Pourquoi enseigner le triangle ?

I. Réflexions générales

Notre réflexion sur l'enseignement au collège nous a amenés à chercher une cohérence dans les différentes parties du programme concernant le triangle. Pourquoi faire construire des triangles en 6ème et en 5ème ? Comment donner du sens à ces activités ? Quels liens fait-on avec l'inégalité triangulaire, la somme des angles d'un triangle, le cosinus d'un angle aigu, la propriété de Thales ? …

Les objectifs de l'équipe de l'IREM de Bordeaux dans le cadre du travail avec AMPERES sont d'aider les professeurs de mathématiques non pas à construire seulement des séquences de classe isolées, mais à construire des suites de situations d'enseignement[1] organisées en

[1] Le mot « situation d'enseignement » est pris au sens de la TSE (Théorie des Situations d'Enseignement) de Guy Brousseau

parcours[2] pertinents qui partent de questions vives. Il s'agit de proposer ainsi un enseignement ayant un sens pour les élèves. Nous avons entrepris de le faire pour le collège et pour la seconde à l'IREM d'Aquitaine car nous avons constaté un manque de documents professionnels pour les enseignants de mathématiques dans ces niveaux.

Nous présentons dans ce texte des réflexions générales de notre équipe sur diverses AER (Activité d'Etudes et de Recherche) présentées dans l'ensemble du travail d'AMPERES et concernant le triangle. Il est possible d'interrompre par moment, la lecture de ce texte, pour consulter le détail des AER proposées dans d'autre document présent sur ce site.

Pour nous les questions vives motivant l'étude du triangle en cours de mathématiques sont à trois niveaux :

1- En se limitant au chapitre des mathématiques traitant du triangle, le géomètre mathématicien pose de manière théorique la question de la détermination d'un triangle à une isométrie près, question qui se prolonge par sa détermination à une similitude près. Cette question fait l'unité entre les thèmes des AER proposées dans ce parcours sur le triangle. Mais comment transmettre cette question aux élèves de sorte qu'ils puissent s'y intéresser ?
Les programmes demandent aux professeurs de faire construire des triangles aux élèves. Mais la question mathématique sous-jacente est plus vaste :
Quelles sont les données nécessaires et suffisantes et les conditions sur ces données pour obtenir un triangle à une isométrie près ou à une similitude près ?
Poser des problèmes de constructions permet d'enrichir la réflexion en faisant appel aux propriétés des triangles. Mais cela ne permet toujours pas aux élèves de comprendre les raisons pour lesquelles ils font ce travail. En effet pour tracer un triangle satisfaisant à certaines conditions sur une feuille de papier, les élèves peuvent gommer et recommencer, de sorte à arriver par essais successifs à un tracé satisfaisant avec une approximation qui de toutes façons ne peut être évitée au niveau des mesures, de l'épaisseur du trait... En se plaçant dans une problématique pratique, par exemple ici pour réussir un dessin dans un micro-espace[3], les élèves ne peuvent comprendre pourquoi on a inventé la géométrie théorique.

2- L'ingénieur et l'architecte se posent la question de la stabilité d'une construction. Au Séminaire de Royaumont où, il y a 50 ans, des mathématiciens décidaient de la réforme dite des « maths modernes », Jean Dieudonné venait de dire : « A bas Euclide, à bas le triangle ! » quand Emma Castelnuovo eut le courage de lui objecter : Mais Monsieur le professeur sans le triangle, la table sur laquelle repose les feuilles de votre discours s'effondrerait ! (il s'agissait d'une planche posée sur des tréteaux). Son courage pour contredire l'éminent mathématicien avait paru tellement extraordinaire qu'il donna lieu à une légende, son intervention se transformant dans la rumeur en : « Vous les Français, sans le triangle, votre Tour Eiffel n'existerait pas[4] ! »

---

[2] Le mot « parcours » est pris au sens de la TAD (Théorie Anthropologique du Didactique) d'Yves Chevallard. Il s'agit de « Parcours d'Etudes et de Recherches » (PER) qui se composent d'une suite ordonnée d' « activités d'études et de recherches » (AER)

[3] Pour ce qui suit pour la taille de l'espace (micro, méso et macro espace) et les problématiques en géométrie nous nous référons aux travaux de Guy Brousseau et à la thèse de René Berthelot et M.H. Salin, 1992

[4] Nous rapportons ici, avec l'autorisation d'Emma Castelnuovo, une conversation privée qui nous paraît très significative, lors de la 43ème rencontre de la CIEAEM à Locarno en Suisse en 1991, conversation entre un

Lors d'une leçon en 5ème où il s'agissait de construire un triangle connaissant la mesure de ses trois côtés, un élève a pris la parole spontanément pour dire ceci : « c'est parce qu'un triangle est déterminé par ses trois cotés qu'il est stable ! ». Nous lui avons demandé s'il disait cela parce qu'il l'avait appris d'un architecte de son entourage. Il nous a répondu : « non, mais je le sais, car c'est moi qui veux devenir architecte »[5].
Pourquoi ne pas s'en inspirer pour faire fabriquer à nos élèves un triangle, un tétraèdre, un rectangle et un parallélépipède avec des tiges de meccano[6], et leur faire éprouver ce qui est le moins facile à déformer ? Ce pourrait être une première rencontre avec le triangle !
Au niveau d'un espace plus grand que le micro espace de la feuille de papier (méso-espace) la détermination du triangle prend un certain sens car la modélisation permet de faire des choix techniques : il faut prévoir avant de réaliser une construction difficile. La méthode par essais-erreurs est exclue. Mais comment mettre nos élèves dans une situation de modélisation qui leur pose vraiment question ?

3- En se posant la question de la modélisation de notre espace, les premiers mathématiciens ont inventé la géométrie plane et ont permis de ramener ce qui se passe en situation réelle à la taille de la feuille de papier. Pour se faire, il faut admettre sans trop de distorsions que la surface que nous voulons étudier est plane. Il est intéressant que les élèves puissent voir le plan comme une sphère dont le rayon est devenu infini, pour bien comprendre que pour étudier certaines relations géométriques au sol, il est pratique de considérer à notre échelle que le rayon de la terre, de l'ordre du macro-espace pour nous, est infini (de même que nous admettons que les rayons du soleil sont parallèles pour mesurer des objets très haut en mesurant leurs ombres). Dans ce cas, la nécessité de la géométrie théorique apparaît clairement. L'espace étant trop grand pour être directement accessible, les propriétés de la géométrie permettent de calculer des dimensions qui ne peuvent être obtenues de manière pratique (mesure du rayon de la terre, par exemple). C'est pour cela que la mesure d'une distance inaccessible en imaginant un triangle au sol (voir une des AER proposées) a une importance particulière dans la construction du sens de la question de la détermination des triangles. La similitude qui permet de ramener ce triangle à des dimensions qui le font contenir dans la feuille de papier est tout aussi importante, car c'est dans cet espace que l'on travaille en classe.

