C'est ainsi, ça se voit !

Valerio Vassallo

Télé-séminaire International des IREM
04 juin 2021

Citation

C'est à celui en toi qui sait être seul, à l'enfant, que je voudrais parler et à personne d'autre.

Alexandre Grothendieck (1928 - 2014)

Une ligne, c'est un point qui est parti en promenade.

Paul Klee (1879 - 1940)

Genèse du projet - Questions et encore des questions

È possibile un'educazione al « saper vedere in matematica » ? Ainsi s'interrogeait (B.U.M.I., Serie 3, Vol. 22, 1967) la didacticienne des mathématiques Emma Castelnuovo (1913 - 2014) il y a cinquante ans environ.

Emma réfléchissait sur un très célèbre (en Italie) livre de Bruno de Finetti (fin mathématicien, probabiliste et statisticien) : *Il « saper vedere » in matematica* (Loescher Editore Torino, 1967).

Genèse du projet - Questions et encore des questions

È possibile un'educazione al « saper vedere in matematica »? Ainsi s'interrogeait (B.U.M.I., Serie 3, Vol. 22, 1967) la didacticienne des mathématiques Emma Castelnuovo (1913 - 2014) il y a cinquante ans environ.

Emma réfléchissait sur un très célèbre (en Italie) livre de Bruno de Finetti (fin mathématicien, probabiliste et statisticien) : *Il « saper vedere » in matematica* (Loescher Editore Torino, 1967).

Genèse du projet - Questions et encore des questions

Il s'agit de la question qui se pose tout professeur de mathématiques :

« *mais pourquoi mes élèves ne voient-ils pas ce que je vois ?* ».

Nous nous posons la même question entre collègues :

« *pourquoi mon collègue ne voit-il pas ce que je vois ?* »

Sans connaître encore les travaux très intéressants de Emma Castelnuovo et Bruno De Finetti, j'ai commencé ma recherche en me posant des questions qui traversaient mon esprit depuis ma jeunesse : « *pourquoi ma façon de voir un objet, une personne, un tableau ou d'analyser une situation n'était pas la même que celle d'un jeune de mon âge ou d'un adulte ?* »

Genèse du projet - Questions et encore des questions

Il s'agit de questions apparemment simples mais qui peuvent éveiller la curiosité, non seulement car elles révèlent la différence et la richesse des façons de voir entre êtres humains mais aussi parce qu'elles soulèvent notamment la question de la construction des connaissances. Cette construction a lieu dans des contextes différents : dans la solitude de son bureau, en famille, en société et à l'école. L'école, à tous les niveaux, n'a fait qu'amplifier cette question, car mes professeurs, en particulier ceux de mathématiques, disaient d'une façon péremptoire : *c'est ainsi, ça se voit !*

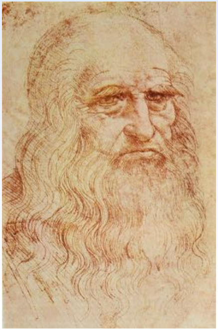
Mais pourquoi, parfois, disons même, souvent, je ne voyais pas ce que le professeur voyait ?

Genèse du projet - Bifurcations

Les années passant, cette question est devenue presque une question obsessionnelle... puis une recherche, depuis vingt ans environ... pendant lesquels je me suis posé à peu près les mêmes questions que Emma Castelnuovo et Bruno De Finetti. J'ai fini par me consacrer complètement à la recherche de réponses à ces questions.

J'ai fini par me convaincre que le *non voir*, le *voir différemment*, l'être *prévoyant*, *visionnaire*... sont des faces distinctes d'une même médaille : d'un côté, celle des difficultés à voir et de l'autre celle de la créativité !

Genèse du projet - Bifurcations



Chi segue sempre gli altri, non passa mai davanti !

Qui marche derrière d'autres ne passe jamais devant eux ; qui ne fait rien de bien par lui-même ne peut pas profiter des oeuvres des autres.

Genèse du projet - Bifurcations

Ainsi, en suivant les conseils de Leonardo et de Michelangelo, j'ai cherché dans les directions les plus variées : celle de la compréhension des raisons qui pouvaient être à l'origine des *difficultés à voir* et celle de la compréhension *des moments de grâce* où tout devient clair, et alors, pour notre joie, la plus grande, nous sommes créatifs et avons beaucoup d'idées.

Dans différentes situations, disons mathématiques pour l'instant, j'ai croisé des étudiants qui rencontraient des blocages sur lesquelles je bloquais également et mes collègues aussi. Je donnerai des exemples.

Depuis le début, ces difficultés m'ont encouragé à créer une sorte de musée, dans lequel les tableaux seraient remplacés par des configurations géométriques, surtout celles qui posaient des problèmes non seulement à des étudiants très forts mais aussi à des universitaires expérimentés.

Genèse du projet - Bifurcations

On peut déjà se demander comment mener de telles recherches. C'est ce parcours que je veux vous raconter aujourd'hui, en attendant l'essai que je suis en train d'écrire sur le sujet. Un parcours qui m'a amené à observer les mathématiques, disons même leur fonctionnement, de l'école maternelle jusqu'à l'université, en observant de plus près ce qui se passe au collège et au lycée. Des nombreux exemples illustrerons ce parcours.

Genèse du projet - Bifurcations

Tout d'abord je tiens à préciser quelques points qui me semblent cruciaux :

- Il est important de disposer de beaucoup d'exemples pour lesquels les élèves, les étudiants, les collègues ont rencontré des difficultés.
- Il est également important de disposer de beaucoup d'exemples où nous même avons rencontré des difficultés.
- Il est judicieux de choisir des configurations géométriques où il ne faut pas recourir à des constructions auxiliaires et d'autres pour lesquelles les constructions auxiliaires s'imposent.
- Mener une enquête pour chaque exemple, afin de dresser une liste, même approximative, des difficultés rencontrées pour *voir*.
- Proposer des ateliers *art & mathématiques* (que j'ai nommé *cours liés*) dans lesquels la note sera remplacée, si besoin, par une auto-évaluation. L'élève apprendra du plus jeune âge le sens de l'expression *être exigeant par rapport à soi-même*.

Genèse du projet - Bifurcations

Ensuite, je propose de quitter le domaine des mathématiques et d'aller voir ce qui se passe... ailleurs. J'ai choisi, comme deuxième domaine d'enquête, la peinture, et cela pour deux raisons :

- la première : j'aime dessiner ;
- la deuxième, la peinture est un domaine excellent pour réflechir ;
- j'aurais pu choisir :
  - la sculpture,
  - la photographie,
  - le cinéma,
  - la littérature,
  - ...

  je reviendrai plus tard sur ces points.

Genèse du projet - Bifurcations

Dans le domaine de la peinture, pour moi moins connu, disons même inconnu, il a été important de me former sur des livres. Lesquels ? Deux se sont imposés presque tout de suite ; j'ai découvert le troisième grâce à un ami, le président de la Cité des Géométries, Francis Trincaretto, qui connaît mes sujets de recherche :

- *On y voit rien* de Daniel Arasse, Folio, 2000
- *Histoires de peintures* de Daniel Arasse, Folio, 2004

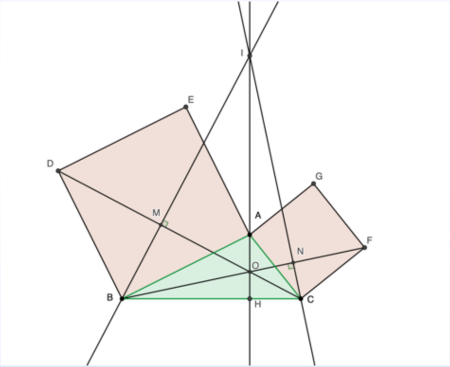
et la dernière, magnifique et agréable découverte :

- *Histoire d'oeils* de Philippe Costamagna, Éditions Grasset, 2016.

