

[66] D. Guinin, El. Ladame et H. Vandeven. *Tout-en-un mathématiques : MPSI*. Bréal, 2013.

[67] G.Villemin. *Fractales*. url : `http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Suite/Fractal.htm#citation`.

[68] N. Hardy. « Students' perceptions of institutional practices : the case of limits of functions in college level calculus courses ». In : *Educational Studies in Mathematic* 72 (3) (2009), p. 341–358.

[69] C. Hauchart et N. Rouche. *Apprivoiser l'infini : un enseignement des débuts de l'analyse*. G.E.M, Ciaco éditeur Louvain-la-Neuve, 1997.

[70] C. Hauchart et M. Schneider. « Une approche heuristique de l'analyse ». In : *Repères IREM* 25 (1996), p. 35–62.

[71] P. Job. « Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques ». Thèse de doctorat. Université de Liège, 2011.

[72] A. El Kaabouchi. *Mathématiques en L1 semestre 1 et 2 : 170 fiches méthodes, 560 exercices corrigés, formulaire*. Ellipses, 2013.

[73] J-L. Lagrange. *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits et d'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*. Imprimerie de la République-Paris, 1797.

[74] I. Lakatos. *Preuves et réfutations*. Hermann-Paris, 1984.

[75] L. Lazzarini et J-P. Marco. *Mathématiques L1 : cours complet avec 1000 tests et exercices corrigés*. Pearson education, 2007.

[76] T. Lecorre. « Définir : une nécessité à construire. Le cas de la définition de la limite d'une fonction ». In : *Repères IREM* (2015).

[77] T. Lecorre. « Des conditions de conception d'une ingénierie relation à la définition de la notion de limite : élaboration d'un cadre basé sur un modèle de rationalité pour l'accès aux objets mathématiques complexes ». Thèse de doctorat. Université de Grenoble, 2016.

[78] M. Legrand. « Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse ». In : *Repères IREM* 10 (1993), p. 123–158.

[79] J. Liouville. *Calcul Différentiel*. Ellipse, 1998- originale de 1848.

[80] F. Liret et D. Martinais. *Analyse 1ère année : cours de mathématiques*. Dunod, 1997, 2003.

[81] B. Litim, M. Zaki et A. Benchabir. « Difficultés conceptuelles d'étudiants de première année d'université face à la notion de convergence des suites numériques ». In : *EMF-2015-G7* (2015).

[82] J. Mamona-Downs. « Letting the intuitive bear on the formal : a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence ». In : *Educational Studies in Mathematics* 28 (2001), p. 259–288.

[83] M. Maschietto. « Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problème d'analyse à l'université ». In : *Recherches en Didatique des Mathématiques* 21(1/2) (2001), p. 123–156.

[84] M. Maschietto. « Graphic Calculators and Micro Straightness : Analysis of a Didactic Engineering ». In : *International Journal of Computer for Mathematics Learning* 13 (2008), p. 207–230.

[85] A. Le Méhauté. *Les géométries fractales*. Hermès-Paris, 1990.

[86] M.Rogalki. « Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique ». In : *Repères IREM* 64 (2006), p. 27–48.

[87] N. Nguyen et al. *Mathématiques MPSI*. Collection Prépa-sciences, 2013.

[88] C. Ouvrier-Buffet. « Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve - étude épistémologique et enjeux didactiques ». Habilitation à diriger des recherches. Université Paris Diderot, 2013.

[89] R. Parameswaran. « On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities ». In : *International Journal of Science and Mathematics Education* 5(2) (2007), p. 193–216.

[90] F. Patras. *La pensée mathématique contemporaine*. PUF-Paris, 2002.

[91] M. Poncy et al. *Indice Maths, terminale S*. Bordas, 2016.

[92] P.Perrin. *À propos de la limite d'une fonction en un point*. URL : `https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/analyse/fonctions/definitiondelimite.pdf`.

[93] F. Praslon. « Continuités et ruptures dans la transition S/DEUG en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement ». Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, 2000.

[94] A. Raftopoulos et D. Portides. « Le concept de fonction et sa projection spatiale ». In : *Annales de Didactique et Sciences Cognitives de Strasbourg* 17 (2012), p. 169–194.

[95] J-P. Ramis et A. Warusfel. *Mathématiques. Niveau L1 : tout-en-un pour la licence : cours complet et 270 exercices corrigés*. Dunod, 2006 et 2013.

[96] A. Robert. « Divers travaux de mathématiques et l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur ». Thèse d'état. Université Paris 7, 1982.