Notre réflexion précédente a suivi ce qu'on pourrait imaginer comme une sorte de chemin « ascendant ». Nous sommes partis d'un tracé de triangle dans la feuille de papier qui *a priori* ne justifiait pas une recherche théorique pour nos élèves. En s'élevant dans le niveau des questions dans un espace de plus en plus grand qui, ce faisant, oblige à abandonner la problématique pratique pour la problématique de modélisation, nous avons pu retrouver une « question vive ». Nous avons pu ensuite la transposer en revenant à une question dans la feuille de papier pour nos élèves, mais cette fois en ayant retrouvé le sens. Cette transposition[7] se fait en organisant une situation d'enseignement de façon spécifique en classe.

---

enseignant venant de l'Etat du Luxembourg (Lucien Kieffer) qui avait entendu l'histoire de la Tour Eiffel, Emma Castelnuovo et nous . Emma Castelnuovo elle-même a aussitôt rétabli, devant nous trois, la vérité sur son intervention.

[5] Collège Cassignol - Bordeaux - Classe de Mme Mauratille- 16 janvier 2009

[6] On peut aussi utiliser des tiges, aimantées aux extrémités, qui se relient avec des petites boules aimantées, en vente dans tous les magasins de jouets.

[7] Il s'agit de la transposition didactique étudiée par Yves Chevallard

La difficulté du professeur est de trouver des situations réalisables en classe, où la problématique pratique est exclue, et conduire ainsi l'élève à se placer dans une problématique de modélisation.
Pour pallier cette difficulté nous proposons aux élèves un triangle qui leur est inaccessible et nous leur demandons de trouver certaines de ses mesures en travaillant sur une feuille de papier.

II. Question interne aux mathématiques dans les AER sur le triangle

Il existe une QFPG qui motive l'étude de la détermination des triangles et qui est commune aux différentes AER proposées dans ce parcours que nous formulons ainsi :

Quelles données est-il nécessaire et suffisant de connaître sur les 6 éléments d'un triangle (angles et côtés) pour déterminer ce triangle à une isométrie près, à une similitude près ? [8].

C'est une grande question qui se pose dès la 5ème et qui se prolonge pendant toute la 4ème , avec les théorèmes de Thalès et de Pythagore et le cosinus**.**

Par exemple pour le théorème de Thalès, les questions sous-jacentes *un triangle est-il déterminé par deux angles ?, par 3 angles ?* permettent aux élèves de s'approprier le problème de l'agrandissement d'un triangle.

Lien avec l'AER sur le théorème de Thalès en quatrième

A partir de ces questions, il y a en fait tout un enchaînement qui amène sur d'autres thèmes d'étude, construisant ainsi des liens logiques entre les enseignements qui se succèdent sur une année scolaire ou sur un cursus plus large. Chaque réponse à une question permet d'avancer un peu plus loin dans la connaissance de l'objet « triangle » avec de nouveaux outils selon le niveau de classe où les élèves se trouvent.

Voici un extrait du texte de l'équipe de Bordeaux qui précise l'enchaînement entre les questions quand on étudie le théorème de Pythagore et le cosinus.

Lien avec notre AER sur le cosinus en quatrième

A. Questions concernant les triangles:

Les élèves ont vu en 5ème la détermination des triangles par trois mesures : un côté compris entre deux angles, un angle compris entre deux côtés, ou trois côtés. La conviction vient du fait que ces données permettent de les construire géométriquement et qu'ils sont isométriques.
Une question se pose en 4ème : *Combien d'éléments sont nécessaires pour déterminer un triangle rectangle ?*

[8] Et à une transformation affine près ? En fait trois points et leurs images déterminent une transformation affine du plan, d'où peut-être l'importance du triangle dans les mathématiques.... .

La construction géométrique prouve que deux côtés suffisent particulièrement l'hypoténuse et un côté de l'angle droit, ce qui étonne car l'angle droit donné n'est pas compris entre eux.
Cela veut-il dire qu'avec la mesure de deux côtés quels qu'ils soient on pourrait trouver par un calcul la mesure de tous les autres éléments du triangle rectangle ? Comment ? Plus généralement puisqu'un triangle rectangle est déterminé seulement par deux éléments (par un angle aigu et un côté ou par deux côtés), peut-on avec ces deux éléments trouver la mesure de tous les autres ? ...

B. Questions concernant la similitude:

Comme nous étudions la propriété de Thales avant le cosinus, nos élèves de 4ème savent que des triangles " empilés " sur un angle commun avec les deux autres côtés parallèles ont leurs côtés proportionnels et ont les mêmes angles. Cette propriété est également vraie pour les triangles rectangles. Lorsqu'ils ont un angle aigu commun leurs côtés sont proportionnels.
On s'intéresse aussi à la question inverse : des triangles rectangles dont le rapport entre deux de leurs cotés est le même ont-ils les mêmes angles ?

III. Trois propositions de situation pour enseigner la détermination des triangles en 5ème

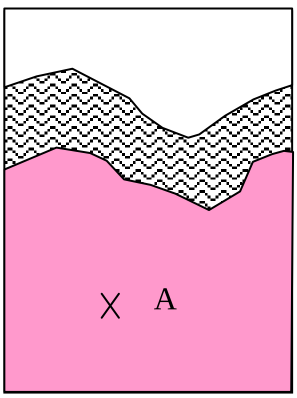
Nous allons présenter brièvement trois exemples d'AER pour enseigner la détermination d'un triangle en 5ème, proposés par des équipes de différents IREM. Nous discuterons de la façon dont elles ont été conçues, des avantages et inconvénients de choisir l'une ou l'autre. Le professeur intéressé trouvera en lien de plus amples développements sur le déroulement de ces AER en classe.