Le regard en mathématiques

L'intérêt pour les cas où il n'y a pas des constructions auxiliaires réside dans le fait qu'il faut utiliser le regard et ses connaissances. Qu'il soit dit clairement : la connaissance d'un cours est essentielle pour accompagner « l'éducation au regard ». Voyons tout de suite un bel exemple.

Tableau géométrique de Vecten, 1817 : *Une rencontre inattendue*.



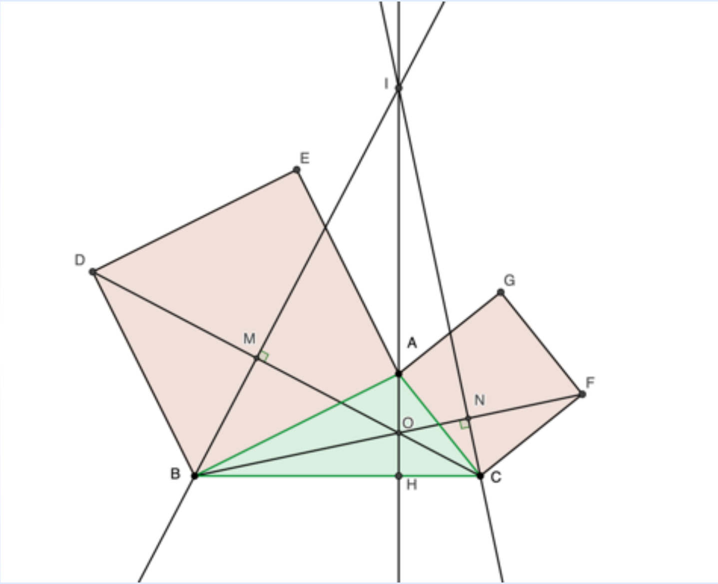
Regards sans constructions auxiliaires - Premier exemple

Ce que j'ai nommé *une rencontre inattendue* est un problème connu depuis 1817 et soulevé par Vecten, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Nîmes.

Sur les deux côtés AB et BC d'un triangle quelconque ABC, on construit deux carrés $ABDE$ et $ACFG$; on construit ensuite le segment DC et le segment BF, puis le segment EG.

1. Démontrer que les deux perpendiculaires à DC et BF, issues de B et C respectivement, se rencontrent (la rencontre inattendue !) en un point I appartenant au prolongement de la hauteur AH, relative au côté BC, du triangle ABC.
2. Démontrer que les droites (DC) et (BF) se rencontrent sur la droite AH.
3. Démontrer que la perpendiculaire d'origine A au segment EG est une médiane du triangle ABC.

Regards sans constructions auxiliaires - Premier exemple



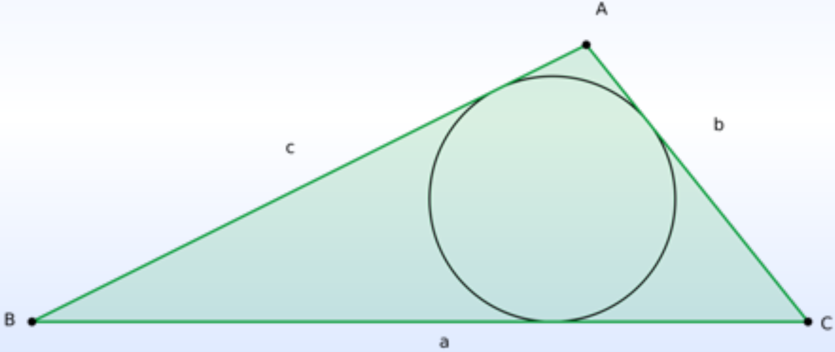
Regards sans constructions auxiliaires - Premier exemple

Commentaire. Ce problème est un exemple de sujet ayant mis en difficultés, il y a quelques années, non seulement des élèves d'une classe du Lycée Louis le Grand, mais aussi des professeurs d'université. La construction étant belle en elle même et le problème intéressant, j'ai accepté le défi d'une collègue d'aller chercher la solution. Surtout la recherche d'une solution sans l'utilisation des coordonnées (!) pour la première et dernière question. Au début, j'ai essayé plusieurs constructions : mes feuilles étaient devenues illisibles ! Puis, je me suis décidé à tout effacer, à ne rien faire et, surtout, à regarder, les bras croisés, la figure pendant quinze minutes environ.

La solutions « *s'est alors levée de la feuille* » et elle est venue vers moi. J'étais heureux.

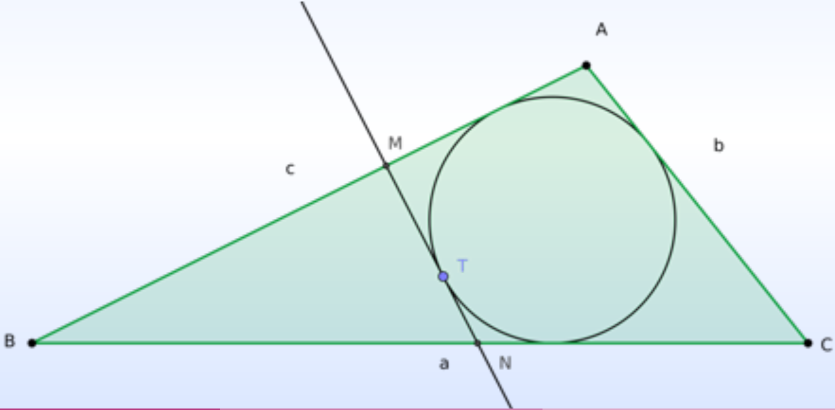
Regards sans constructions auxiliaires - Deuxième exemple

Soit ABC un triangle. Considérons le cercle inscrit dans le triangle ABC, dont nous connaissons les mesures des côtés : a, b, c. Considérons une tangente au point T, choisi arbitrairement sur ce cercle, et soient M et N les intersections de cette tangente avec les côtés AB et BC respectivement. Quel est le périmètre du triangle BNM ?



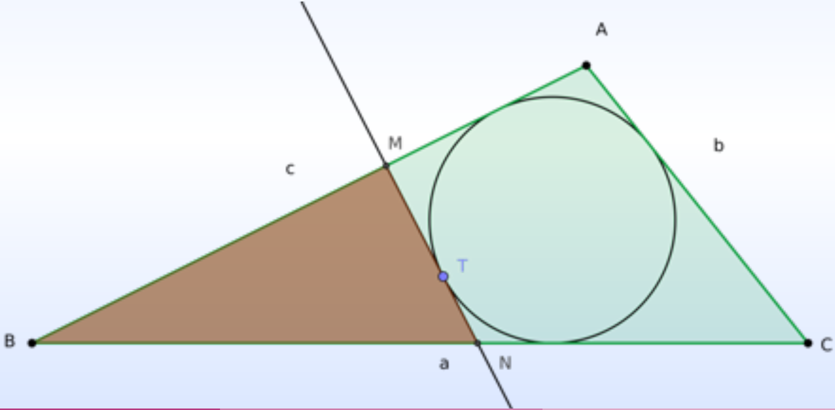
Regards sans constructions auxiliaires - Deuxième exemple

Soit ABC un triangle. Considérons le cercle inscrit dans le triangle ABC, dont nous connaissons les mesures des côtés : a, b, c. Considérons une tangente au point T, choisi arbitrairement sur ce cercle, et soient M et N les intersections de cette tangente avec les côtés AB et BC respectivement. Quel est le périmètre du triangle BNM ?



Regards sans constructions auxiliaires - Deuxième exemple

Soit ABC un triangle. Considérons le cercle inscrit dans le triangle ABC, dont nous connaissons les mesures des côtés : a, b, c. Considérons une tangente au point T, choisi arbitrairement sur ce cercle, et soient M et N les intersections de cette tangente avec les côtés AB et BC respectivement. Quel est le périmètre du triangle BNM ?