[97] A. Robert. « L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignementt supérieur ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(3) (1982), p. 305–341.

[98] A. Robert. « L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG ». In : *Bulletin de l'APMEP* 340 (1983), p. 432–449.

[99] A. Robert. « Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2) (1998), p. 139–190.

[100] A. Robert. « Une méthologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe ». In : *la classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants* (2008). Sous la dir. de F. Vanderbrouck ; Toulouse : Octarès, p. 45–56.

[101] A. Robert et F. Boschet. « Acquisition des premiers concepts d'analyse sur $\mathbb{R}$ dans une section ordinaire de DEUG première année ». In : *Cahier de Didactique des Mathématiques* 7 (1984). Sous la dir. de Publication de L'IREM de Paris 7.

[102] A. Robert et J. Robinet. « Prise en compte du méta en didactique des mathématiques ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(1) (1996), p. 31–70.

[103] J. Robinet. « Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(4/3) (1983), p. 232–292.

[104] J. ROGALSKI. « Représentations graphiques dans l'enseignement : concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonction ». In : sous la dir. d'A. GIORDAN et J-L. MARTINAND. Chamonix, 1984, p. 379–388.

[105] J . ROGALSKI et M. ROGALSKI. « Enseigner des méthodes pour donner aux étudiants une expertise en résolution de problèmes. Un exemple en licence ». In : *EMF2015-G7* (2015).

[106] M. ROGALSKI. « Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode ». In : *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG : Commission Inter-Irem*. IREM de Paris-Diderot, 1990, p. 197–204.

[107] M. ROGALSKI. « De la notion couplée de tangente et de dérivée à la notion de limites ». In : *Autour de la notion de limite en classe de première scientifique : Brochure IREM*. 97. IREM de Paris-Diderot, 2015, p. 379–388.

[108] M. ROGALSKI. « Les rapports entre local et global mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques ». In : *Didactique, epistémologie et histoire des sciences*. Sous la dir. de L.VIENNOT. PUF-Paris, 2008, p. 61–87.

[109] M. ROGALSKI. « Quelques compléments à l'article de Hervé Quéffelec sur l'enseignement de l'intégration et de la mesure de Lebesgue : faire simple et pédagogique ? » In : *Gazette des mathématiciens* (2013).

[110] M. ROGALSKI. « Quelques points sur l'histoire et l'épistémologie des fonctions, pouvant éclairer certaines questions didactiques sur leur enseignement ». In : *International Journal for Studies in Mathematics Education* 6 (Juin 2013).

[111] M. ROGALSKI. « Revenir au sens de la notion de limite par certaines de ses raisons d'être : un chantier pour le début de l'analyse à l'université ». In : *Actes du colloque INDRUM 2016* (2016).

[112] M. ROGALSKI et al. *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*. Ellispes, 2001.

[113] K-H. ROH. « An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity ». In : *Educational Studies in Mathematics* 73(3) (2010), p. 263–279.

[114] W. RUDIN. *Principes d'analyse mathématique*. McGraw-Hill, 1976.

[115] M. SCHNEIDER. « À propos de l'apprentissage du taux de variation instantané ». In : *Educational Studies in Mathematics* 23(4) (1992), p. 317–350.

[116] M. SCHNEIDER. « Des objets mentaux 'aire' et' volume' au calcul des primitives ». Thèse de doctorat. Université catholique de Louvain, 1988.

[117] M. SCHNEIDER. « Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques, à propos d'un enseignement des limites en secondaire ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21(1/2) (2001), p. 7–56.

[118] M. SCHNEIDER. « Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente ». In : *Repères IREM* 5 (1991), p. 65–82.

[119] M. SCHNEIDER. « Un obstacle épistémologique soulevé par des 'découpages' infinis des surfaces et des solides ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 11(2/3) (1991), p. 241–294.

[120] M. SCHNEIDER et al. *Du calcul infinitésimal à l'analyse mathématique*. Presse universitaire de Liège, 2016.

[121] P. SÉNÉCHAUD. *Analyse des réponses aux questionnaires sur la réforme du lycée.* Sous la dir. de site de l'Adirem-Commission INTERIREM UNIVERSITÉ. 2016. URL : http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/bilan-enquete_reforme_lycee-c2iu-nov_2016.pdf.

[122] P. SÉNÉCHAUD. *Compte-rendu de passation en L1 d'une ingénierie sur la notion de limite de fonction.* Sous la dir. de site de l'Adirem-Commission INTERIREM UNIVERSITÉ. 2015. URL : http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique394&var_mode=calcul.

