

Réunion (résumé).

On a pris $a \geq b \geq c$.

J'admets que le problème consiste à discuter le système linéaire donné par le point où les trois paraboles doivent se rencontrer. On va donc discuter sur le déterminant de ce système. Après simplifications par a , b , c et $a + b + c$ strictement positifs ce déterminant vaut

$$\Delta = (-ca^2 + a^2b - ab^2 + cab + cb^2 - c^2b + c^2a) (c^3a - c^2a^2 - c^2b^2 + cb^3 - a^2b^2 + ba^3)$$

Mieux

$$\Delta = [cab + (a - b)(b - c)(a - c)] [b^2c(b - c) + a^2b(a - b) + ac^2(-a + c)]$$

- Le premier facteur est une somme de nombre positifs. Il est donc supérieur à abc donc strictement positif.
- Le second facteur est lui aussi une somme de nombres positifs. Il est positif ou nul.
- Si le déterminant est strictement positif, le système admet une unique solution qui est la solution triviale. Ceci n'est pas possible.
- Conclusion, s'il existe une solution le déterminant est nul, donc le second facteur doit être nul. Les trois termes qui le composent doivent donc s'annuler. Ceci force directement à prendre le triangle initial équilatéral.