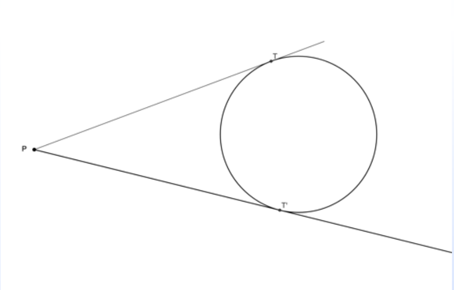


Regards sans constructions auxiliaires - Deuxième exemple

Commentaire. Aucun étudiant en troisième année de Licence (2017/2018) de mathématiques à Lille n'a su trouver le chemin pour arriver à la solution du problème proposé par un collègue (cours de *Géométrie élémentaire d'un point de vue supérieur*) qui, en secouant sa tête, se demandait désespérément :

> « *Dans cet exercice il n'y avait rien à faire et les étudiants n'ont rien vu : pourquoi ?* »

Et pourtant le résultat du collège, à savoir $PT = PT'$ aurait permis de conclure.

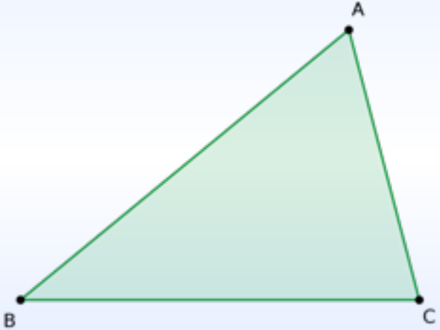


Regards avec constructions auxiliaires

Lorsque le niveau du « regard monte » les constructions ou les opérations auxiliaires s'imposent. Dans ces cas, en plus du regard et des connaissances, il est nécessaire d'avoir une bonne pratique de la recherche, un grand esprit d'initiative et une confiance en soi considérable. Voici quelques exemples, pas toujours faciles à traiter.

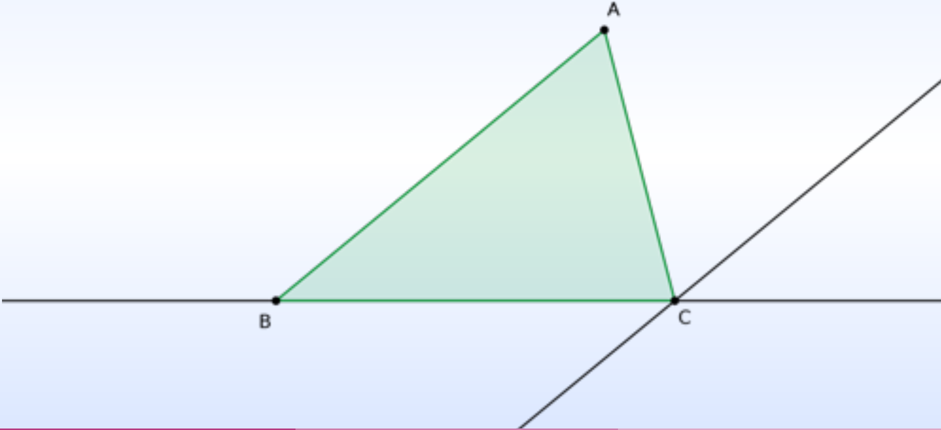
Regards avec constructions auxiliaires - Premier exemple

Euclide : démontrer que la somme des angles intérieurs dans un triangle ABC est un angle plat.



Regards avec constructions auxiliaires - Premier exemple

Euclide : démontrer que la somme des angles intérieurs dans un triangle ABC est un angle plat.

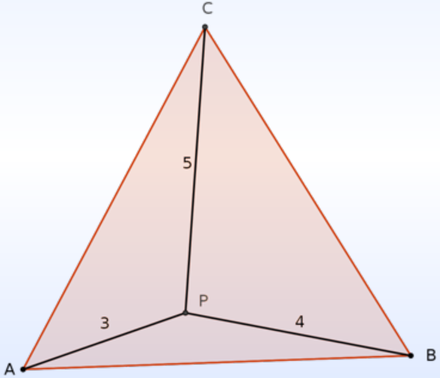


Regards avec constructions auxiliaires - Premier exemple

Commentaire. Historiquement, je pense que c'est le premier énoncé où regard et pensée sont en action. Il s'agit d'un message qui aurait pu me faire réflechir depuis la première année du lycée sur l'éducation au regard et, peut-être qu'inconsciemment, ma recherche date de cette époque.

Regards avec constructions auxiliaires - Deuxième exemple

« La rose de Sophie » : il s'agit du problème suivant. Étant donné un triangle équilatéral ABC, supposons qu'il existe un point P à l'intérieur du triangle tel que $PA = 3$, $PB = 4$ et $PC = 5$. Quelle est l'aire du triangle ABC ? Aziz El Kacimi avait découvert ce problème dans un blog dont l'internaute cherchait une solution.



Regards avec constructions auxiliaires - Deuxième exemple

Commentaire. Celui-ci est le premier exemple de problème donné à mes étudiants en leur disant que j'avais eu une idée mais que je n'arrivais pas à avancer après une semaine d'observations sur la figure. J'avais donc eu l'idée de considérer les points symétriques du point P par rapport à chacun de ses côtés.

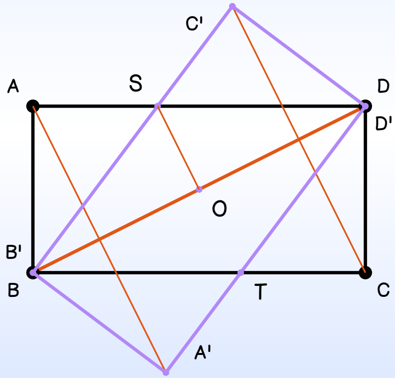
Puis... le vide sidéral dont j'ignore les raisons encore aujourd'hui. J'expose alors mon idée et mon blocage à la classe (CAPES), pour leur montrer qu'il n'est pas vrai qu'un professeur sait ou voit tout !

Sophie, une semaine après, retourna avec la solution que je vous laisse chercher.

Regards avec constructions auxiliaires - Troisième exemple

Le « rectange » : il s'agit du problème suivant. Étant donné un rectangle $ABCD$ et la diagonale BD, on considère les symétriques des sommets du rectangle par rapport à cette diagonale ; notons les A' , C' en sachant que $B' = B$ et $D' = D$. Soient S et T les intersections de AD et $B'C'$ et de BC et $A'D'$ respectivement.

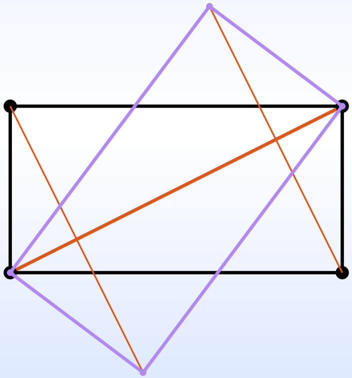
Que peut-on dire du quadrilatère $SBTD$?



Regards avec constructions auxiliaires - Troisième exemple

Le « rectange » : il s'agit du problème suivant. Étant donné un rectangle $ABCD$ et la diagonale BD, on considère les symétriques des sommets du rectangle par rapport à cette diagonale ; notons les A' , C' en sachant que $B' = B$ et $D' = D$. Soient S et T les intersections de AD et $B'C'$ et de BC et $A'D'$ respectivement.

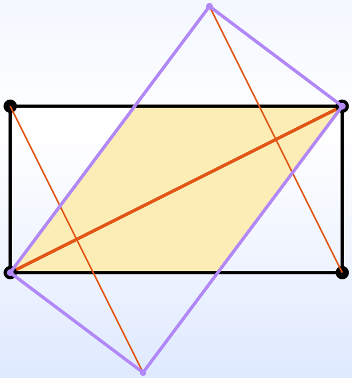
Que peut-on dire du quadrilatère $SBTD$?



Regards avec constructions auxiliaires - Troisième exemple

Le « rectange » : il s'agit du problème suivant. Étant donné un rectangle $ABCD$ et la diagonale BD, on considère les symétriques des sommets du rectangle par rapport à cette diagonale ; notons les A' , C' en sachant que $B' = B$ et $D' = D$. Soient S et T les intersections de AD et $B'C'$ et de BC et $A'D'$ respectivement.