[123] A. SIERPINSKA. « Humanities students and epistemological obstacle related to limits ». In : *Educational Studies in Mathematics* 18 (1987), p. 371–397.

[124] A. SIERPINSKA. « Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6(1) (1985), p. 5–67.

[125] E. SIGWARD et al. *Odyssée terminale S.* Hatier, 2012.

[126] J. STEWART. *Analyse : Concepts et contextes-vol1 : fonctions d'une variable.* De Boeck, 2011.

[127] Groupe mathématiques et physique enseignement SUPÉRIEUR. « Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire, document IREM Paris 7 et LDPES ». In : *Rapport du GRECO du CNRS : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques,* (1989).

[128] D. TALL et S.VINNER. « Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity ». In : *Educational Studies in Mathematics* 12(2) (1981), p. 151–169.

[129] F. VANDEBROUCK. « Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignants ». Habilitation à Diriger les Recherches. Université Paris Diderot, 2011.

[130] F. VANDEBROUCK. « Points de vues et domaines de travail pour l'étude des fonctions ». In : *Annales de didactique et sciences cognitives de Strasbourg* 16 (2011), p. 149–185.

[131] F. VANDEBROUCK et S. LEIDWANGER. « Functions at the transition between French upper secondary school and University ». In : *Communication de la Commission Inter-Irem Université, Actes du colloque ICMI.* Monterey, Mexico, 2008.

[132] F. VANDEBROUCK et S. LEIDWANGER. « Students' vizualisation of functions from secondary to tertiary level ». In : *Communication au colloque INDRUM.* Montpellier, 2016.

[133] S. VASSOUT. *Polycopié de l'Université Paris Diderot- Math de L1 Semestre 1 - toutes mentions.* 2015.

[134] M. VERGNAC et V. DURAND-GUERRIER. « Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problèmatique ». In : *Petit x* 96 (2014), p. 7–28.

[135] G. VERGNAUD. « La théorie des champs conceptuels ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2-3) (1990), p. 133–169.

[136] S. VINNER. « Concept definition, concept image and the notion of function ». In : *The international Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 5(4) (1983), p. 453–468.

[137] M-H. Le Yaouang et al. *Math'x terminale S*. Didier, 2016.

6.2 Ouvrages et publications concernant l'épistémologie ou l'histoire

[2] M. Artigue. « Enseignement de l'analyse et fonctions de références ». In : *Repères IREM* 11 (1993), p. 115–139.

[6] G.T. Bagni. « The historical roots of the limit notion : Cognitive development and development of representation registers ». In : *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education* 5(4) (2005), p. 453–468.

[13] R. Bkouche. « Point de vue sur l'enseignement de l'analyse : des limites et de la continuité dans l'enseignement ». In : *Repères IREM* 24 (2000), p. 67–76.

[20] C. Boyer. *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover Books on Mathematics : New-York, 1959.

[26] B. Burn. « The vice : some historically inspired and proof-generated steps to limits of a sequence ». In : *Educational Studies in Mathematics* 60 (2005), p. 269–295.

[34] R. Chorlay. « Local-global : the first twenty years ». In : *Archives for History for Exact Sciences* 65 (2011), p. 1–66.

[35] R. Chorlay. « Signe de f' et variation de f : la fabrique d'une chaîne déductive longue ». In : *Petit x* 94 (2014).

[40] B. Cornu. « Limits ». In : *Advanced Mathematical Thinking*. 66. D.O. Tall (Ed.), Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 153–166.

[48] J-L. Dorier. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble, 1997.

[50] P. Dugac. *Histoire de l'analyse*. Vuibert, 2003.

[55] R. Duval. « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée ». In : *Annales de Didactique et Sciences Cognitives de Strasbourg* 5 (1993), p. 37–65.

[56] C.H. Edwards. *The historical development of the calculus*. Springer-verlag, 1982.

[60] J. Grabiner. *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Dover Books on Mathematics : New-York, 2005.

[69] C. Hauchart et N. Rouche. *Apprivoiser l'infini : un enseignement des débuts de l'analyse*. G.E.M, Ciaco éditeur Louvain-la-Neuve, 1997.

[70] C. Hauchart et M. Schneider. « Une approche heuristique de l'analyse ». In : *Repères IREM* 25 (1996), p. 35–62.

[73] J-L. Lagrange. *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits et d'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*. Imprimerie de la République-Paris, 1797.

[74] I. Lakatos. *Preuves et réfutations*. Hermann-Paris, 1984.

[89] R. Parameswaran. « On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities ». In : *International Journal of Science and Mathematics Education* 5(2) (2007), p. 193–216.