Ces explications visent à éclairer les professeurs sur la réflexion qui a conduit les équipes à proposer ces différentes situations, le but étant d'amener les enseignants qui le souhaitent à concevoir eux mêmes des situations de ce type pour leurs classes. La lecture de ces commentaires aidera également le professeur à mieux comprendre et analyser les réponses de ses élèves aux différentes questions. Ce sont des réflexions d'ordre mathématique ou didactique, ces deux aspects étant pour nous étroitement mêlés et difficilement séparables dans la construction des situations.

A. Utiliser le triangle pour trouver une mesure inaccessible

Lien avec l'AER1
AER 1 proposée par l'IREM de Clermont Ferrand.
Cette AER se compose de deux parties.

1. Problème concret : détermination d'une distance inaccessible



Déterminer la longueur du segment [AM].
On n'a pas le droit de dépasser la berge du fleuve qui est du côté du point A.

2. Problème mathématique : comment déterminer un triangle

Pour étudier cette question, le professeur propose alors aux élèves la suite de tâches suivantes. Notons que ce qui est proposé revient à « transposer » dans le méso-espace de la classe, par la nécessité de « ne pas se déplacer », l'impossibilité évoquée des mesures directes liée à « l'inaccessibilité » des distances réelles dans le macro-espace.

Question 1 Sur une feuille posée sur le bureau, j'ai dessiné un triangle dont les côtés mesurent 9,5 cm, 8 cm et 6,5 cm. Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les angles de ce triangle ?

Cette question est traitée rapidement : les élèves comprennent le problème posé, tracent avec la règle et le compas (nous sommes au mois de décembre) le triangle demandé et sont convaincus de la superposabilité de toutes les figures de la classe. Ils peuvent vérifier leur construction grâce au calque du professeur. Alors ils effectuent les mesures des angles.

Question 2 Sur une deuxième feuille posée sur le bureau, j'ai dessiné un triangle dont les angles mesurent 59°, 74° et 47°. Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les côtés de ce triangle ?

Pour cette deuxième question, les élèves poursuivent le travail commencé dans la question 1 et construisent un triangle connaissant ses trois angles. Certains se rendent compte très rapidement qu'il n'y aura pas superposabilité des figures – la longueur du premier segment tracé étant indéterminée – d'autres poursuivent méticuleusement leurs tracés. En comparant les figures obtenues par deux voisins, il est facile de répondre que le triangle obtenu n'est pas unique et que, par conséquent, il n'est pas possible de donner les longueurs des côtés du triangle dessiné par le professeur. Les élèves dessinent alors un deuxième triangle ayant les mêmes angles que le précédent mais « beaucoup plus grand ou beaucoup plus petit » que le premier tracé.

Question 3 Est-ce que 2 données suffisent pour déterminer un triangle ? Est-ce que 3 données suffisent pour déterminer un triangle ? Est-ce que 4 données suffisent pour déterminer un triangle ?

Avant de donner ces questions, le professeur avait conduit les élèves à remarquer qu'on peut effectuer six mesures dans un triangle et que « déterminer un triangle » signifie obtenir des triangles tous superposables. Cette remarque pourrait donner lieu à une question cruciale que l'on pourra tenter de faire vivre ultérieurement, dans une autre classe confrontée pour la première fois à ce même travail ; ce qui induira peut-être les élèves à se poser eux mêmes les questions de la troisième consigne.
Les élèves sont invités à faire des essais avec des valeurs de leur choix et il n'est plus fait référence au triangle de la première question, sauf pour éventuellement déboucher sur des impossibilités, des cas particuliers…

B. Faire construire des triangles

Lien avec l'AER 2
AER 2 proposée par l'IREM de Bordeaux

Le professeur donne certaines mesures et propose aux élèves le défi suivant : construire quand c'est possible au moins deux triangles non superposables satisfaisant les contraintes données. Ils travaillent par équipe de 2.

Le professeur choisit chaque fois les variables didactiques de façon judicieuse autant dans l'ordre des constructions demandées que dans les mesures.

(1) $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 45°$	(2) $\hat{A} = 60°$, AB = 5cm, AC = 8cm
(3) AB = 4cm, BC = 6cm	(4) $\hat{A} = 30°$, AB = 8cm, BC = 5 cm
(5) AB = 3cm AC = 8cm BC = 6cm	(6) $\hat{A} = 75°$, $\hat{B} = 30°$, AB = 5cm
(7) $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 25°$, $\hat{C} = 95°$	(8) $\hat{A} = 90°$, AB = 5cm , BC = 8cm

Il commence par la donnée de deux angles qui rend le défi possible (des triangles différents mais semble-t-il tous de « même forme »), puis un cas où le triangle est unique (2), puis un cas où les triangles sont différents mais sans la conservation de la forme (3), puis un cas où il y a deux triangles seulement ni isométriques ni semblables (4). Dans ce dernier cas certaines équipes gagnent et d'autres non. Puis à nouveau en (5) et (6) il n'y a qu'un triangle possible. Le (7) permet de revenir au (1) où les élèves ont remarqué que la donnée de deux angles détermine la forme du triangle, le troisième angle étant donc déterminer. Ce cas permet aussi de comparer la donnée de trois angles à celle de trois côtés[9].
L'examen de tous ces cas a permis de découvrir les trois cas de détermination d'un triangle quelconque.
Le cas (8) semble échapper à ces observations[10]. Cela s'explique en se référant à la construction des deux triangles du (4). Dans le cas où $\hat{A} = 90°$ (et non 30°) les deux triangles obtenus sont symétriques.
L'ordre de ces questions permet de ménager une découverte à chaque étape, ce qui maintient l'intérêt des élèves jusqu'au bout.

Dans le déroulement de cette situation en classe chaque élève du binôme trace un triangle avec les mesures demandées, puis ils vérifient ensemble si leurs triangles sont superposables. S'ils ne le sont pas, soit il y a des erreurs de mesures et, en les rectifiant, les triangles doivent se superposer, soit effectivement les données ne permettent pas de déterminer un seul triangle. L'équipe doit trancher entre les deux hypothèses[11].

[9] Dans la proposition a) ce point est bien mis en évidence. Mais l'optique est différente car il ne s'agit pas de trouver combien de triangles répondent aux conditions mais de déterminer quand c'est possible les autres éléments d'un triangle existant en le reproduisant avec les données proposées par le professeur.

