Géométrie, programme d'Erlangen, groupes, transitivité et invariants : de la théorie à la pratique

Daniel Perrin

Résumé Cet exposé s'inscrit dans la continuité du travail du groupe "Géométrie" de l'IREM de Paris et de la publication de la brochure numéro 100 : *Enseigner la géométrie au cycle 4.* Nous tenterons de montrer comment des notions théoriques issues du programme d'Erlangen de Felix Klein (les groupes, la notion de "niche écologique" d'un théorème, la transitivité) sont pertinentes pour les professeurs car elles leur permettent :

– D'avoir un temps d'avance par rapport aux élèves pour trouver un résultat.

– De choisir les invariants pertinents pour les démonstrations selon la "niche" en jeu, par exemple l'aire dans le cas de la géométrie affine.

– De comprendre l'intérêt des critères de transitivité, et notamment des cas d'isométrie et de similitude.

Introduction

Les références

Dans cet exposé, je vais aborder beaucoup de thèmes, de manière très sommaire. Pour des détails le lecteur pourra consulter ma page web : `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/`

Il y a beaucoup de choses qui concernent la géométrie sur ce site. Je signale notamment les rubriques : *sur la géométrie, conférences, livre de géométrie projective, projet de géométrie, préparation au CAPES*, etc.

Une autre référence importante est le rapport de la commission Kahane (*L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, 2002). La partie géométrie est sur ma page web :
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/SurGeometrie/Rapport_geometrie.pdf`

Il y a aussi beaucoup de choses dans mon livre [8] (*Mathématiques d'École*).

Enfin et surtout, nombre des idées qui vont suivre ont été développées dans la Brochure numéro 100 de l'IREM de Paris ([1]) :

`http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf`

Mes objectifs

Mon principal objectif, depuis de nombreuses années, est de défendre l'enseignement de la géométrie et de former les professeurs sur ce thème. Là-dessus, on consultera, par exemple, le rapport de la commission Kahane et la postface de mon projet de livre de géométrie projective.

L'objectif de l'exposé d'aujourd'hui est de montrer comment des notions théoriques issues du programme d'Erlangen de Felix Klein (les groupes, la notion de "niche écologique" d'un théorème, la transitivité) sont pertinentes pour l'enseignement car elles permettent :

- D'avoir un temps d'avance par rapport aux élèves pour trouver un résultat.
- De choisir les invariants pertinents pour les démonstrations selon la "niche" en jeu, par exemple l'aire dans le cas de la géométrie affine.
- De comprendre l'intérêt des critères de transitivité, et notamment des cas d'isométrie et de similitude.

1 Le programme d'Erlangen

1.1 Retour à Euclide

Avant de parler du programme d'Erlangen, je voudrais expliquer pourquoi il me semble déjà en germe dans les éléments d'Euclide. Examinons donc la preuve du premier cas d'égalité des triangles (Livre 1, proposition 4) :

Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.

Voici, recopiée intégralement, la preuve d'Euclide (voir figure 1) :

Soient $AB\Gamma$ et ΔEZ deux triangles tels que l'on ait : $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ et $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$. Je dis qu'il est aussi $B\Gamma = EZ$ et que ces triangles ont tous leurs autres éléments homologues égaux, c'est-à-dire que l'on aura aussi : $B\Gamma = EZ$, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ et $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.

En effet, si l'on appliquait le triangle $AB\Gamma$ sur le triangle ΔEZ de manière à faire coïncider d'abord les points A et Δ, puis les côtés AB et ΔE, le point B coïnciderait avec E, car $AB = \Delta E$. Les côtés $A\Gamma$ et ΔZ coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, de sorte que le point Γ à son tour coïnciderait avec Z, car $A\Gamma = \Delta Z$. D'autre part, les points B et E ayant déjà coïncidé, les côtés $B\Gamma$ et EZ coïncideront aussi.

Par conséquent, le triangle $AB\Gamma$ tout entier coïncidera avec le triangle ΔEZ tout entier et les angles restants de l'un coïncideront avec les angles restants de l'autre et ils seront respectivement égaux entre eux, à savoir : $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ *et* $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.