[90] F. Patras. *La pensée mathématique contemporaine*. PUF-Paris, 2002.

[108] M. Rogalski. « Les rapports entre local et global mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques ». In : *Didactique, epistémologie et histoire des sciences*. Sous la dir. de L.Viennot. PUF-Paris, 2008, p. 61–87.

[110] M. Rogalski. « Quelques points sur l'histoire et l'épistémologie des fonctions, pouvant éclairer certaines questions didactiques sur leur enseignement ». In : *International Journal for Studies in Mathematics Education* 6 (Juin 2013).

[116] M. Schneider. « Des objets mentaux 'aire' et' volume' au calcul des primitives ». Thèse de doctorat. Université catholique de Louvain, 1988.

[119] M. Schneider. « Un obstacle épistémologique soulevé par des 'découpages' infinis des surfaces et des solides ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 11(2/3) (1991), p. 241–294.

[123] A. Sierpinska. « Humanities students and epistemological obstacle related to limits ». In : *Educational Studies in Mathematics* 18 (1987), p. 371–397.

[124] A. Sierpinska. « Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6(1) (1985), p. 5–67.

[136] S. Vinner. « Concept definition, concept image and the notion of function ». In : *The international Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 5(4) (1983), p. 453–468.

6.3 Publications didactiques générales

[1] M. Artigue. « Analysis ». In : *Advanced mathematical thinking*. 66. D.O.tall (Ed.), Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Press Publishers, 1991, p. 167–198.

[3] M. Artigue. « Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes ». In : *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de Strabourg* Vol 2 (1989), p. 173–190.

[4] M. Artigue, C. Batanero et P. Kent. « Mathematics thinking and learning at post-secondary level ». In : *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Sous la dir. de F. Lester (Eds.)-Greenwich-Connecticut : Information Age Publishing-Inc. 2007, p. 1011–1049.

[23] S. Bridoux et al. « Les moments d'exposition des connaissances ». In : *Cahier du LDAR* 14 (juillet 2015).

[29] C. Castela. « Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 15(1) (1995), p. 7–48.

[36] E. Comin. « Variables et fonctions, du collège au lycée. Méprise didactique ou quiproquo institutionnel ». In : *Petit x* 67 (2005), p. 33–61.

[39] B. Cornu. *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. Grenoble : Publications de l'Université J. Fourier. 1983.

[43] A. Decroix et M. Rogalski. « Atelier : l'intégrale, de la physique aux mathématiques ». In : *Actes du colloque de Lyon la reforme des programmes du lycée et alors ?* IREM de Paris-Diderot, 2013.

[46] M. Dieudonné et al. « Bilan de praticiens sur la transition lycée-université, exemple de l'algèbre linéaire ». In : *Repères IREM* 85 (2011), p. 5–30.

[49] R. Douady. « Jeux de cadres et dialectique outil-objet ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) (1986), p. 5–31.

[53] V. Durand-Guerrier. « Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique ». Habilitation à diriger des recherches. Université Claude Bernard-Lyon 1, 2005.

[54] V. Durand-Guerrier et G. Arsac. « Méthodes de raisonnement et leur modélisation logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) (2003), p. 295–342.

[55] R. Duval. « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée ». In : *Annales de Didactique et Sciences Cognitives de Strasbourg* 5 (1993), p. 37–65.

[78] M. Legrand. « Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse ». In : *Repères IREM* 10 (1993), p. 123–158.

[86] M.Rogalki. « Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique ». In : *Repères IREM* 64 (2006), p. 27–48.

[88] C. Ouvrier-Buffet. « Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve - étude épistémologique et enjeux didactiques ». Habilitation à diriger des recherches. Université Paris Diderot, 2013.

[94] A. Raftopoulos et D. Portides. « Le concept de fonction et sa projection spatiale ». In : *Annales de Didactique et Sciences Cognitives de Strasbourg* 17 (2012), p. 169–194.

[96] A. Robert. « Divers travaux de mathématiques et l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur ». Thèse d'état. Université Paris 7, 1982.

[99] A. Robert. « Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2) (1998), p. 139–190.

[100] A. Robert. « Une méthologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe ». In : *la classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants* (2008). Sous la dir. de F. Vanderbrouck ; Toulouse : Octarès, p. 45–56.

[102] A. Robert et J. Robinet. « Prise en compte du méta en didactique des mathématiques ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(1) (1996), p. 31–70.

[104] J. Rogalski. « Représentations graphiques dans l'enseignement : concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonction ». In : sous la dir. d'A. Giordan et J-L. Martinand. Chamonix, 1984, p. 379–388.