[10] L'angle droit connu n'est pas compris entre les deux côtés connus.
[11] Ceci se trouve dans notre publication : *Géométrie au cycle central (5ème et 4ème). Un enchaînement d'activités.* par le groupe Didactique des mathématiques au collège- IREM – février 2000.

Une discussion s'engage sur les cas (4) et (8). Avec les mêmes mesures pour deux côtés, si l'angle $\hat{A}$ vaut 30° il existe deux triangles et s'il vaut 90° il n'y en a qu'un.
Pour mieux comprendre ce résultat, le professeur peut aller plus loin s'il juge que la classe va suivre. Il demande aux élèves de proposer d'autres valeurs de l'angle $\hat{A}$ et il en retient certaines, par exemple 45° ou 60° ou 120°. Qu'arrive-t-il ?
Et si maintenant on faisait varier les longueurs fournies, AB = BC = 8 cm par exemple ?
On peut ici utiliser un logiciel de géométrie pour produire facilement un grand nombre de triangle.

Le souci du professeur de 5ème lors de la séance basée sur cette situation est triple :
- gérer les erreurs de tracé, particulièrement avec le rapporteur, en expliquant individuellement son usage si nécessaire.
- mettre l'accent sur la formulation (bilans intermédiaires, puis bilan final)
- introduire une preuve théorique car il y souvent un doute sur l'unicité du triangle, surtout dans le cas (5). Les élèves doivent se convaincre qu'ils obtiennent le même triangle quel que soit le côté par lequel ils commencent le tracé.

On pourra voir des productions d'élèves dans la situation sur l'inégalité triangulaire à propos de la détermination d'un triangle avec la mesure des trois côtés qui suit celle-ci.
Lien avec notre AER sur l'inégalité triangulaire

C. Situation de communication de la TSE

AER 3 qui vient de la TSE (travaux de Guy Brousseau)

Il s'agit d'organiser une communication émetteur - récepteur (groupe de 2 élèves). L'émetteur a un dessin de triangle fournit par le professeur. Il doit donner les informations qu'il juge nécessaires et suffisantes sur la mesure des angles et côtés pour que le récepteur puisse tracer un triangle isométrique à celui qu'il détient. Cela permettra éventuellement au récepteur de déterminer par une mesure l'ensemble des six éléments du triangle.

Ceci suppose que le professeur recueille, au cours du travail des élèves, différents messages types (surabondants, insuffisants, corrects...) pour organiser une mise en commun fructueuse. Cette production étant contingente, le professeur doit faire discuter la classe sur la possibilité d'autres messages, pour arriver à la conjecture complète, si tous ne n'ont pas été évoqués. Par exemple, il rajoute un message du cas (4) de l'AER 2 s'il n'est pas apparu, puis il repère deux triangles non isométriques dans la classe et demande à tous de les obtenir. D'après notre expérience en PE1[12], cela fonctionne bien.

La question du choix des informations à prendre sur une figure géométrique plane ou sur un solide pour le reproduire à l'identique ou pour le reproduire avec un agrandissement ou une réduction est dans la TSE, la situation fondamentale de maîtrise de l'espace. Elle se décline

---

La proposition de Marseille sur Thalès (première étape) est très proche de nous. Le professeur demande à l'élève de construire des triangles en donnant des mesures précises d'angles puis de comparer avec ses voisins.
[12] Professeur des Ecoles en formation en première année à l'IUFM (années 1994 à 2000)

dans le plan en faisant varier la nature de la figure, les instruments autorisés, le papier blanc ou quadrillé etc... Elle place l'élève dans une problématique de modélisation.

Nous n'avons pas retenu cette AER 3 pour la $5^{ème}$. Pourquoi ? Avec le défi proposé dans l'AER 2, la dévolution est tout aussi bonne, les élèves entrent dans le défi et leur intérêt ne faiblit pas. L'AER 3, situation de communication prend du temps. L'organisation du milieu est plus lourde et la gestion de la classe est plus compliquée ; il y a déjà des difficultés inévitables de gestion de la classe avec l'usage des instruments. Et pourtant les élèves sont plus « actifs » puisqu'ils doivent choisir les informations à envoyer alors que dans l'AER 2 c'est le professeur qui les donne. Nos observations montrent que les élèves ont une activité mathématique d'aussi bon niveau dans l'AER 2 que dans la situation de communication de l'AER 3.

IV. Engager les élèves dans une discussion, en référence à la QFPG sur la détermination des triangles:

Parmi les 6 éléments d'un triangle (angles et côtés) quels sont ceux dont il est nécessaire et suffisant de connaître la mesure pour déterminer le triangle à une isométrie près, à une similitude près ?
Les mots « connaître » et « déterminer » peuvent se préciser dans deux directions qui ne conduisent pas au même savoir lors de la recherche de la réponse:

- quelles sont les mesures minimales sur angles et côtés à relever sur un triangle existant pour le reproduire
  Ceci conduit à la situation de communication de l'AER 3: le professeur donne aux émetteurs les triangles à reproduire. Il en est de même dans le démarrage de l'AER 1 où il s'agit de reproduire en vraie grandeur, ou à l'échelle, un triangle existant. Dans l'AER 3 les élèves émetteurs doivent décider quelles mesures choisir entre les 6 possibles pour les transmettre alors que, dans l'AER 1, une contrainte empêche de prendre des mesures. L'existence d'un triangle n'est pas mise en doute puisque le professeur en détient un. La situation de communication n'est pas complète : le professeur joue le rôle de l'émetteur et donne le message pour reproduire le triangle.

- quelles sont les données sur angles et côtés qui permettent de construire un triangle dont on ne sait pas *a priori* s'il existe. Selon les données combien ce problème a-t-il de solutions ?
  Une construction géométrique suivie d'une discussion selon les données relève d'une problématique théorique.

Dans l'AER 1 c'est la question Q3 qui soulève le problème à la fois de l'existence et du nombre de solutions car les élèves choisissent librement les données et doivent trouver tous les cas. Cela suppose que le professeur soit assez directif pour organiser en même temps la réflexion des élèves et le bilan de cette réflexion, mêmes si les questions précédentes Q1 et Q2 doivent les avoir préparés à trouver des éléments de la discussion. Pour faire apparaître ce qu'il veut, le professeur sera amené à proposer lui-même des données. Cette QFPG est difficile à poser ainsi, sans préparation à des élèves de 5ème, d'où la nécessité pour le professeur de les y amener en proposant d'abord des données.