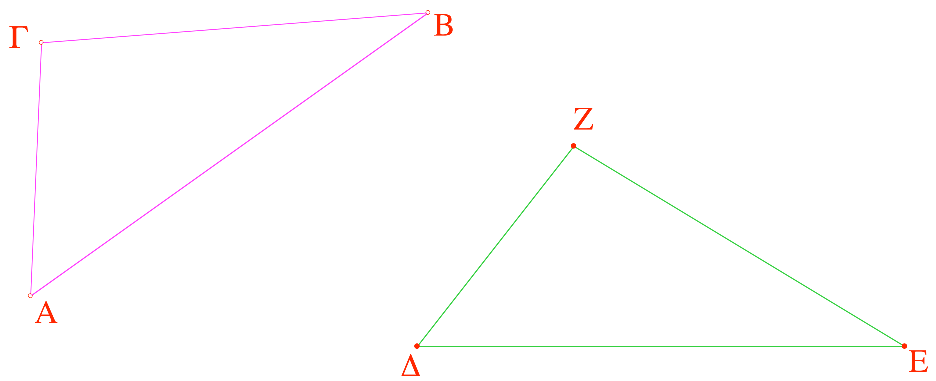

FIGURE 1 – Le premier cas d'égalité

Cette "preuve", qui utilise la méthode dite de superposition, est celle que l'on donnait autrefois en classe de cinquième et elle convainquait la plupart des élèves. Cependant, le mathématicien attentif y décèle évidemment un point faible : que signifie le fait d'*appliquer*[1] le triangle $AB\Gamma$ sur ΔEZ[2] ?

Cette faille dans Euclide a été notée depuis longtemps et, en tous cas, David Hilbert, quand il a entrepris la refonte de l'œuvre d'Euclide (voir [3]), en était parfaitement conscient. La solution qu'il a adoptée est de prendre ce premier cas d'égalité des triangles comme axiome et de bâtir le reste de la géométrie dessus. C'est une solution correcte, mais trop brutale à mon goût. Je serais plutôt en faveur d'une axiomatique qui permette de rendre valide la preuve d'Euclide et la méthode de superposition, si naturelle. Ce qui est nécessaire pour cela est de donner un sens à l'opération consistant à appliquer ou transporter une demi-droite sur une autre, propriété qui manifeste l'homogénéité du plan. Avec nos connaissances actuelles, on sent bien que derrière cela il y a la nécessité de la présence d'un **groupe** de transforma-

1. On notera que le mot utilisé ici (et qui semble admis par tous les traducteurs) est celui qui sera retenu dans le langage moderne.

2. Il y a beaucoup d'autres zones d'ombre dans cette démonstration. Par exemple, lorsqu'Euclide parle de faire coïncider les côtés, il pense sans doute aux demi-droites qui les portent, mais il faut aussi faire attention aux demi-plans. En particulier, Euclide n'envisage pas le cas où les triangles sont échangés par une isométrie négative.

tions. Précisément, je propose de postuler qu'il existe un tel groupe qui opère **transitivement**[3] sur les **drapeaux** (un point, une demi-droite d'origine ce point, un demi-plan limité par cette demi-droite), voir [9], un jour peut-être. Un groupe qui opère transitivement sur un ensemble : on est au cœur du programme d'Erlangen, comme on va le voir.

1.2 Le programme d'Erlangen

1.2.1 Demandez le programme

Le programme d'Erlangen est la thèse de Felix Klein (voir [5]), soutenue en 1872 dans cette ville. Le travail de Klein arrive après l'explosion des géométries, survenue dans la première moitié du dix-neuvième siècle avec la création, à côté de la géométrie euclidienne classique, de la géométrie projective, des géométries non euclidiennes, etc. et il se veut une tentative d'**unification** de ces géométries. Le principe unificateur, adopté par Klein, est qu'une géométrie consiste, pour l'essentiel, en la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X, autrement dit d'un groupe G opérant sur X. Les éléments de G sont les transformations "permises" dans la géométrie en question et elles caractérisent cette géométrie. Il s'agit, par exemple, des isométries (affines) pour la géométrie euclidienne plane, ou des transformations affines pour la géométrie affine plane, ou encore des homographies pour la géométrie projective. Les propriétés relatives à la géométrie en question (propriétés euclidiennes, affines, projectives) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe, ainsi que le dit Klein :

"*étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*"

1.1 *Exemples.* 1) Les homographies conservent concours et alignement.