[109] M. Rogalski. « Quelques compléments à l'article de Hervé Quéffelec sur l'enseignement de l'intégration et de la mesure de Lebesgue : faire simple et pédagogique ? » In : *Gazette des mathématiciens* (2013).

[128] D. Tall et S.Vinner. « Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity ». In : *Educational Studies in Mathematics* 12(2) (1981), p. 151–169.

[129] F. Vandebrouck. « Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignants ». Habilitation à Diriger les Recherches. Université Paris Diderot, 2011.

[130] F. Vandebrouck. « Points de vues et domaines de travail pour l'étude des fonctions ». In : *Annales de didactique et sciences cognitives de Strasbourg* 16 (2011), p. 149–185.

[131] F. Vandebrouck et S. Leidwanger. « Functions at the transition between French upper secondary school and University ». In : *Communication de la Commission Inter-Irem Université, Actes du colloque ICMI*. Monterey, Mexico, 2008.

[132] F. Vandebrouck et S. Leidwanger. « Students' vizualisation of functions from secondary to tertiary level ». In : *Communication au colloque INDRUM*. Montpellier, 2016.

[134] M. Vergnac et V. Durand-Guerrier. « Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problèmatique ». In : *Petit x* 96 (2014), p. 7–28.

[135] G. Vergnaud. « La théorie des champs conceptuels ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2-3) (1990), p. 133–169.

6.4 Manuels

[5] E. Azoulay, J. Avignon et G. Auliac. *Les maths en licence -Tome 1*. Edisciences, 2007.

[7] S. Balac et F. Sturm. *Algèbre et analyse, cours de mathématiques de 1ère année*. PPUR, 2014.

[9] R. Barra et al. *Trans Math première S*. Nathan, 2011.

[10] A.M. Bellido et al. *Polycopié de la FST de Limoges - L1 Semestre 1 et Semestre 2*. 2016.

[19] A. Bodin et al. *Exo7*. 2016. url : `http://exo7.emath.fr/un.html`.

[25] F. Bruneau et al. *Maths repères première S*. Hachette, 2011.

[28] S. Cante et al. *Indice Maths, terminale S*. Bordas, 2012.

[30] A-L. Cauchy. *Analyse algébrique*. Cours de l'École polytechnique, 1821.

[31] M.L. Chabanol et al. *Polycopié de l'Université de Bordeaux - L1 Semestre 1*. 2016.

[32] B. Chareyre et al. *Math'x terminale S*. Didier, 2012.

[33] A. Choquer et al. *Maths repères terminale S*. Hachette, 2012.

[38] A. Coquio et al. *Polycopié de l'Université de Grenoble-Alpes. MAT 101 - L1 Semestre 1*. 2016.

[41] G. Costantini. *Analyse : MPSI-PCSI 1ère année : cours, exercices corrigés*. De Boeck, 2013.

[42] C.Troesler. *Syllabus du cours d'Analyse Mathématique I, Université de Mons*. 2017. url : `https://math.umons.ac.be/anum/fr/enseignement/analyse/Analyse.pdf`.

[44] C. Deschamps et al. *Mathématiques tout-en-un : MPSI*. Dunod, 2015.

[45] C. Deschamps et al. *MPSI - J'intégre Tout en un*. De Boeck, 2013, 2015.

[47] J. Dixmier. *Cours de mathématiques du premier cycle, Première année*. Gauthier-Villars, 1964.

[48] J-L. Dorier. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble, 1997.

[50] P. Dugac. *Histoire de l'analyse*. Vuibert, 2003.

[57] J-P. Escofier. *Toute l'analyse de la Licence : cours et exercices corrigés*. Dunod, 2014.

[66] D. Guinin, El. Ladame et H. Vandeven. *Tout-en-un mathématiques : MPSI*. Bréal, 2013.

[67] G.Villemin. *Fractales*. URL : `http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Suite/Fractal.htm#citation`.

[72] A. El Kaabouchi. *Mathématiques en L1 semestre 1 et 2 : 170 fiches méthodes, 560 exercices corrigés, formulaire*. Ellipses, 2013.

[73] J-L. Lagrange. *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits et d'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*. Imprimerie de la République-Paris, 1797.

[74] I. Lakatos. *Preuves et réfutations*. Hermann-Paris, 1984.

[75] L. Lazzarini et J-P. Marco. *Mathématiques L1 : cours complet avec 1000 tests et exercices corrigés*. Pearson education, 2007.