Que peut-on dire du quadrilatère $SBTD$?



Regards avec constructions auxiliaires - Troisième exemple

Commentaire. Le mérite d'avoir trouvé le joli nom de « rectange » revient à François Recher ; il l'a trouvé comme fusion des mots « rectangle » et « losange ».

Trouver de jolis noms pour des théorèmes peut aussi faire partie d'une activité de recherche. Au fond, chaque tableau dans un musée porte bien un nom !

Je pense que cette configuration, comme d'autres, est un exemple d'éléments géométriques en créant d'autres et engendrant ainsi de la « beauté mathématique ».

Regards avec constructions auxiliaires - Quatrième exemple

« La beauté canonique » est bien connue : étant donné la somme suivante

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

comment la transformer en produit ?
Dans ce cas « on rajoute zéro » et on « multiplie par 1 » : algèbre merveilleuse !

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}) \\
&= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a} + \tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{b^2}{4a^2}\right) \\
&= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}\right] \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

Regards avec constructions auxiliaires - Quatrième exemple

Commentaire. Sans commentaire !

Regards avec constructions auxiliaires - Cinquième exemple

« La limite unique ». Il s'agit du problème suivant. Une suite

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$$

convergente ne peut pas admettre deux limites différentes.
Supposons, par l'absurde, que la suite $\{a_n\}$ ait deux limites l et λ distinctes. À partir d'un n_0 commun, on aurait définitivement

$$\mid a_n - l \mid < \varepsilon, \qquad \mid a_n - \lambda \mid < \varepsilon.$$

Mais alors on aurait

$$\mid l - \lambda \mid \leqslant \mid a_n - l \mid + \mid a_n - \lambda \mid < 2\varepsilon,$$

d'où, puisque ε est arbitraire, et donc 2ε aussi, on aurait $\mid l - \lambda \mid = 0$, c'est-à-dire $l = \lambda$.

Regards avec constructions auxiliaires - Cinquième exemple

Commentaire. Sans commentaires.

Oui, un : beauté de l'algèbre ? beauté de l'analyse ?

Le regard en art

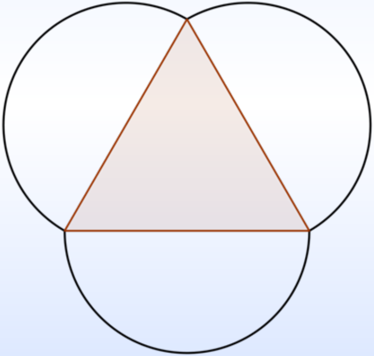
Des exemples donneront encore mieux une idée de comment on pourrait pratiquer « l'éducation au regard ». Je tiens d'abord à citer une expérience devant élèves, à Lille. Dans une classe de CM2, l'étude des « Vieilles » (1808-1812) de Francisco Goya a précédé celle d'une configuration mathématique.

Le regard en art

Des exemples donneront encore mieux une idée de comment on pourrait pratiquer « l'éducation au regard ». Je tiens d'abord à citer une expérience devant élèves, à Lille. Dans une classe de CM2, l'étude des « Vieilles » (1808-1812) de Francisco Goya a précédé celle d'une configuration mathématique.

Le regard en art

Des exemples donneront encore mieux une idée de comment on pourrait pratiquer « l'éducation au regard ». Je tiens d'abord à citer une expérience devant élèves, à Lille. Dans une classe de CM2, l'étude des « Vieilles » (1808-1812) de Francisco Goya a précédé celle d'une configuration mathématique.



Le regard en art

J'avais demandé aux élèves s'ils avaient compris le pourquoi de ces deux activités. La réponse est arrivée très vite ; une jeune fille a levé la main et a dit :

> « *il me semble que si on comprend bien la composition d'un tableau, alors cela aide à mieux comprendre une configuration mathématique !* »

et elle a rajouté :

> « *j'ai préféré les activités dans cet ordre ; cela m'a aidé !* »

Regards dans l'art. Premier exemple.

Jacques-Louis David
(Paris,1748 - Bruxelles,1825)

Bélisaire demandant l'aumône

Huile sur toile
Salon de 1781
Taille 3,24m x 3,24m

Palais des Beaux Arts de Lille
Acquis en 1863

Un des tableaux présentés dans les formations à l'I.R.E.M. de Lille a été celui de *Bélisaire demandant l'aumône* de Jacques-Louis David.

Regards en art. Premier exemple

Le 24 août 1781, Jacques-Louis David (33 ans) entre à l'Académie après que celle-ci ait accepté son *Bélisaire demandant l'aumône*, à savoir dix-sept ans après les débuts de sa carrière. Pendant ces années, sa motivation était faible, il faisait des rencontres et il avait de déceptions ; ces éléments expliquent peut-être les difficultés que David rencontrera lorsqu'il devra présenter une oeuvre pour devenir *pensionnaire* de l'Académie Française de peinture à Rome.

Regards en art. Premier exemple

D'où lui est venue l'idée du tableau ? David avait été invité à traiter le thème du « héros déchu ». Il semblerait que David ait trouvé le personnage de Bélisaire dans le célèbre roman de l'époque de l'écrivain Jean-François Marmontel (1723 - 1799).

Regards dans l'art. Deuxième exemple.

Le tableau « Le loup d'Agubbio » (1877) de Luc-Olivier Merson a été l'un des derniers tableaux étudiés dans les expérimentations faites à Lille, dans le cadre, cette fois-ci, d'un projet SEPIA (Soutien à l'Expérimentation Pédagogique et à l'Innovation dans l'Académie) dans une zone Rep +.

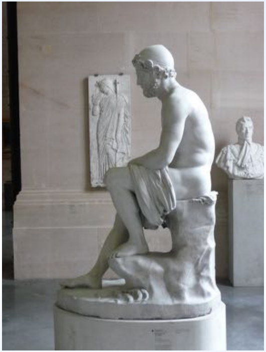
Croisements

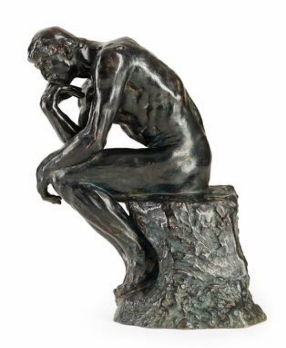
Ces domaines, la peinture et les mathématiques, étant très vastes, ils ont été circonscrits, tout au moins au début. Dans mes choix j'ai été aidé par la présence à Lille d'un magnifique musée :
le Palais des Beaux-Arts de Lille.

Croisements

Mon attention est allée presque tout de suite sur le tableau : « Bélisaire demandant l'aumône » de Jacques-Louis David (1780), puis, j'ai travaillé sur quelques tableaux d'Eugène Delacroix, de Peter Paul Rubens, de Nicolas Mignard et, plus recemment, de Jean-François Millet, Luc-Olivier Merson et Francisco Goya, et quelques sculptures de Denis Foyatier, Théophile Bra et Auguste Rodin (à Paris).

Intrecci





Croisements

J'ai prévu de m'intéresser aussi à l'art contemporain et aux oeuvres du musée du LaM, Lille Métropole Musée d'art moderne, d'art contemporain, d'art brut à Villeneuve d'Ascq.

