Commission Inter-Irem Université Avril 2015

Compte-rendu de passation en Licence première année d'une ingénierie sur la notion de limite d'une fonction.

Pascale Sénéchaud -Université de Limoges.

Introduction

Ce travail est à mettre en relation avec le travail actuel de la C2IU : un groupe de membres de cette commission a travaillé à l'adaption d'une ingénierie sur la notion de limite d'une fonction (J.Robinet). J'ai mis en pratique avec mes étudiants de première année de licence au deuxième semestre (Parcours maths-info) le protocle que nous avions prévu (voir article proposé à EMF).

Cadre

En amphithêatre, avec 80 étudiants. Les étudiants n'avaient pas encore formalisé la notion de limite de fonction dans leur cursus, mais l'avait utilisé de manière calculatoire comme au lycée. En revanche, la notion de limite de suite avait été formalisée avec eux.

Protocole

- Situation 1 : Les fonctions tests sont données aux étudiants pour qu'ils en tracent l'allure. L'amphithêatre est divisé en quatre et je fournis deux fonctions par groupe puis on classe ces fonctions tous ensemble : j'envoie un représentant de chaque groupe au tableau et en discutant je donne les critères de classement. Les fonctions test sont données par paire comme suit :

$$x \mapsto x^3 \text{ et } x \mapsto \frac{2+x}{7-x}$$
$$x \mapsto x + \sin(x) \text{ et } x \mapsto \sqrt{x}$$
$$x \mapsto \cos\frac{1}{x} \text{ et } x \mapsto \frac{4}{(2-x)^2}$$
$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \text{ et } x \mapsto x^2$$

- Situation 2 : Comment choisir x réel pour que x^2 soit supérieur à 25, puis supérieur à 100 même question avec $\sqrt{x}$. Un étudiant dessine des quart de plan au tableau pour les 2 fonctions.

- Situation 3 : Formalisation de la limite quand le cas où la fonction tend vers l'infini en $+\infty$.

  Temps prévu pour ces trois situations : 1h30.

- Situation 4 : limite en un point, en reprenant les mêmes fonctions qu'au début.

Pour un ré-investissement (voir l'exercice en annexe) ce sera un exercice à faire à la maison et à me rendre.

Réalisation

- Situation 1 :
  les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \dfrac{2+x}{7-x}$, $x \mapsto \dfrac{4}{(2-x)^2}$ ont été tracées correctement (sans calculatrice) par les étudiants.
  Les fonctions $x \mapsto x + \sin(x)$, $x \mapsto \cos(\dfrac{1}{x})$, $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ leur ont posé des problèmes :

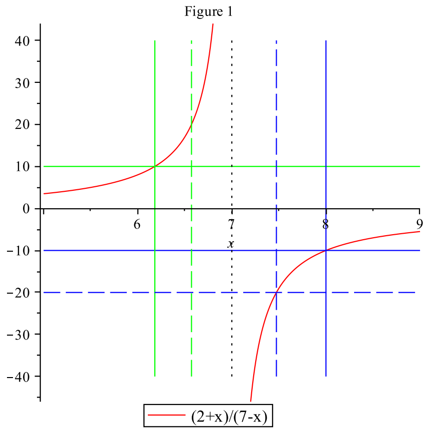
  - pour $x \mapsto x + \sin(x)$: en leur disant d'abord de tracer la droite d'équation $y = x$ et "d'ajouter $\sin(x)$", les étudiants ont trouvé l'allure facilement ;
  - pour $x \mapsto \cos(\dfrac{1}{x})$: les étudiants disent que ça oscille entre -1 et 1 et c'est tout ;
  - pour $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$: à part dire que la limite vaut 1 en 0 et que ça oscille, les étudiants ne fournissent aucun tracé (je les ai convaincus avec ces 2 exemples que dire que "ça oscille" n'est vraiment pas précis....).

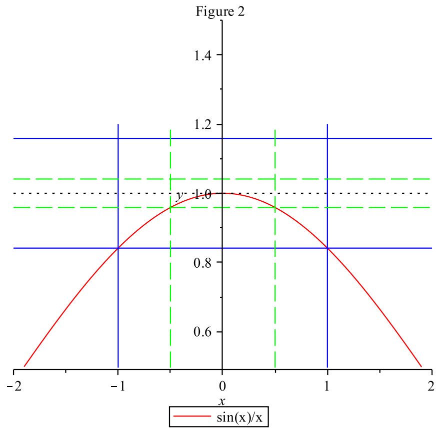
  Conclusion : les fonctions trigonométriques ne sont pas du tout maitrisées, alors quand on les combine avec d'autres fonctions, cela représente une difficulté insurmontable.
  Pour le classement : Ils ont mis ensemble celle que tendent vers 0, 1 ou -1 en l'infini. Ainsi les fonctions :
  $x \mapsto \dfrac{2+x}{7-x}$, $x \mapsto \dfrac{4}{(2-x)^2}$ ont été mises ensemble,
  après discussion ils ont mis $x \mapsto x^3$, et $x \mapsto \sqrt{x}$ $x \mapsto x + \sin(x)$ ensemble (tendent vers l'infini en +infini).
  Ils ne savaient pas où mettre $x \mapsto \cos(\dfrac{1}{x})$ et $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.
  Les étudiants en ont conclu qu'il fallait privilégier un seul critère à la fois : ici on regarde uniquement le comportement à l'infini. De ce fait des discussions se sont engagées au sujet des asymptotes : à savoir que le graphique seul ne nous permet pas de conclure si la représentation graphique de la fonction possède ou non une asymptote horizontale ou verticale : après tout la fonction $x \mapsto x^2$ pourrait bien avoir une asymptote verticale et $x \mapsto \sqrt{x}$ une asymptote horizontale.