[79] J. Liouville. *Calcul Différentiel*. Ellipse, 1998- originale de 1848.

[80] F. Liret et D. Martinais. *Analyse 1ère année : cours de mathématiques*. Dunod, 1997, 2003.

[85] A. Le Méhauté. *Les géométries fractales*. Hermès-Paris, 1990.

[87] N. Nguyen et al. *Mathématiques MPSI*. Collection Prépa-sciences, 2013.

[91] M. Poncy et al. *Indice Maths, terminale S*. Bordas, 2016.

[95] J-P. Ramis et A. Warusfel. *Mathématiques. Niveau L1 : tout-en-un pour la licence : cours complet et 270 exercices corrigés*. Dunod, 2006 et 2013.

[112] M. Rogalski et al. *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*. Ellispes, 2001.

[114] W. Rudin. *Principes d'analyse mathématique*. McGraw-Hill, 1976.

[120] M. Schneider et al. *Du calcul infinitésimal à l'analyse mathématique*. Presse universitaire de Liège, 2016.

[125] E. Sigward et al. *Odyssée terminale S*. Hatier, 2012.

[126] J. Stewart. *Analyse : Concepts et contextes-vol1 : fonctions d'une variable*. De Boeck, 2011.

[133] S. Vassout. *Polycopié de l'Université Paris Diderot- Math de L1 Semestre 1 - toutes mentions*. 2015.

[137] M-H. Le Yaouang et al. *Math'x terminale S*. Didier, 2016.

6.5 Diagnostics d'enseignements et d'apprentissages

[4] M. Artigue, C. Batanero et P. Kent. « Mathematics thinking and learning at post-secondary level ». In : *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Sous la dir. de F. Lester (Eds.)-Greenwich-Connecticut : Information Age Publishing-Inc. 2007, p. 1011–1049.

[8] J. Barbé, M. Bosh et L. Espinoza NAD J. Gascòn. « Didactic restrictions on the teacher's practice : the case of limits of functions in spanish high schools ». In : *Educational Studies in Mathematics* 59 (2005), p. 235–268.

[11] J. Bezuidenhout. « Limits and continuity : some conception of first-year students ». In : *International Journal of Mathematical Education in Science and Technologys* 32(4) (2001), p. 487–500.

[12] A. Birebent. « La rupture algébrique / analytique dans le numérique : questions écologiques et instrumentales ». In : *Perspectives en Didactique des Mathématiques, Actes de la* 13*ième* *École d'Été*. Sous la dir. d'IUFM d'Aquitaine. 2007.

[16] I. Bloch. « Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée ». In : *Petit x* 58 (2002), p. 25–46.

[18] I. Bloch et al. « Du numérique aux limites : quelle forme prend la transition secondaire / supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse ». In : *Perspectives en Didactique des Mathématiques, Actes de la* 13*ième* *École d'Été* (2007). Sous la dir. d'IUFM d'Aquitaine.

[21] S. Bridoux. « Enseignement des premières notions de topologie à l'université : une étude de cas ». Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, 2011.

[27] M. Le Cam et F. Salles. « Les performances des élèves de terminale en mathématiques. Évolution sur vingt ans ». In : *DEPP, Note d'information* 15 (2016).

[37] S. Coppé, J-L. Dorier et L. Yavuz. « De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonctions en France en seconde ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27(2) (2007), p. 151–186.

[48] J-L. Dorier. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble, 1997.

[51] V. Durand-Guerrier. « Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques ». In : *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (2013). Sous la dir. de La Pensée Sauvage - Grenoble.

[59] I. Ghedamsi, I. Haddad et T. Lecorre. « Les notions de limite et d'intégrale du secondaire au supérieur. TD à l'école d'été ». In : *Actes de la* 18*ième* *École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Brest, Aôut 2015.

[61] N. Grenier-Boley. « Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de mathématiques à l'université ». In : *Cahier de Didirem* 59 (2009). Sous la dir. de Publication de l'IREM de Paris 7.

[63] B. Guçler. « Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom ». In : *Educational Studies in Mathematic* 82(3) (2013), p. 439–453.

[64] G. Gueudet. « Investigating the secondary-tertiary transition ». In : *Educational Studies in Mathematic* 67 (2008), p. 237–254.

[65] G. Gueudet. « La transition secondaire-supérieur : résultats et perspectives des recherches en didactique ». In : *Actes de la* $13^{ième}$ *École d'Été de Didactique des Mathématiques*. 2008, p. 159–175.

[68] N. Hardy. « Students' perceptions of institutional practices : the case of limits of functions in college level calculus courses ». In : *Educational Studies in Mathematic* 72 (3) (2009), p. 341–358.