Donc il y a deux bilans théoriques très différents pour des élèves de 5ème, tous les deux hors programme:

- quelles sont les égalités minimales en nombre sur les mesures des angles et des côtés pour que deux triangles existants soient isométriques ?
- selon les valeurs de ces mesures combien de triangles existe-t-il ? Avec une longue discussion dans le cas où l'angle donné n'est pas compris entre les deux côtés donnés.

Nous avons décidé de traiter le premier point avec l'énoncé des cas d'isométrie bien qu'ils soient hors programme, et d'ouvrir sur le deuxième point avec deux notions du programme, inégalité triangulaire et somme des angles du triangle.

Pourquoi cette décision ?

La question du premier point est posée spontanément par des élèves dès la 6ème : quand le professeur fait construire un triangle en fournissant des données, ils se demandent s'ils obtiendront le même triangle que le voisin et quel que soit l'ordre dans lequel ils utilisent les données. Il est très important pour eux de répondre à cette question quand l'occasion se présente en 5ème.

Pour que les élèves bâtissent des démonstrations à partir de conjectures qu'ils ont faites et qu'ils ont à cœur de prouver, les cas d'isométries sont utiles.
Nous avons décidé de traiter seulement le point 1 avec l'énoncé des cas d'isométrie bien qu'ils soient hors programme, et ouvrons sur le point 2 avec deux questions du programme : inégalité triangulaire et somme des angles du triangle. Pourquoi cette décision ?

La question du point 1 est posée par des élèves eux-mêmes <u>dès la 6ème</u> : quand le professeur fait construire un triangle en fournissant des données, ils se demandent s'ils obtiendront le même triangle que le voisin et quel que soit l'ordre dans lequel ils utilisent les données. Il est très important pour eux de clore cette question quand l'occasion se présente en 5ème .

Actuellement, les élèves de collège risquent d'apprendre en géométrie une juxtaposition de résultats sans lien entre eux. La recherche d'une démonstration qui utilise des résultats précédemment établis est une des composantes de la construction du sens pour eux. Qui plus est, cela contribue à l'apprentissage de l'argumentation pour défendre ses propres idées, très important dans la formation d'un citoyen.

Cela suppose que des professeurs :

- aient observé plusieurs fois les élèves dans des classes différentes, pour savoir quelles questions ils se posent vraiment. Cela permet de différencier les savoirs pour lesquels une preuve est utile pour convaincre et ceux pour lesquels elle ne serait qu'un formalisme inutile.

- aient réfléchi à l'ordre dans lequel ils abordent les notions pour que cette trame déductive soit possible et accessible aux élèves.

Il nous paraît illusoire, avec des élèves de 5ème, d'arriver à conclure le second point par une discussion complète sur des données arbitraires.

La question de l'existence du triangle se pose dans la leçon sur la somme des angles : on ne peut pas choisir 3 mesures au hasard pour les angles. La question est ouverte mais non tranchée, car à cause des erreurs de mesure, les élèves ne peuvent pas dire si le troisième angle est vraiment déterminé. Guider les élèves vers la démonstration est indispensable pour donner du sens.

L'existence du triangle sera également discutée dans la leçon sur l'inégalité triangulaire qui vient juste après celle sur la détermination.

Pour la construction d'un triangle à partir des trois côtés, la discussion repose sur les positions relatives de deux cercles qui ont disparu des programmes du collège et du lycée. Or pour les élèves de 5ème, le cas des points alignés pose problème : comment le régler ? Fort heureusement, si la leçon sur le cercle circonscrit a été traitée avant, les élèves savent que par trois points passe un seul cercle, donc que deux cercles distincts ont au plus deux points communs. Cette démonstration, bien que très utile aux élèves pour la construction du sens, ne se trouve dans aucun manuel[13].
Lien avec notre AER sur l'inégalité triangulaire

La question de la détermination du triangle peut se développer jusqu'à la classe de première scientifique. La réponse ne se fait plus par une reproduction ou une construction mais par des calculs pour trouver les mesures inconnues du triangle. Dès la 4ème, si le théorème de Pythagore a été bien problématisé, les élèves demandent : « *puisqu'on peut calculer la mesure de l'hypoténuse quand on connaît les deux côtés et l'angle droit, comment fait-on le même calcul pour le troisième côté d'un triangle quelconque quand on connaît le deux autres côtés et l'angle compris ?* ». C'est une question naturelle et courante dans nos classes où nous encourageons nos élèves à poser leurs questions.

La discussion dans le cas de l'angle non compris entre les côtés relève, pour le tracé, des positions relatives d'une droite et d'un cercle ou, par un changement de cadre, (au sens de R. Douady), de la discussion sur l'existence et le signe des racines d'une équation du second degré[14].

---

[13] Cf *Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations dans les classes.* par Annie Berté- 1995- Petit X n°40 pp 41 à 63 et *Progressions et problématiques en géométrie à partir d'un exemple, l'inégalité triangulaire* par Annie Berté- 1996- Petit X n° 45 pp 41 à 54

[14] Cf l'étude de cet exemple dans *Différents ordres de présentation de premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire* par Annie Berté dans RDM 1995- Vol 15 n°3 pp83-130
« Jusqu'à ces dernières années, l'ordre de présentation des concepts dans les classes de mathématiques se conformait à des ordres académiques issus de la genèse des savoirs par l'histoire et la culture. (phylogenèse). Aujourd'hui les programmes laissent semble-t-il, une marge de liberté aux professeurs pour adopter un ordre

Si BC = a , AB = c et AC = x parce que C est le point cherché et qu'on peut orienter la droite (AC) de A vers C , on arrive à l'équation suivante :

$$x^2 - 2cx\cos A + c^2 - a^2 = 0$$

Il est intéressant de se convaincre que si l'angle commun n'est pas compris entre les côtés proportionnels, les triangles peuvent ne pas être semblables, de la même façon qu'ils peuvent ne pas être isométriques dans le cas où l'angle donné n'est pas compris entre les côtés. En effet, dès le collège, il n'est pas rare que les élèves inventent une deuxième réciproque du théorème de Thalès.