2) Les transformations affines conservent en outre le parallélisme, les rapports de mesures algébriques sur une même droite (tout ce qui se formule avec des vecteurs mais sans produit scalaire) et les rapports d'aires.

3) Les isométries conservent en outre longueurs et angles.

1.2.2 La niche écologique d'un théorème

Le programme d'Erlangen, c'est d'abord cela : une méthode de classification des résultats de géométrie. Ainsi, pour citer trois résultats célèbres, le

3. Dire qu'un groupe G opère transitivement sur un ensemble X signifie qu'étant donnés $x, y \in X$ il existe toujours $g \in G$ tel que $g.x = y$. Ce mot sera l'un des mots-clés de cet exposé.

théorème de Pappus : *(si l'on a*[4] *a, b, c alignés sur D et a', b', c' sur D', si (bc') et $(b'c)$ (resp. (ca') et $(c'a)$, resp. (ab') et $(a'b)$) se coupent en u (resp. v, resp. w), voir figure 2 ci-dessous, alors les points u, v, w sont alignés)* qui n'emploie que les notions de concours et d'alignement, est un théorème projectif, tandis que Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien.

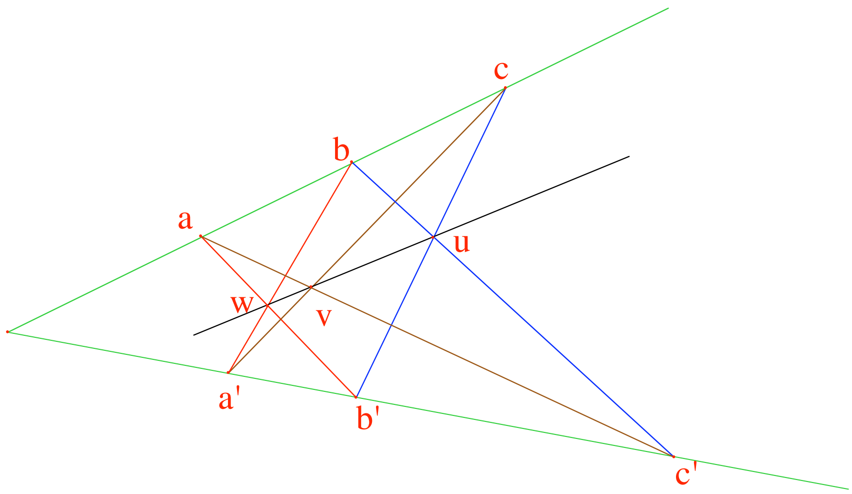

FIGURE 2 – Théorème de Pappus : u, v, w sont alignés

On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une **niche écologique privilégiée**, qui correspond au cadre dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité et, souvent, où il se démontre avec le plus de facilité.

L'exemple du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit, frère jumeau de Pappus, illustre bien cette idée. Ce théorème s'énonce d'abord avec a, b, c, a', b', c' sur un cercle, voir figure 3 (la suite du théorème est identique à celle de Pappus).

Il n'est pas difficile de montrer ce théorème dans ce cadre en utilisant le théorème de l'angle inscrit, il apparaît alors comme un théorème euclidien.

Il est clair cependant que ce théorème n'est pas énoncé là dans sa plus grande généralité puisqu'il vaut aussi pour une ellipse. C'est alors devenu un théorème affine. On peut enfin l'énoncer pour une parabole ou une hyperbole

4. Dans ce texte on verra cohabiter plusieurs notations pour les points soit avec des minuscules soit avec des majuscules. Cela résulte de nombreux copiés-collés sur des documents différents. Le lecteur est prié de ne pas s'en inquiéter.