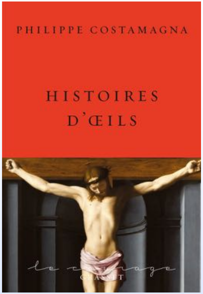
Croisements

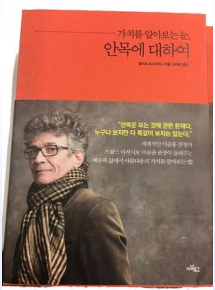
Travailler en groupe et sortir de mon isolement a contribué à enrichir mes idées. Les premiers collègues avec lesquels j'ai commencé à travailler sont Aziz El Kacimi, Romain Caillé et François Recher ; ensuite, le groupe s'est élargi à Sophie Bourreau et Edit Rakotomana, et, en dernier à Enrico Rogora et son équipe italienne (Rome). Ces mathématicien(ne)s ne pouvaient pas avancer sur les idées autour du regard sans l'aide des historiens de l'art de Lille (PBA) : Juliette Barthélémy d'abord et Marie-José Parisseaux ensuite ; à Rome, Enrico Rogora et moi-même avons d'abord profité des compétences de Silvia Pedone (Galleria Corsini), puis de Michele di Monte (Palazzo Barberini) et, enfin, de Francesco Sorce.

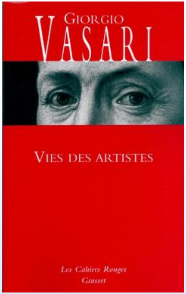
Croisements

Je souhaite aller plus loin avec vous sur les croisements entre art et mathématiques, surtout après la lecture de différents livres d'historiens de l'art et d'artistes eux-mêmes, comment par exemple les *Vies* de Giorgio Vasari, et l'étude des vies d'Auguste Rodin et de Pablo Picasso ; mais, pour l'instant, je souhaite m'arrêter sur *Histoires d'oeils* (2016), le livre de Philippe Costamagna.

Pourquoi ai-je été touché par ce livre ?



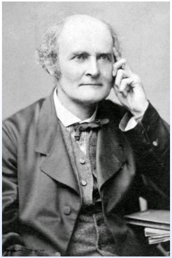




Croisements

Les métiers de mathématicien ou de professeur de mathématiques et d'historien de l'art ou d'artiste s'ignorent souvent entre eux. Jusqu'à une certaine époque, il n'était pas nécessaire de faire ces distinctions. Fermat était magistrat et mathématicien, Cardano médecin et mathématicien, Arthur Cayley était avocat et mathématicien, Henri Poincaré était mathématicien, physicien, ingénieur et philosophe ; comment ne pas citer Leonardo : artiste, ingénieur, mathématicien, philosophe, poète, géographe...






Croisements

À notre époque, on ignore parfois quels sont les objectifs de certaines professions. Nous avons l'habitude d'entendre que nous vivons l'époque des spécialisations. Par conséquent, le professeur de mathématiques n'a plus besoin de connaître l'activité de l'historien de l'art et vice-versa.

Et pourtant, après quarante ans environ d'enseignement et trente de recherche, j'ai fini par trouver des points en commun entre l'historien de l'art et l'enseignant-chercheur en mathématiques : le regard.

Ce mot « regard » mériterait quelques explications dans le cadre de cette recherche.

Croisements

En mathématiques, le regard est ou peut être toujours en action et apporter beaucoup plus qu'une simple observation superficielle.

Un cylindre, par exemple, peut être regardé comme une surface lisse, mais aussi comme une infinité de cercles (sections planes) ou comme un ensemble de droites, les droites génératrices, ou encore comme une infinité d'hélices circulaires. Chacune de ces façons de voir le cylindre a un sens, apporte du sens et des points de vues nouveaux !

Croisements

Dans le chapitre *Les nombreuses vies de l'oeil*, Philippe Costamagna écrit :

> « Un historien de l'art peut être ému mais, aussi brillant et aussi sentimental soit-il, il ne sera pas capable de dire d'où provient son émotion et, s'il fait une différence entre le XVème et le XIXème siècle, ce ne sera qu'une question de culture. Il suffit d'avoir fréquenté les musées pour être capable de reconnaître un Raffaello, un Poussin, un Vermeer, un Delacroix, un Manet, un Mondrian ou un Matisse, mais l'oeil est le seul à entrer dans l'oeuvre. Or, cette acuité du regard s'illustre dans tout un panel de métiers. Je crois qu'on a l'oeil de naissance, et qu'on le forme dans diverses directions. »

Croisements

De mon point de vue, c'est-à-dire comme enseignant de mathématiques, je ne suis pas convaincu que nous formons des « oeils mathématiques » chez nos élèves. Nous passons, à mon avis, trop peu de temps à observer et à faire parler nos figures, nos formules, nos théorèmes.

Après plusieurs lectures, dont celles citées, j'ai l'impression que les historiens de l'art passent davantage du temps à observer les tableaux que les professeurs les objets mathématiques. Comme le précise Philippe Costamagna, in fine « l'oeil est le seul à entrer dans l'oeuvre ». Voilà pourquoi une éducation au regard devient inévitable pour tous, pour les élèves comme pour les professeurs.

Le temps passé devant un « tableau mathématique » (configurations géométriques, formules...) est important pour apprécier un théorème ou une configuration géométrique particulière. Si l'on saute cette étape, non seulement nous nous privons d'une forme de plaisir offert par les mathématiques mais de bien d'autres choses... J'y reviendrai.

Croisements

Daniel Arasse au sujet de la « Camera degli sposi » de Mantegna (Palazzo ducale di Mantova, XVmo secolo) :

Croisements

> « Comme je n'étais pas satisfait par ce que j'avais pu en lire comme explications, j'ai passé des heures dans cette pièce à regarder encore et encore et à essayer de comprendre ce que cette peinture nous disait ou avait dit, silencieusement. La peinture m'a d'ailleurs souvent récompensé de ces heures de contemplation. »

C'est dans ce sens que j'entends le mot « éducation », dans le contexte que je suis en train de décrire : l'« éducation au regard ». Nous pouvons donc apprendre beaucoup de textes écrits par ces « oeils » éduqués à une observation prolongée et fine des tableaux.

Croisements

Ici vaut la peine de rappeler que le mot « théorème » signifie étymologiquement « regarder », « contempler ».

Lorsque Daniel Arasse est allé à Dresde (Gemäldegalerie) et qu'il a vu « La Madonna Sistina » (1513 - 1514) de Raffaello, il passa environ une heure devant le tableau.

Croisements

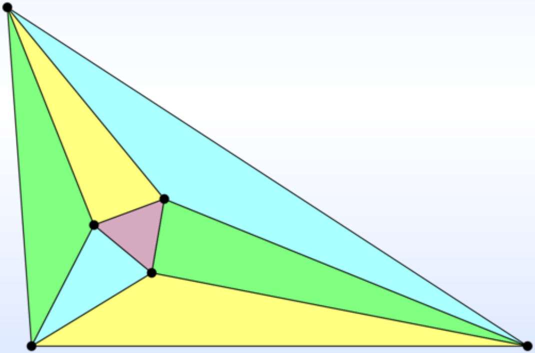
Il écrit : « Je suis resté à peu près une heure, à me déplacer, et à un moment donné le tableau s'est « levé ». Et là, tout d'un coup, j'ai vu *La Madone Sixtine*, et je dois dire que j'ai vu l'un des tableaux intellectuellement les plus profonds de l'histoire de la peinture éuropéenne et, si on aime et connaît Raphaël, l'un de ses tableaux les plus émouvants. »

Et il termine : « Et depuis, je n'ai plus besoin de voir *La Madone Sixtine* ; elle s'est « levée », et je garde en moi cette émotion. »

Croisements

Lorsque j'explique à mes amis que j'ai passé beaucoup de temps à contempler la configuration de Morley (1898), la réaction est toujours la même : l'incrédulité.

Pourquoi ? Parce qu'un mathématicien calcule, il ne contemple pas ! Quelle image peut donc avoir le public de notre discipline ? Celle que nous mêmes donnons.



Croisements

Symboliquement, contempler des objets mathématiques en classe, devant ses propres élèves, même pendant quelques minutes, est une action riche de sens y compris pour évoquer la « beauté mathématique ». Parfois, les plus curieux, me demandent : « mais, enfin, qu'entendez vous, mathématiciens, par « beauté mathématique » » ?.