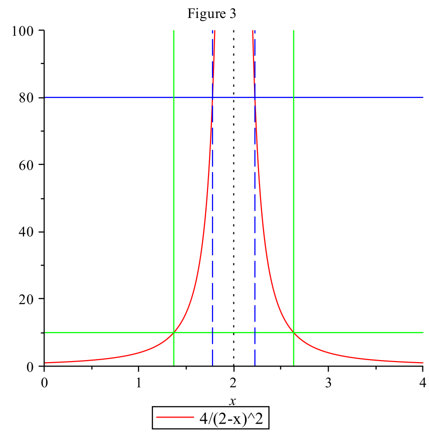
- Situation 2 :
  Les étudiants s'appuient sur le graphique et cela leur suffit pour répondre à la question posée. On peut remarquer qu'aucun étudiant n'essaye spontanément de répondre à la question en manipulant des inéquations. Mais après discussion au sujet de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ les étudiants disent que " *pour* $\sqrt{x} > 125$ *on voit rien du tout, si on ne fait pas de zoom* " , ce qui a motivé le passage à l'écriture "symbolique " pour écrire :
  Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\sqrt{x} > 125 \Longleftrightarrow x > 125^2$ et donc si $x > 125^2$ alors $\sqrt{x} > 125$.
  L'utilisation du formalisme s'est trouvée vraiment bienvenue ici. Comme la lecture graphique devenait insuffisante, les étudiants se sont tournés naturellement vers l'inégalité écrite au tableau.

- Situation 3 : Il me semble que les étudiants ont bien compris la nécessité du passage au formalisme.

- Situation 4 : Un certain nombre de situations ont été représentées par des graphiques, comme par exemple







Les droites horizontales et verticales servent alors de support pour une explication orale d'énoncés de la forme : soit $\varepsilon > 0$, quelle condition sur $x - x_0$ peut permettre d'avoir soit une minoration ou une majoration de $f(x)$, soit un encadrement de $f(x) - l$, selon le cas.

Pour le sujet sur $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \lfloor 100 - x \rfloor$ (sujet en Annexe) : (30 étudiants m'ont rendu l'exercice qui était facultatif).
Question1). Une partie (1/3) des étudiants tracent une droite et les autres des escaliers à marches "plates". ils ont utilisé leur calculatrice sans pouvoir calculer des valeurs et parler du sens de variations par intervalle.
Questions suivantes. Pour les encadrements : ils ont écrit
si $y < -10$ alors $\cos(u)\, y < -10$ car $0 < \cos u < 1$ et j'ai retrouvé cette erreur jusqu'à la question 3) et je pense qu'ils se rendaient compte que quelque chose n'allait pas car certains sont venus me voir avant de me rendre l'exercice. Il se sont perdus dans les inégalités en pensant que la difficulté était là et ont oublié l'objectif des questions.
Pour la question 4) une toute petite partie (1/6) a généralisé la question précédente (avec l'erreur dans les signes) et le reste des étudiants a présenté la limite sous forme d'un produit de limites connues mais non justifiées.
Je les ai renvoyés à un document contenant des exercices sur les inéquations et la trigonométrie et on a corrigé l'exercice complet en séance.
Pour simplifier l'exercice et mieux mesurer l'incidence de cette ingénierie, je pense qu'il faut proposer un exercice plus simple avec par exemple la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right) \lfloor 100 + x \rfloor$, ainsi les problèmes de gestion d'inégalités ne distrairaient pas les étudiants.

J'y ai passé 3h30 en tout et les séances se sont bien articulées avec le cours mais moins bien avec un des groupes en séances d'exercices qui n'était pas en phase.

1 Annexe

Faculté des Sciences & Techniques — Mars 2015
MIAHSHS-SI (MIP) $1^{ère}$ année

Mathématiques II-MIP- Exercice à rendre sur feuille

Exercice
On considère la fonction de la variable réelle x donnée par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \lfloor 100 - x \rfloor$.

1- Tracer la fonction f sur l'intervalle $I_1 = [90\,;100]$, puis sur l'intervalle $I_2 =]100\,;110]$.

2- Démontrer que :
   a- $\forall x \in I_1,\ 0 \leq f(x) \leq 10$.
   b- $\forall x \in]101\,;110],\ f(x) \leq -1$.
   c- $\forall x \in]111\,;120],\ f(x) \leq -10$.

3- Comment choisir x pour avoir $f(x) \leq -40$?

4- Quelle est la limite de la fonction en $+\infty$? justifier.