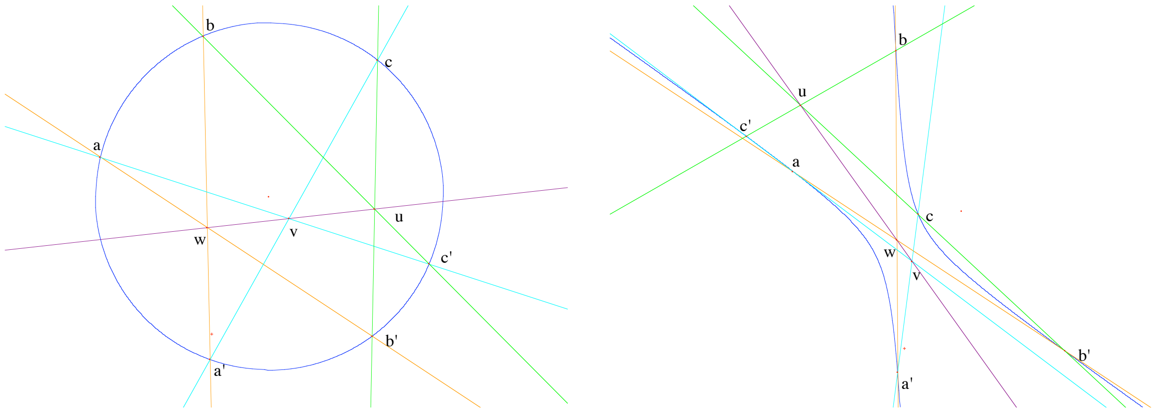

FIGURE 3 – Théorème de Pascal : u, v, w sont alignés

et il devient un théorème projectif. C'est d'ailleurs dans ce cadre qu'il est le plus facile à prouver ce qui est, somme toute, moral, puisque le théorème est ici débarrassé de la gangue des notions affines et euclidiennes inutiles. Deux preuves me semblent particulièrement pertinentes :

• Celle qui utilise **l'invariant** fondamental associé à une conique : le birapport.

• Celle qui consiste à prouver le résultat dans le cas euclidien et à utiliser un argument de **transitivité** pour passer au cas général : il existe une homographie qui transforme un cercle en une conique quelconque (c'est essentiellement la méthode de Pascal qui utilise une projection).

1.2.3 Quel intérêt pour les professeurs ?

Pour un enseignant, repérer la niche écologique d'un problème a deux avantages :

1) Cela lui permet de trouver rapidement le résultat cherché, souvent en se ramenant à un cas particulier. Ce mode de démonstration n'est pas en général au niveau des élèves, mais on a ainsi un **temps d'avance** sur eux.

2) De plus, lorsqu'il s'agit de proposer une preuve abordable par les élèves, le programme d'Erlangen permet d'avoir une **claire conscience des outils à utiliser**.

Nous allons illustrer cela sur l'exemple de la géométrie affine du plan.

2 Programme d'Erlangen et temps d'avance

2.1 La géométrie affine

Pour des précisions sur la géométrie affine on pourra consulter :
https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/CAPES/geometrie/GeometrieAffine.pdf

La géométrie affine est essentiellement la géométrie des points et des vecteurs (sans distance ni produit scalaire). Les transformations associées sont les applications affines f (disons bijectives) qui agissent sur les points, mais aussi sur les vecteurs par la formule :

$$\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$$

où $\vec{f}$ est l'application linéaire associée à f. Elles forment le groupe affine qui comprend les translations et les applications "linéaires" bijectives et leurs composées.

Dans le cas réel euclidien le groupe affine contient les isométries, les homothéties, mais aussi d'autres transformations, qui l'engendrent : les **affinités** (ou dilatations) et les **transvections**.

Une affinité est une application qui a un point fixe et dont l'application linéaire associée a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq 0, 1$ tandis qu'une transvection a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq 0$. Le lecteur fera les figures nécessaires pour comprendre le sens géométrique de ces applications et il trouvera des détails à ce sujet dans [7] par exemple.

Toutes ces transformations conservent les propriétés qui s'expriment en termes de vecteurs (sans produit scalaire) : alignement, concours, parallélisme, milieux, rapports de mesures algébriques (attention, seulement sur une même droite ou des droites parallèles), rapports d'aires, mais ni angles, ni longueurs.