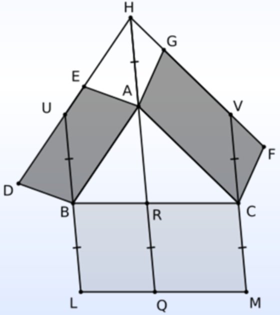
Croisements

Difficile à expliquer lorsque on est ému au musée devant un tableau, au théâtre après l'interprétation forte d'une pièce ou à un concert lorsque la musique arrive à toucher la corde de nos sentiments...

Et en mathématiques ? Est-il possible de créer de telles atmosphères ? Je pense que oui, j'y crois, et j'en suis témoin, dans mes classes, comme dans les classes où nous expérimentons ; il est nécessaire de tenter de mettre de côté la pudeur car trop souvent elle nous empêche de montrer nos émotions.

Croisements

Nous pouvons démontrer de façon rigoureuse le théorème de Pythagore, mais si nous ne l'entourons pas des attentions nécessaires, et bien au-delà de la simple démonstration, nous perdrons toute la profondeur de ce théorème et le goût de toutes ses conséquences : la découverte des irrationnels, donc de l'infini non dénombrable, la notion de distance, de produit scalaire, et ses liens avec les espaces topologiques ou - retour en arrière - ... le théorème de Pappus !



Croisements

Un professeur de mathématiques pourrait donc emprunter l'attitude de l'historien de l'art et enchanter ses élèves. Les manuels également peuvent jouer ces rôles enchanteurs avec des commentaires non seulement techniques mais aussi esthétiques ou historiques, car même l'histoire des mathématiques peut, en montrant le développement des idées, contribuer à travailler l'imagination des plus jeunes et à éduquer le regard.

Croisements

Dans son livre, Philippe Costamagna écrit dès les premières pages : « Néanmoins, la fréquentation des belles oeuvres, l'imprégnation de la beauté demeurent et resteront toujours les conditions indispensables à l'éclosion d'un grand historien de l'art ».

Je vous renvoie encore une fois à son livre, et je vous invite fortement à lire les belles pages où est décrite la découverte du chef-d'oeuvre du Bronzino.

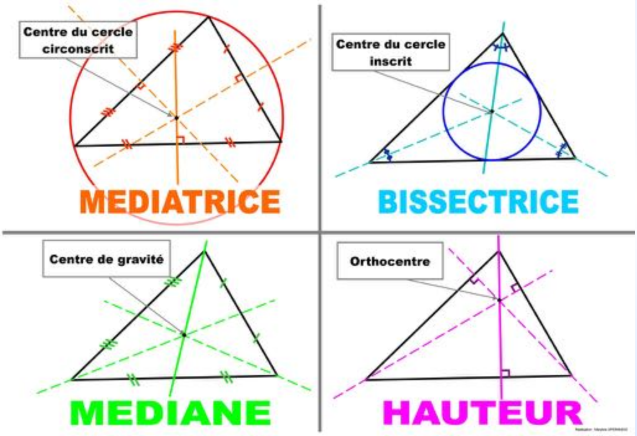
Croisements

Je pense être devenu un grand admirateur des mathématiques et des mécanismes de son apprentissage. C'est en fréquentant de beaux théorèmes, pas nécessairement célèbres, que j'ai eu envie d'enquêter. Comme dernièrement, en interviewant des mathématiciens sur leur façon de travailler et de voir les mathématiques (cf. sortie du Web-documentaire "Paroles de déchiffreurs", 14 interviews de mathématicien(ne)s)

« Le musée doit devenir son lieu d'éducation » écrit Philippe Costamagna en parlant de l'éducation des historiens de l'art. Mon musée est celui des configurations géométriques, des formules, des théorèmes...

Croisements

Pour citer seulement quelques autres exemples, depuis tout jeune j'avais été surpris par le fait que dans un triangle, les trois hauteurs (comme les trois médianes, les trois bissectrices et les trois médiatrices) se rencontrent en un même point.



Croisements

Les relations entre les coefficients d'une équation de second degré et ses racines pouvait également engendrer de l'émerveillement chez moi (et ça marche encore !) :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Mais cet étonnement du professeur ne fait pas partie des programmes scolaires.

En France, les hauteurs, les bissectrices... sont appelées *droites remarquables* même si on dit rarement pourquoi elles sont remarquables ! Il manque quelque chose... Et c'est aussi ce quelque chose, cette capacité à s'émerveiller, que j'appelle « éducation au regard ».

Croisements

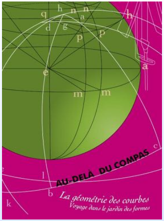
Philippe Costamagna a grandi en visitant les musées dès le plus jeune âge. Il écrit :

> « Nous n'avions pas de tablettes de lecture et les guides exposant l'histoire des monuments étaient plutôt rares. L'imagination jouait donc un rôle très important dans nos visites, nous n'avons que nos intuitions pour faire parler les vieilles pierres... »

Croisements

J'a été très touché par ce témoignage où je trouve encore d'autres éléments pour nourrir l'idée de « l'éducation au regard ».

Moi aussi j'ai découvert les expositions mathématiques, celles que j'ai créé avec François Recher mais surtout des expositions italiennes invitées en France par la Cité des Géométries : *Simmetria e giochi di specchi* (Dipartimento di Matematica « Federigo Enriques », Milano ; 2004) , *Oltre il Compasso, la geometria delle curve* (Il Giardino di Archimede, Firenze, 2006), *Macchine Matematiche* (Modena e Reggio Emilia, 2007) , *Riflessioni e Riflessioni* (Dipartimento di matematica dell'università degli studi di Torino, 2010).



Croisements

J'insisterais encore sur le fait que, d'après ce que j'ai vu dans les écoles (primaires et collège), la pratique de mettre les mathématiques à côté de l'art (« cours liés ») c'est révélé fructueuse : non seulement l'accueil a été très favorable (surtout en Italie) mais notre discipline, les mathématiques, ont bénéficié d'une meilleure image !

Croisements

Il reste à étudier encore beaucoup d'aspects de cette approche, comme par exemple : qu'est-ce que « l'éducation au regard » dans notre domaine, les mathématiques, peut apporter à l'art ?
Il me semble aussi que cette approche nouvelle des mathématiques et de leur enseignement pourrait être complémentaire d'autres approches, comme celles liées à la psychologie des blocages (cf. par exemple, Anne Siety, « *Mathématiques ma chère terreur* », Hachette Littératures, 2003) ou à la psychologie de la créativité : par exemple, Didier Anzieu, *Le corps de l'oeuvre*, Jacques Hadamard dans *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Henri Poincaré, *L'invention mathématique*, Todd Lubbart, *Psychologie de la créativité* ou encore Nicolas Bouleau, *Dialogues autour de la création* et, enfin, Jean-Pierre Changeux, *La beauté dans le cerveau* et Stanislas Dehaene *La bosse des maths* .

Regards à tous les niveaux

Il est instructif d'observer comme l'idée de « regard » traverse toutes les mathématiques, de la plus « élémentaire » jusqu'à la recherche universitaire.

Voici quelques exemples.

Regards à l'école élémentaire

À l'école élémentaire, une fois apprises les propriétés des quatre opérations, on peut déjà utiliser le regard en les appliquant.

Par exemple, si on veut effectuer de tête 18×19...

Regards à l'école élémentaire

À l'école élémentaire, une fois apprises les propriétés des quatre opérations, on peut déjà utiliser le regard en les appliquant.

Par exemple, si on veut effectuer de tête 18×19... il est utile « regarder »

$$19 \quad \text{come} \quad 20 - 1$$

pour effectuer aisément la multiplication.

