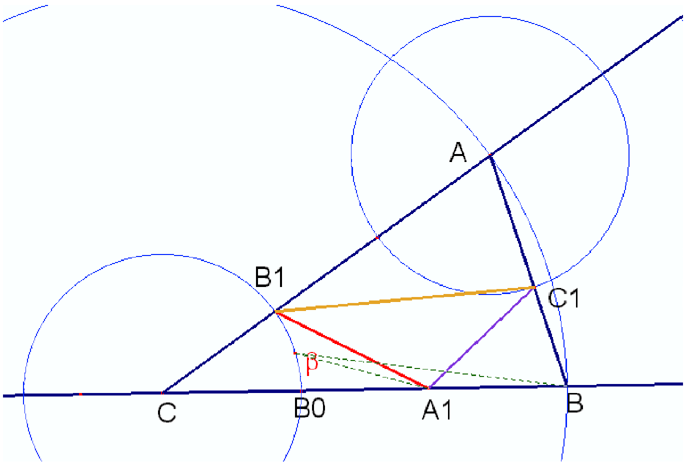
Premier Problème.

On veut établir le résultat suivant :

On prend un triangle (ABC) isocèle en C $(BC = 1)$ et trois points A_1, B_1, C_1 pris sur chaque côté à même distance m des sommets. Si le triangle $(A_1B_1C_1)$ est équilatéral, alors (ABC) l'est également.

On construit sur une droite fixée les points B, C et A_1 avec $BA_1 = m$. A tout point B_1 du demi-cercle de centre C et de rayon m, on associe le point A de la demi-droite $[CB_1)$ tel que $CA = 1$. On construit si c'est possible le point C_1 du segment $[AB]$ tel que $AC_1 = m$.
On note $\theta = \widehat{BCB_1}$.



Nous avons déjà vu[1] que la fonction $\theta \mapsto A_1B_1$ est strictement croissante sur $[0, \pi]$ qu'elle envoie sur $[|1 - 2m|, 1]$.
La fonction $\theta \mapsto B_1C_1$ n'est définie qu'à la condition que $AB \geqslant m$ autrement dit lorsque $\sin\frac{\theta}{2} \geqslant \frac{m}{2}$. Son ensemble de définition est donc $[2\arcsin\frac{m}{2}, \pi]$.
Le vecteur $\overrightarrow{AC_1} = m\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ est d'affixe $m\frac{1-e^{i\theta}}{|1-e^{i\theta}|} = me^{i\frac{\theta}{2}}\frac{(-2i\sin\frac{\theta}{2})}{2|\sin\frac{\theta}{2}|} = -mie^{i\frac{\theta}{2}}$

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC_1} \quad \text{est d'affixe} \quad e^{i\theta}(1-m) - mie^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}(1-m) - mi\right).$$

On a en raccourcissant un peu les calculs.

$$B_1{C_1}^2 = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}(1-m) - mi\right)\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}(1-m) + mi\right) = 2m(m-1)(1+\sin\frac{\theta}{2}) + 1.$$

Et la dérivée de cette fonction en θ est $m(m-1)(\cos\dfrac{\theta}{2}) < 0$, donc la fonction est strictement décroissante sur son intervalle de définition.

θ	0		$2\arcsin\frac{m}{2}$		π
A_1B_1	$\|1-2m\|$	$\nearrow$	ν	$\nearrow$	1
B_1C_1		$\cdots$	μ	$\searrow$	$\|1-2m\|$

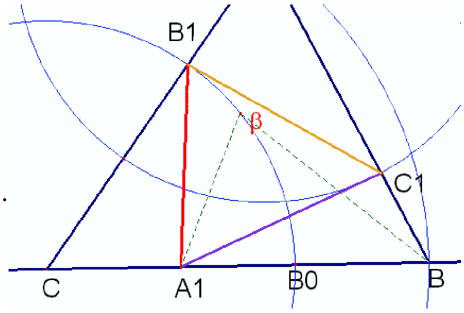
Pour calculer la valeur ν il faut placer C_1 en B. Le point B_1 se trouve alors en β. On a $\nu = A_1\beta$.
On a alors

[1] mettre la référence

- Premier cas : $m \leqslant \frac{1}{2}$.

$$\mu = C_1B_1 = B\beta \geqslant \nu.$$

- Second cas : $m > \frac{1}{2}$.
  Les distances $A_1\beta$ et $B\beta$ sont respectivement $|me^{i\theta} - 1 + m| = |z + m|$ et $|me^{i\theta_\beta} - 1| = |z|$.
  Comparer leurs carrés revient à calculer



$$A_1\beta^2 - B\beta^2 = m^2 + m(z+\overline{z}) = m\left(m + 2\left(m\cos\theta_\beta - 1\right)\right).$$

  Or

$$\cos\theta_\beta = \cos\left(2\arcsin\frac{m}{2}\right) = 1 - 2\left(\sin\arcsin\frac{m}{2}\right)^2 = 1 - \frac{m^2}{2}.$$

  Ainsi

$$A_1\beta^2 - B\beta^2 = m\left(3m - m^3 - 2\right) = -m(m+2)(m-1)^2 \leqslant 0.$$

  Finalement, là encore $\mu \geqslant \nu$.

La fonction continue et strictement croissante $A_1B_1 - B_1C_1$ réalise donc une bijection de $[2\arcsin\frac{m}{2}, \pi]$ sur $[\nu - \mu, 2m]$ qui contient 0. Il existe donc un unique cas qui rend le triangle $(A_1B_1C_1)$ isocèle. Nous connaissons bien cette situation qui correspond à prendre $\theta = \frac{\pi}{3}$ et donc (ABC) équilatéral. On peut alors remarquer que le troisième côté du petit triangle $(A_1B_1C_1)$ est donc nécessairement égal au deux autres. Sur le dessin ci-contre on a tracé les courbes des trois côtés, et l'on vérifie ainsi expérimentalement qu'elles concourent.