[81] B. Litim, M. Zaki et A. Benchabir. « Difficultés conceptuelles d'étudiants de première année d'université face à la notion de convergence des suites numériques ». In : *EMF-2015-G7* (2015).

[92] P.Perrin. *À propos de la limite d'une fonction en un point*. url : `https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/analyse/fonctions/definitiondelimite.pdf`.

[93] F. Praslon. « Continuités et ruptures dans la transition S/DEUG en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement ». Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, 2000.

[97] A. Robert. « L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignementt supérieur ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(3) (1982), p. 305–341.

[101] A. Robert et F. Boschet. « Acquisition des premiers concepts d'analyse sur $\mathbb{R}$ dans une section ordinaire de DEUG première année ». In : *Cahier de Didactique des Mathématiques* 7 (1984). Sous la dir. de Publication de L'IREM de Paris 7.

[113] K-H. Roh. « An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity ». In : *Educational Studies in Mathematics* 73(3) (2010), p. 263–279.

[115] M. Schneider. « À propos de l'apprentissage du taux de variation instantané ». In : *Educational Studies in Mathematics* 23(4) (1992), p. 317–350.

[116] M. Schneider. « Des objets mentaux 'aire' et' volume' au calcul des primitives ». Thèse de doctorat. Université catholique de Louvain, 1988.

[117] M. Schneider. « Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques, à propos d'un enseignement des limites en secondaire ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21(1/2) (2001), p. 7–56.

[118] M. Schneider. « Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente ». In : *Repères IREM* 5 (1991), p. 65–82.

[121] P. Sénéchaud. *Analyse des réponses aux questionnaires sur la réforme du lycée*. Sous la dir. de site de l'Adirem-Commission InterIREM Université. 2016. url : `http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/bilan-enquete_reforme_lycee-c2iu-nov_2016.pdf`.

[131] F. Vandebrouck et S. Leidwanger. « Functions at the transition between French upper secondary school and University ». In : *Communication de la Commission Inter-Irem Université, Actes du colloque ICMI*. Monterey, Mexico, 2008.

[132] F. Vandebrouck et S. Leidwanger. « Students' vizualisation of functions from secondary to tertiary level ». In : *Communication au colloque INDRUM*. Montpellier, 2016.

6.6 Ingénieries ou scénarios d'enseignement

[14] I. Bloch. « Teaching functions in a graphic milieu : what forms of knowledge enable students to conjecture and prove ». In : *Educational Studies in Mathematics* 52 (2003), p. 3–28.

[15] I. Bloch. « The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and university ». In : *ICME10, communication to the Topic Study Group 12*. Copenhagen, 2004.

[17] I. Bloch. « Une situation d'introduction à la notion de limite en première scientifique : le flocon de von Koch ». Thèse de doctorat. Université Bordeaux, 2000.

[22] S. Bridoux. « Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique ? » In : *Actes INDRUM*. Montpellier, 2016.

[24] A. Bronner. « Étude didactique des nombres réels ». Thèse de doctorat. Laboratoire Leibnitz IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble., 1997.

[26] B. Burn. « The vice : some historically inspired and proof-generated steps to limits of a sequence ». In : *Educational Studies in Mathematics* 60 (2005), p. 269–295.

[43] A. Decroix et M. Rogalski. « Atelier : l'intégrale, de la physique aux mathématiques ». In : *Actes du colloque de Lyon la reforme des programmes du lycée et alors ?* IREM de Paris-Diderot, 2013.

[48] J-L. Dorier. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble, 1997.

[52] V. Durand-Guerrier. « Questions de logique dans l'enseignement supérieur. Quelques pistes pour faire évoluer les pratiques enseignantes ». In : *Actes Question de pédagogie dans l'Enseignement Supérieur*. Lille, 2005.

[58] I. Ghedamsi. « Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : articuler contrôles pragmatiques et formels ». Thèse de doctorat. Université de Tunis et Université V. Sagalen-Bordeaux II, 2008.

[62] N. Grenier-Boley et al. « Introduction aux concepts de limite de fonction et de suite : adaptation de deux ingénieries ». In : *EMF2015-GT7* (2015).

[69] C. Hauchart et N. Rouche. *Apprivoiser l'infini : un enseignement des débuts de l'analyse*. G.E.M, Ciaco éditeur Louvain-la-Neuve, 1997.

[70] C. Hauchart et M. Schneider. « Une approche heuristique de l'analyse ». In : *Repères IREM* 25 (1996), p. 35–62.