Regards à l'école élémentaire

Voici un exemple célèbre.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = ?$$

Regards à l'école élémentaire

Voici un exemple célèbre.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = ?$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ S & = & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Regards à l'école élémentaire

Voici un exemple célèbre.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = ?$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\
S & = & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
 & & & & & & & & & & \\
2S & = & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

Regards à l'école élémentaire

Voici un exemple célèbre.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = ?$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ S & = & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ & & & & & & & & & & \\ 2S & = & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

$$2S = 100 \times 101 \Longrightarrow S = 50 \times 101 = 5050.$$

Regards dans le secondaire

Supposons vouloir transformer en produit la différence suivante :

$$169x^2 - 25$$

Regards dans le secondaire

Supposons vouloir transformer en produit la différence suivante :

$$169x^2 - 25$$

$$\begin{aligned} 169x^2 - 25 &= 13^2x^2 - 5^2 \\ &= (13x)^2 - 5^2 \\ &= \dots \end{aligned}$$

En utilisant l'identité **remarquable**

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Regards à l'université

Démontrer que la relation

$$x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence et préciser, pour tout nombre réel x, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$:

Regards à l'université

Démontrer que la relation

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xe^{y} = ye^{x}$$

est une relation d'équivalence et préciser, pour tout nombre réel x, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$: ici, il est intéressant de regarder l'allure de la fonction $\dfrac{x}{e^x}$.

Regards à l'université

Comment trouver la primitive de

$$\int \frac{1}{\sin x} dx \text{ ?}$$

Regards à l'université

Comment trouver la primitive de

$$\int \frac{1}{\sin x} dx \ ?$$

Les passages qui suivent fournissent une méthode pour la trouver et, bien que de nature presque inexplicable, méritent aussi d'être « regardés »

Nous savons que $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$. On a donc ($1 = \frac{2}{2}$) :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

d'où :

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2}} dx + \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx.$$

En conclusion :

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = -\ln \mid \cos \frac{x}{2} \mid + \ln \mid \sin \frac{x}{2} \mid + c = \ln \mid \tan \frac{x}{2} \mid + c.$$

Regards à l'université

Soit $(G, \star)$ un groupe muni de l'opération $\star$.

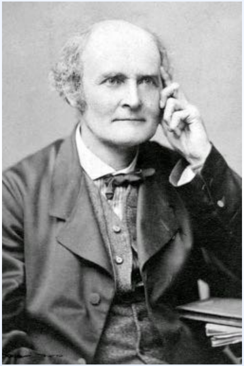
Démontrer que G est abélien si et seulement si

$$f : x \in G \longmapsto x \star x \in G$$

est un endomorphisme.

Regards dans le monde de la recherche

Arthur Cayley (Richmond, Surrey, 1821 - Cambridge 1895), mathématicien très original. D'abord juriste, ses recherches mathématiques lui ont permis d'obtenir la chaire d'algèbre de l'université de Cambridge.



Regards dans le monde de la recherche

Pour une courbe lisse C quelconque de l'espace projectif complexe, de degré n avec h points doubles apparents, le nombre $t(C)$ des droites trisécantes à la courbe qui rencontrent une droite fixée est donné par (Cayley, 1863) :

$$t(C) = -\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + h(n-2),$$

ce qui peut s'écrire aussi :

$$t(C) = h(n-2) - \binom{n}{3}.$$

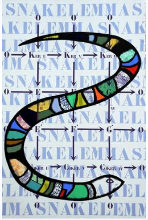
Regards dans le monde de la recherche

Francesco Severi (début du vingtième siècle) avait « démontré » que le nombre $q(C)$ des coniques quadrisécantes à la courbe C et qui rencontrent quatre droites fixées était donné par :

$$q(C) = 4\binom{h}{2} + h\left[14\binom{n}{2} - 22n + 33\right] - 4\binom{n}{4} - 3\binom{n}{3} - \binom{n}{2}.$$

Regards dans le monde de la recherche

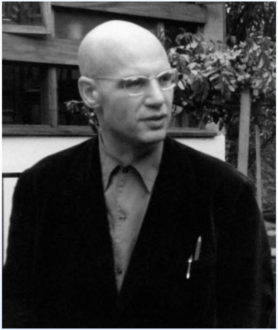
Patrick le Barz, mon ancien directeur de recherche, avait supposé que les coefficients binomiaux avaient une interprétation géométrique. Le Barz avait fait cette hypothèse en partant du constat que toutes les formules énumératives considérées et relatives à des faits géométriques pouvaient toutes s'exprimer avec des coefficients binomiaux.



Par la suite, l'hypothèse se révéla juste !

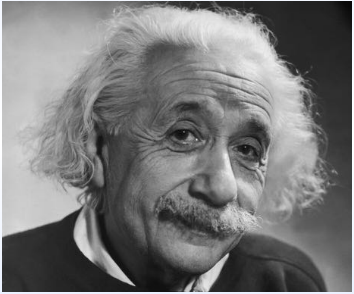
Regards dans le monde de la recherche

Alexander Grothendieck (1928 - 2014), médaille Fields en 1966 et prix Crawford en 1988 (réfusé) a été sans aucun doute un des plus grands mathématiciens du vingtième siècle. Je dirais à son sujet qu'il s'était interrogé sur les notions de point, d'espace... Il voulait regarder ces objets à sa façon.



Regards dans le monde de la recherche

Grothendieck, comme Einstein, furent des autodidactes en matière de « éducation au regard ». À ce sujet je citerai la conclusion du très bel article de Luca Barbieri-Viale : « A. Grothendieck. Entusiasmo e creatività » (Lettera Matematica Pristem, Vol 50/51, Springer)



Regards dans le monde de la recherche

« Grothendieck comme Einstein, grâce à une « mutation de la conception que nous avons de l'espace, dans le sens mathématique d'une part et de la physique de l'autre » et l'innovation de notre regard sur le monde par une vision unificatrice des mathématiques d'une part et de la physique de l'autre, s'imposent à nos yeux comme le mathématicien et le physicien qui ont révolutionné la pensée scientifique par le concept de relativité. »

Regards dans le monde de la recherche

Grothendieck avait trouvé la route ouverte grâce aussi aux travaux des géomètres algébristes italiens. D'après Severi, pour chercher le nombre des droites trisécantes qui rencontrent une courbe, il fallait chercher le nombre des triplets de points sur la courbe, puis tous les triplets alignés de l'espace, et regarder enfin tous les triplets de points de l'espace alignés sur la courbe. Selon Patrick Le Barz, chez Severi, il y avait déjà l'idée de schéma de Hilbert ponctuel...

Limites

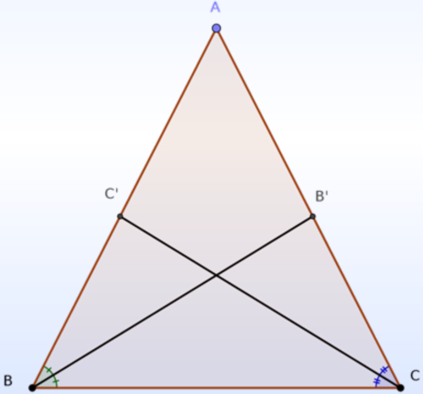
« Une éducation au regard » ne sera pas non plus une clé pour ouvrir toutes les portes. Heureusement ou malheureusement, je ne sais pas. Elle fournira probablement une approche qui permettra aux élèves, même les plus récalcitrants aux mathématiques, de participer davantage au cours. Elle leur laissera une place à l'intérieur de celui-ci, stimulera leurs connaissances, éveillera leur... désir et leur curiosité envers les mathématiques. Les expérimentations faites à Lille et à Rome vont dans ce sens.

J'insiste encore une fois sur le fait que cette approche ne sera pas la solution à tous les problèmes !

Limites. Un exemple.

Le problème suivant est un exemple où même de célèbres mathématiciens ont de nos jours souffert sans arriver à le résoudre, bien que la solution existe et qu'elle soit à la portée d'un élève de collège !

Soit ABC un triangle. Soient BB' et CC' deux bissectrices internes. En sachant que $BB' = CC'$, démontrer que le triangle est isocèle.



Limites. Un exemple.

Commentaire. La réciproque étant facile à démontrer, on pourrait penser que le problème posé est simple. Ce théorème prend les noms des mathématiciens Jakob Steiner (suisse - 1796-1863) et Daniel Christian Ludolf Lehmus (allemand - 1780-1863). En effet, la légende dit qu'en 1840 Lehmus, ne sachant pas résoudre le problème, interpella Steiner.