Dans le cas particulier de la droite des milieux cela donne ceci :
« Dans le triangle ABC, si M est milieu de [AB] et si N est un point de [AC] tel que MN = BC/2 alors N est milieu de [AC] et (MN) est parallèle à (BC) ». Ce théorème est-il vrai pour tout triangle ABC? Et dans le cas où le triangle ABC est rectangle en A, ou bien isocèle avec AB = BC ?

Cette analyse montre comment introduire une QFPG en 5$^{\text{ème}}$, question qui peut suivre les élèves en 4$^{\text{ème}}$ et jusqu'en première scientifique.

V. Motiver l'étude

A. Une source de questions : Comment atteindre une mesure inaccessible?

La question de la mesure de la distance inaccessible nous paraît très intéressante. Elle sert de point d'appui au démarrage de nombreuses situations.

1. Exemple 1

a- Dans l'AER 1 la question se pose trois fois de deux façons différentes.

- Type 1 : le monde réel est évoqué.
  1- au niveau de la réalité évoquée : le géomètre topographe sur le terrain

  1'- au niveau d'un matériel apporté en classe qui modélise, avec la feuille de papier rose, ce problème de la mesure interdite.

- Type 2 : la situation n'a pas de rapport direct avec le monde réel.
  2- dans la question Q2 où le professeur détient un triangle inaccessible aux élèves et demande de déterminer les longueurs des côtés en donnant pour seul renseignement la mesure des angles.

---

compatible avec la genèse des savoirs à partir de la problématique de celui qui apprend (ontogenèse). N'y a-t-il pas cependant un ordre culturel en usage ? »... Si « la consistance mathématique est devenue insuffisante et la problématisation absente »,... quelle est sa légitimation ? Quelle possibilité de décision ont les enseignants pour le choix d'une progression, compte -tenu de leur formation, de leur charge de travail et de la nécessité de ne pas trop se marginaliser dans le système ? »

La question Q1 est du même ordre, mais il s'agit de déterminer des mesures d'angles et non des mesures de longueurs.

b- Dans l'AER sur le théorème de Thalès la question se pose une fois à l'étape 3. Le professeur détient un grand triangle inaccessible (angles de 43° et 115° et côté de 60cm). Les élèves ont la possibilité d'en construire un autre plus petit mais semblable pour trouver par un calcul de proportionnalité les deux autres côtés de ce grand triangle[15].
Lien avec l'AER sur THALES

c- Dans l'AER sur le cosinus la question se pose lors de la situation 1. Le professeur détient plusieurs triangles rectangles inaccessibles aux élèves ayant angle de 20°. L'un, très grand, a une hypoténuse de 98cm. L'élève doit penser à utiliser un triangle rectangle semblable et plus petit pour déterminer les côtés de l'angle droit du grand triangle du professeur. Il doit faire de même pour trouver les côtés des autres triangles rectangles détenus par le professeur, inaccessibles aussi, dont on lui donne la mesure des hypoténuses. Un des rapports se révèlera plus économique que les autres quand il faut faire plusieurs fois le même calcul.
Lien avec notre AER sur le cosinus

La situation 2 pose un problème du même ordre. La question est ici : *Comment déterminer des angles dans un triangle inaccessible*[16] ?

Dans les questions de type 1 et 1' de l'AER 1 l'inaccessibilité ne vient pas de l'éloignement imposé par le professeur mais du fait que le triangle n'est pas matérialisé et que la distance ne peut être mesurée directement.

2. Exemple 2

Pour introduire les fractions, le professeur peut proposer deux sortes de situations :

- différencier les épaisseurs de papier trop fines pour être mesurées avec les unités et les instruments connus des élèves. Des papiers d'épaisseurs bien choisies sont apportés dans la classe.
  L'épaisseur du papier est aussi une « distance inaccessible »[17].

- transmettre la mesure d'une baguette à quelqu'un qui n'y a pas accès parce qu'elle ne peut être déplacée par exemple, pour reproduire sa longueur, alors qu'on ne dispose que d'une seule longueur étalon qui n'est pas contenue un nombre entier de fois dans la longueur de la baguette. Il faut prendre la décision de transmettre à la fois un

[15] Nous pensons que c'est ce problème essentiel, dévoluable aux élèves grâce aux situations qui précèdent, qui différencie énormément cette séquence de Marseille sur Thalès de ce qui a lieu en général dans les classes, qui se limite à des constats, suivis par des exercices d'application.

[16] Ce sont aussi ces deux problèmes dévoluables grâce à la situation 0 qui précède, qui différencient ce que nous proposons de ce qui se fait en général dans les classes pour la leçon sur le cosinus. Là encore la leçon classique se limite à guider les élèves vers des constats, puis noter un énoncé admis, puis faire des exercices d'application.
[17] *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Guy et Nadine Brousseau.

nombre entier d'unités et des fractions de l'unité. Il faut prendre la décision de transmettre à la fois un nombre entier d'unités et des fractions de l'unité.
Il s'agit bien encore d'une longueur inaccessible (celle de la baguette) avec les moyens matériels dont on dispose.

Dans les deux cas l'élève est conduit à inventer de nouvelles écritures. Le professeur uniformise le codage en donnant l'écriture institutionnelle des fractions.
Dans les deux cas également le professeur pourra enchaîner des questions mathématiques issues d'une QFPG qui est :
Est-ce que les écritures que nous venons d'utiliser sont bien des nombres, qui permettent de mesurer comme les entiers, qui peuvent s'ajouter, se multiplier avec des entiers et entre eux ?

3. Exemple 3

C'est encore la même idée qui motive l'introduction des entiers à la maternelle. S'il y a moins de 4 objets, la mesure de la collection (au sens du cardinal) est accessible d'un seul coup d'œil permettant de former plus loin une collection équipotente. S'il y a beaucoup plus d'objets, une collection intermédiaire, comme les mots d'une comptine associée à l'énumération, devient nécessaire. Les noms des nombres sont alors donnés par le professeur.