[71] P. Job. « Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques ». Thèse de doctorat. Université de Liège, 2011.

[76] T. Lecorre. « Définir : une nécessité à construire. Le cas de la définition de la limite d'une fonction ». In : *Repères IREM* (2015).

[77] T. Lecorre. « Des conditions de conception d'une ingénierie relation à la définition de la notion de limite : élaboration d'un cadre basé sur un modèle de rationalité pour l'accès aux objets mathématiques complexes ». Thèse de doctorat. Université de Grenoble, 2016.

[82] J. Mamona-Downs. « Letting the intuitive bear on the formal : a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence ». In : *Educational Studies in Mathematics* 28 (2001), p. 259–288.

[83] M. Maschietto. « Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problème d'analyse à l'université ». In : *Recherches en Didatique des Mathématiques* 21(1/2) (2001), p. 123–156.

[84] M. Maschietto. « Graphic Calculators and Micro Straightness : Analysis of a Didactic Engineering ». In : *International Journal of Computer for Mathematics Learning* 13 (2008), p. 207–230.

[98] A. Robert. « L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG ». In : *Bulletin de l'APMEP* 340 (1983), p. 432–449.

[103] J. Robinet. « Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(4/3) (1983), p. 232–292.

[105] J . Rogalski et M. Rogalski. « Enseigner des méthodes pour donner aux étudiants une expertise en résolution de problèmes. Un exemple en licence ». In : *EMF2015-G7* (2015).

[106] M. Rogalski. « Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode ». In : *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG : Commission Inter-Irem.* IREM de Paris-Diderot, 1990, p. 197–204.

[107] M. Rogalski. « De la notion couplée de tangente et de dérivée à la notion de limites ». In : *Autour de la notion de limite en classe de première scientifique : Brochure IREM.* 97. IREM de Paris-Diderot, 2015, p. 379–388.

[111] M. Rogalski. « Revenir au sens de la notion de limite par certaines de ses raisons d'être : un chantier pour le début de l'analyse à l'université ». In : *Actes du colloque INDRUM 2016* (2016).

[122] P. Sénéchaud. *Compte-rendu de passation en L1 d'une ingénierie sur la notion de limite de fonction.* Sous la dir. de site de l'Adirem-Commission InterIREM Université. 2015. url : http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique394&var_mode=calcul.

Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner.

Par la Commission Inter-IREM Université

Auteurs : Isabelle Bloch[1], Stéphanie Bridoux [2], Viviane Durand-Guerrier[3], Denise Grenier[4], Patrick Frétigné[5], Jacqueline Mac Aleese[6], Gwenola Madec[7], Chantal Menini[8], Marc Rogalski[6], Pascale Sénéchaud[9], Fabrice Vandebrouck.[6]

[1]Université de Bordeaux
[2]Université de Mons, L.D.A.R.
[3]IREM de Montpellier
[4]IREM de Grenoble
[5]IREM de Rouen
[6]IREM de Paris
[7]IREM de Paris Nord
[8]IREM d'Aquitaine
[9]IREM de Limoges

La partie II, « Exemple d'usage en physique » a été écrite par Cécile de Hosson, Nicolas Décamp et Nathalie Lebrun. (L.D.A.R.)

Coordinatrice : Pascale Sénéchaud

Résumé
Nous débutons avec différents constats sur l'enseignement des notions de limite de fonctions numériques à une variable et de limite de suites numériques. Ces constats portent sur la richesse des propriétés des fonctions, sur la manière dont les étudiants les appréhendent et sur les raisons qui justifient l'introduction des suites comme objet de la transition lycée-université. Cette première partie propose également une analyse de plusieurs manuels de niveau lycée et première année universitaire dans leurs présentations des limites et des réels.
Des exemples d'utilisation en physique sont présentés dans la deuxième partie : limite d'un modèle ou limite comme borne à ne pas dépasser.
Des pistes pour enseigner ces notions sont proposées dans la troisième partie. On y trouve trois ingénieries portant sur la limite d'une suite ou la limite d'une fonction ainsi que des motivations possibles à la notion de limite d'une suite et des réflexions sur l'importance de la limite dans les raisonnements en analyse.

Mots clés : limite de fonctions numériques à une variable, suite numérique, limite, fonction, approximation, réels, convergence, transition, ingénieries, lycée-université.

Niveau : terminale, licence première année.

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
UNIVERSITE PARIS DIDEROT
Directeur : Fabrice Vandebrouck - http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/
Dépôt Légal : 2017 – ISBN : 978-2-86612-383-3