Limites. Un exemple.

De ce théorème ont été données plusieurs démonstrations algébriques, trigonométriques et par l'absurde dont une de 1844 attribuée à Steiner lui-même, suivie d'une autre en 1850 attribuée à Lehmus, mais dont il est impossible de trouver la trace. Celle que je connais est due à Monsieur Descube (1888), elle est identique à celle trouvée un siècle après, indépendamment, par Aziz El Kacimi.

Citation

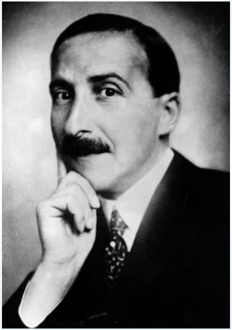
C'est ce que je trouve qui me dit ce que je cherche.

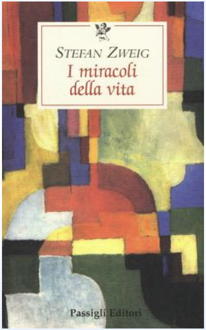
Pierre Soulage, artiste né en 1919

Ouvertures - Littérature

Un exemple.

Stefan Zweig (1881-1942), *Les prodiges de la vie*





Ouvertures - Littérature

Nouvelle d'une centaine de pages ; l'histoire se déroule dans la moitié du seizième siècle à Anvers. Un homme riche et pieux souhaite faire le don d'un tableau à son église en guise de remerciement pour la guérison miraculeuse de sa mère et demande à un vieux peintre de réaliser un tableau de la Vierge.

Ne trouvant pas de modèle, le vieux peintre pensa d'abord d'être incapable d'exécuter le tableau, et alors même qu'il s'apprête à renoncer à sa mission, comme s'il avait reçu un message divin, il aperçoit une jeune fille à son balcon. Immédiatement, il sait qu'elle sera son modèle pour la commande de l'homme riche.

Ouvertures - Littérature

Il prend la décision de la rencontrer pour lui proposer d'être son modèle pour le tableau. Lorsque le vieux se présente chez elle, le père adoptif, gérant d'une taverne, explique au peintre que la fille est juive - la seule du village - et que toute sa famille est morte et qu'elle ne sort jamais et ne parle à personne.

Le peintre ne se décourage pas et, avec l'accord du père adoptif, décide de prendre rendez-vous avec la jeune fille qui finit par accepter d'être son modèle.

Ouvertures - Littérature

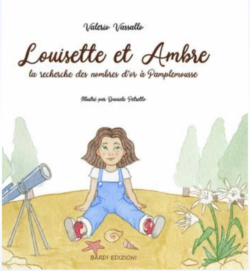
Le peintre, voyant que la jeune fille a des difficultés à rentrer dans le rôle de la Vierge, décide de représenter la Vierge avec l'enfant Jésus. Il arrive à trouver un bébé pour exécuter le tableau. La nudité du bébé est d'abord difficile à accepter pour la jeune femme non habituée à voir des corps nus. Le temps passant, la jeune fille finit par développer un amour presque maternel pour le bébé.

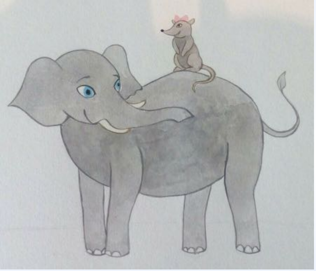
Une fois le tableau terminé et exposé dans l'église, la jeune femme, n'ayant plus le bébé près d'elle, n'a alors qu'un seul désir : contempler tous les jours le tableau pour avoir la sensation de voir le bébé.

Éclate une révolte et...

Ouvertures - Littérature

Écriture d'un conte autour du regard : *Louisette et Ambre* sortie chez Bardi Edizioni en octobre 2018 et diffusé en France

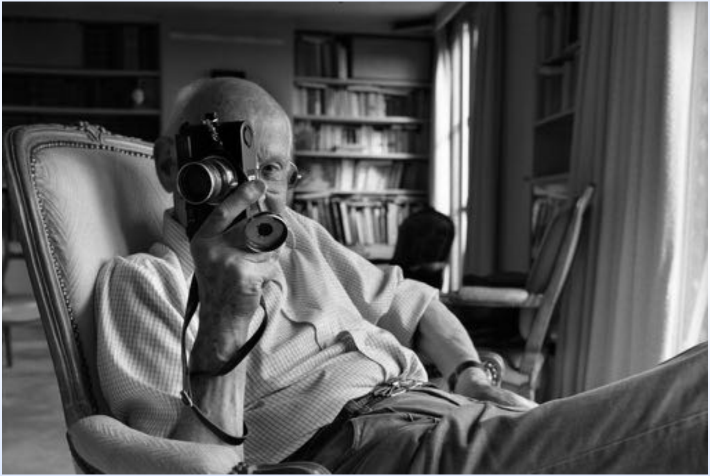




Ouvertures - Photos

Un exemple.

Henri Cartier-Bresson (1908-2004)



Ouvertures - Photos

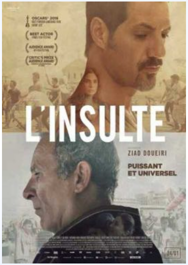
Ouvertures - Cinéma

Le cinéma propose beaucoup de portes d'entrées au sujet du regard.

Voici quelques exemples

Sergio Leone
1968

Luchino Visconti
1971



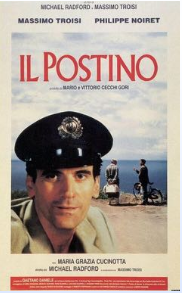
Ziad Doueiri
2018

Jean-Paul Civeyrac
2018

Ouvertures - Cinéma

Un exemple.

"Le facteur" est un film franco-belge-italien de Michael Radford sorti en 1994, dont le scénario est écrit par Antonio Skarmeta : l'action se déroule dans les années '50, sur une petite île de la Méditerranée. Mario Ruoppolo (Massimo Troisi), est un jeune homme inculte ; il se fait embaucher comme facteur (le seul sur l'île !) pour livrer le courrier à Pablo Neruda (Philippe Noiret), exilé sur l'île. Entre Pablo et Mario naît une amitié. Mario apprendra alors le *pouvoir de la poésie*.



Ouvertures - Médecine

Le tableau clinique. Le tableau clinique (gr : Klìne, lit : klinikòs, qui se déroule dans le lit) est l'ensemble des manifestations, signes et symptômes, qui se présentent aux yeux du médecin. Dans ce sens, il contribue d'une façon décisive au diagnostique d'une maladie.

Ouvertures - Médecine

Des initiatives analogues voient le jour ailleurs qu'à Lille.

À l'initiative du projet porté par l'Université Pierre et Marie Curie, on retrouve le vice-doyen de la faculté, le Professeur Alexandre Duguet, et le Docteur Rosenbaum, cardiologue à la Pitié-Salpétrière. Ce dernier explique l'intérêt d'intégrer l'art au cursus des futurs soignants : « *En médecine, on doit regarder les signes et leur donner du sens. On parle même de "tableau clinique". Entrainer les étudiants à aiguiser leur regard sur un tableau les aidera à être plus attentifs face à leur patients. Cela a même été démontré par une étude conduite par la prestigieuse université de Yale, aux Etats-Unis.* »

Ouvertures - Médecine

En résumé, les expériences menées au Palais des Beaux-Arts de Lille ont été riches, fortes et hors des sentiers battus. Elles permettent d'inventer une nouvelle façon de concevoir l'enseignement et nous encouragent à les ouvrir à un plus grand nombre de classes et d'établissements, à les introduire dans la formation des futurs enseignants, à les faire connaître en formation continue.

Citation

Mieux que toute explication, c'est l'expérience des émotions qui révèle la poésie à un esprit prédisposé à la comprendre.

Pablo Neruda




Merci de votre attention !