B. Introduire un concept mathématique nouveau

a- Les deux situations sur les fractions, comme celle sur les entiers remplissent une fonction essentielle au niveau où nous les plaçons dans les classes, celle de justifier l'introduction d'un objet nouveau, pour les maternelles qui ne savent pas ce qu'est un nombre ou pour les CM1 qui ne savent pas ce qu'est une fraction.

b- Dans l'AER 1 sur les triangles en $5^{ème}$, les question de niveaux 1 et 1' la même fonction concernant l'objet triangle, celle de justification de sa présence dans la géo- métrie, mot pris au sens étymologique de mesure de la terre. Cette fonction n'est pas remplie par la situation que nous pratiquons en $5^{ème}$ de construction de triangles qui vise un autre objectif, ni même par une situation de communication de reproduction d'un triangle.
Nous n'en avons pas ressenti le besoin au niveau de la $5^{ème}$ car les élèves connaissent depuis longtemps le triangle. Nous voulons poser plutôt la question de sa détermination, accessible aux élèves de $5^{ème}$ au niveau théorique, du moins en partie. Mais il est vrai que l'intérêt de cet objet triangle n'a pas été davantage justifié à l'école élémentaire où les élèves l'ont rencontré.
La proposition d'AER 1 est intéressante sur le plan de la motivation de l'étude du triangle, adaptée au niveau de compréhension d'élèves de $5^{ème}$, et en même temps liée au problème de la détermination qui nous occupe.

c- Si on juge que la situation sur Thalès fait partie d'un PER sur la similitude, PER démarré dès qu'on aborde le thème « agrandissement -réduction » à l'école élémentaire, mais surtout très officiellement en $5^{ème}$, une situation qui motive l'étude de la proportionnalité dans le cadre géométrique est utile dès la $5^{ème}$. L'AER 1 en fournit une.

Trois autres situations que nous avons aussi expérimentées.

- avec les feuilles des arbres : comment traduire qu'elles ont toutes « la même forme » pour une espèce donnée ? Nous avons pris des feuilles de magnolia et les élèves ont mesuré la longueur et la largeur maximale de plusieurs feuilles. La proportionnalité approchée se traduit graphiquement par un nuage de points presque alignés[18]. Cela peut-il être une situation de première rencontre de l'application linéaire.

- avec l'agrandissement d'une photo rectangulaire utilisée même en seconde et reprise au collège récemment.

- avec la situation du puzzle de G.Brousseau qui peut s'utiliser en CM ou en 6ème ou en 5ème[19].

Nous avons vu des élèves de 3ème surpris quand leur professeur leur a dit que la proportionnalité, les triangles de même forme du théorème de Thalès, la fonction linéaire, ne sont que la mathématisation de ce qu'ils connaissent depuis leur petite enfance (poupées, maquettes et autres modèles réduits). Ils ont manifesté l'émerveillement de la première rencontre... qui aurait pu se faire bien avant[20] ! S'ils ont été si surpris, c'est que, lors des nombreuses leçons sur la proportionnalité avant la 3ème, leurs professeurs successifs n'avaient pas attiré leur attention sur ce fait. N'est-ce pas parce que ces professeurs ont cru que cela va de soi pour les élèves, que ce rapprochement est transparent pour tous ? Ou bien est-ce parce que leur pratique des mathématiques les a conduits à penser que ces remarques relèvent du domaine privé de la connaissance et n'entrent pas dans l'enseignement de cette discipline[21]?

Il est important de noter ce qui provoque tout d'un coup chez un élève cet effet « première rencontre », cette sensation subite de comprendre, au sens étymologique de « prendre ensemble ». Cela peut se produire par une mise en corrélation à l'intérieur des mathématiques. Cela peut arriver aussi par la prise de consciente d'une proximité avec une situation du « monde réel ».

C. Différences entre les types de questions dans leur rapport avec la « réalité »

Dans l'exemple des triangles comme dans celui des fractions, les questions de type 2 apparaissent davantage fabriquées artificiellement par le maître que celles de type 1 Elles sont différentes dans le rapport qu'elles entretiennent avec une certaine « réalité ». En d'autre

---

[18] Cette idée nous vient d'Emma Castelnuovo : Cf son ouvrage *Mathématiques dans la réalité*- Nathan CEDIC – 1980- et ses nombreuses publications en Italie pour le collège (scuola media). L'idée sur les feuilles se poursuit avec la remarque de l'absence de proportionnalité entre la taille totale et la hauteur de la tête chez les humains en allant du foetus à l'âge adulte et l'utilisation qui en est faite parfois dans l'art. Nous avons organisé ces mesures en collège récemment et même en classe de seconde en 1984 avec des élèves engagées dans un PAE intitulé: « Mathématiques et phénomènes de croissance ».

[19] Dans *Rationnels et décimaux* de Guy et Nadine Brousseau la situation du puzzle est suivie d'une autre situation où l'enseignant utilise des reproductions à différentes échelles du dessin d'un bateau (l'optimist) associé à une classe de mer suivie par les élèves.

[20] Collège Cassignol - Bordeaux – Année scolaire 2006-2007

[21] On peut organiser cela à l'occasion d'ateliers ou de projets éducatifs optionnels pour les élèves volontaires. Mais ici nous réfléchissons à un enseignement pour tous, dans le temps scolaire, pour ne priver aucun élève d'une séance importante qui lui donne la chance de comprendre.

termes ce que la Théorie des Situations nomme la contextualisation serait ici moins « artificielle » parce que le contexte serait pris dans l'environnement quotidien de l'élève.

1. Modélisation, gestion en classe

Le professeur qui utilise le type 1 va rencontrer immédiatement le problème
- de la modélisation
- des erreurs de mesure

Dans la proposition d'AER 1, le passage de 1 à 1' où un matériel dépouillé est apporté en classe, permet d'éviter l'écueil de la modélisation de la situation réelle (concevoir un plan en négligeant les accidents du terrain, etc...). Celui des erreurs de mesure et de l'approximation dans les mesures subsiste.

Le fait de passer à la feuille de papier entraîne un changement d'échelle pour la distance.

Dans les deux situations pour les fractions, celle des feuilles de papier comme celle de la baguette dont il faut transmettre la longueur, la difficulté des erreurs et de l'approximation dans les mesures est présente : lors de la mesure de l'épaisseur des tas de feuilles de papier pour l'une, lors des reports de la longueur unité ou de ses fractions pour l'autre. Nous utilisons la situation de la baguette en 6$^{\text{ème}}$ sans trop de difficultés en soulevant avec les élèves le problème de la précision des mesures.

Dans l'exemple de la similitude, la situation sur les feuilles des arbres est nettement de type 1, celle sur l'agrandissement de la photo évite, comme celle du puzzle, les problèmes de modélisation et d'erreur de mesure avec l'avantage, pour la photo, d'apparaître plus « naturelle » que le puzzle, parce que l'action d'agrandir une photo fait davantage partie de la vie courante que celle d'agrandir un puzzle ! Mais la validation interne par recomposition du puzzle est affaiblie. Son avantage est d'être moins coûteuse en temps et, pour des élèves plus grands, d'ouvrir très vite vers les questions de la représentation graphique de la fonction linéaire, de l'homothétie...

2. Questions non résolues

Pour la « première rencontre » avec l'application linéaire, les mesures effectives en classe des feuilles des arbres sont-elles utiles, ou un simple « discours » ostensif du professeur sur poupées, maquettes, feuilles des arbres, etc... est-il suffisant ? Pourrait-on envisager une première « première rencontre » avec la proportionnalité à l'école élémentaire en utilisant la fabrication d'une maquette (le puzzle en trois dimensions ?) et une deuxième « première rencontre » au collège avec l'application linéaire en utilisant les feuilles des arbres ?

Y aurait-il de même deux « premières rencontres » possibles pour le triangle ?

De façon générale, un enseignement basé sur la TSE ne réalise-t-il pas justement une succession de « premières rencontres » à mesure que l'on enchaîne les questions découlant de la QFPG ?

Dans notre équipe nous donnons la primauté à la QFPG mathématique par rapport au souci de « réalité » du problème posé mais ceci ne veut pas dire que les deux préoccupations ne sont pas présentes dans notre travail.

Selon les impératifs de temps, de gestion de la classe, de subordination de la contextualisation aux questions mathématiques que l'on veut poser aux élèves ou que l'on souhaite qu'ils se posent, le professeur s'éloigne plus ou moins de la « réalité du monde ». Comment évaluer cet écart et l'importance qu'il a dans la motivation de l'étude. Comment contrôler cet écart ?

Toutes ces « premières rencontres » échelonnées dans le temps doivent-elles avoir lieu nécessairement dans des phases introductives d'un nouveau concept ou peuvent-elles se placer à mesure que l'élève approfondit sa connaissance ? C'est parce que les élèves de 3ème avaient une certaine connaissance de la proportionnalité que le petit discours rapide du professeur leur a paru éclairant. Autre exemple : les élèves doivent quand même avoir une certaine connaissance du triangle avant de se poser la question de la mesure de la distance inaccessible AM dans l'AER 1.

D. Où et comment utiliser le problème « réel » de distance inaccessible?

Le matériel de l'AER 1, avec les visées qu'elle propose pour déterminer la distance inaccessible, pourrait être utilisé aussi dans les deux AER de 4ème sur le théorème de Thalès et le cosinus.
Envisageons différentes possibilités pour placer cette situation du triangle dans le temps scolaire.

1. En application

On pourrait imaginer le problème du topographe en fin de chapitre. Le texte fournirait aux élèves les deux angles et la longueur AB, en leur disant de construire le triangle à une certaine échelle Ce pourrait être un exercice d'application:

- des leçons sur la proportionnalité et sur la construction des triangles en 5ème, mais pas sur leur détermination, car il sera implicite alors que les éléments fournis vont déterminer le triangle.
- de la leçon sur Thalès en 4ème

Les manuels de 4ème notamment proposent ce genre d'exercice d'application après le théorème de Thalès ou le cosinus.
<u>Mais, même en situation d'application, il y a deux options :</u>

- le professeur donne ce genre d'exercice à faire seul à la maison à partir d'un simple texte écrit,
- le professeur fait traiter l'exercice en classe en apportant le matériel (feuille rose pour matérialiser la partie interdite, visées effectivement réalisées en classe, etc.. jusqu'à trouver réellement la mesure inaccessible).

Il nous semble évident que dans le deuxième cas l'intérêt sera beaucoup plus grand pour les élèves.

Un professeur de 5ème qui utiliserait ainsi la situation dans sa classe comme une application, après la leçon sur le triangle, avec la deuxième option c'est à dire en amenant le matériel de manipulation, ferait tout de même une adaptation assez forte, en changeant l'objectif dans lequel elle a été conçue. Et cependant pourquoi pas, notamment en 4ème après Thalès? Et aussi en 4ème après le cosinus, en plaçant le point B de sorte que la seconde visée donne un angle droit ?

Aucun de ces exercices n'est traité avec un matériel simple fabriqué par le professeur, modélisant la « réalité », mais bien « réel », c'est pourquoi les élèves ne voient pas dans l'exercice d'application une « première rencontre ». Pour cela il faudrait qu'ils puissent donner du sens à la notion théorique du cours en s'appuyant sur la situation concrète de l'exercice. Ils ne peuvent pas le faire à partir d'une simple évocation de la réalité.

2. En introduction

Si le professeur place le problème du topographe en début de chapitre et en fait une sorte de discours introductif à sa leçon, en posant le problème de la distance inaccessible et en décrivant la solution sans la mettre en œuvre réellement avec le matériel simple de la feuille rose, nous pensons que ce sera en grande partie du temps perdu pour les élèves car l'évocation sera trop vague. Montrer le matériel de modélisation ne suffit pas. Il nous semble impossible que le discours du professeur soit compris et crédible si la résolution du problème ne va pas jusqu'à son terme, avec une participation plus active des élèves.

Si le professeur utilise l'AER 1 pour introduire la construction et la détermination des triangles, elle ouvre à la fois sur ces questions et sur celle de la reproduction d'un triangle réel à une certaine échelle, sur la feuille de papier. De plus la leçon sur la détermination des triangles ouvre déjà deux questions à traiter ensuite : celle de la somme des angles et celle de l'inégalité triangulaire. Cela fait beaucoup de problèmes soulevés en même temps. Il vaudrait mieux se limiter dans un premier temps à la reproduction d'un grand triangle isométrique pour enchaîner sur la détermination d'un triangle, quitte à revenir au triangle réduit plus tard, peut-être dans une leçon sur la proportionnalité.

VI. Conclusion :

Nous espérons que ces quelques réflexions pourront aider le professeur qui veut utiliser - ou même qui a déjà utilisé - les AER présentées par AMPERES .
Ce professeur pourra ainsi mieux discerner les différents choix didactiques qu'il peut faire, ce qui augmentera sa liberté de décision. C'est ce surcroît de liberté que doit produire une bonne information qui devient, en travaillant, une vraie acquisition de connaissances pour augmenter son savoir professionnel. C'est ce qui se passe dans le domaine de l'enseignement comme dans n'importe quel autre métier.