2.2 Application du programme d'Erlangen en géométrie affine

On a vu que la notion de transitivité était déjà en filigrane dans Euclide et qu'elle menait à une preuve du théorème de Pascal. En vérité, la question de la transitivité est centrale dans la perspective du programme d'Erlangen : le groupe G est-il transitif sur les points de X, sur les droites, sur les drapeaux (couples formés d'une droite et d'un point situé sur cette droite) ? L'est-il sur les couples de points ou de droites ? Voici quelques exemples de son utilisation, dans la perspective de la classification des théorèmes proposée par le programme d'Erlangen. Le cadre est ici celui de la géométrie affine.

2.2.1 Le principe

1) On repère que le problème est un problème affine. Cela signifie qu'il peut mettre en jeu les notions d'alignement, de concours, de parallélisme, de milieux, de rapports de mesures algébriques sur des droites parallèles, de barycentres, d'aires (mais pas de longueur, d'angle et d'orthogonalité qui sont des notions euclidiennes).

2) On effectue une transformation affine f (qui conserve les notions ci-dessus) de façon à transformer le problème en un problème plus simple. Le plus souvent cela revient à traiter un cas particulier du problème présentant une propriété euclidienne supplémentaire (on transforme un triangle quelconque en un triangle équilatéral, un parallélogramme en un carré, etc.). Dans cette phase on utilise des résultats de **transitivité**.

3) On résout le problème ainsi simplifié (y compris, éventuellement, avec des outils euclidiens) et on revient au cas initial par la transformation inverse.

Voici un exemple, élémentaire mais révélateur, d'application de cette technique. On veut montrer que les **médianes** d'un triangle sont concourantes. Comme la notion de médiane est affine, on aura gagné si l'on montre qu'on peut transformer le triangle en un triangle équilatéral par une application affine. En effet, les médianes seront alors aussi les médiatrices et il est bien plus facile de montrer que celles-ci sont concourantes [5]. Le point crucial est donc le lemme suivant :

2.1 Lemme. *Le groupe affine est transitif sur les triangles.*

Démonstration. Il s'agit d'envoyer trois points a, b, c sur a', b', c' (non alignés). On commence par envoyer a sur a' par translation. Ensuite, il y a au moins deux façons de faire.

1) Les points b et c sont transformés en b'' et c''. Il ne reste plus qu'à effectuer la transformation linéaire (avec a' comme origine) qui envoie la base $\overrightarrow{a'b''}, \overrightarrow{a'c''}$ sur $\overrightarrow{a'b'}, \overrightarrow{a'c'}$ et on a gagné.

2) On détaille le processus en utilisant successivement une rotation pour amener (ab) sur $(a'b')$, une homothétie pour envoyer b en b', une transvection pour déplacer c sur la parallèle à (ab) afin de rendre le triangle isocèle, enfin une affinité pour finir le travail.

5. On considère l'intersection O des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$. On a $OA = OB$, $OA = OC$ donc $OB = OC$ et O est aussi sur la médiatrice de $[BC]$.

2.2.2 Une application élémentaire

On considère un parallélogramme $ABCD$ et un point intérieur E. La question est de trouver l'ensemble des points E tels que les aires de EAB et EBC soient égales.

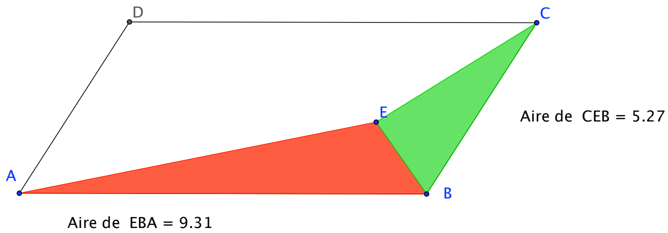

FIGURE 4 –

Le problème est affine car son hypothèse (parallélogramme) et sa conclusion (aires égales) le sont. On peut donc, pour le résoudre, appliquer une transformation affine. Comme le groupe affine est transitif sur les triangles, on peut imposer que ABC soit rectangle isocèle, de sorte que $ABCD$ devient un carré.

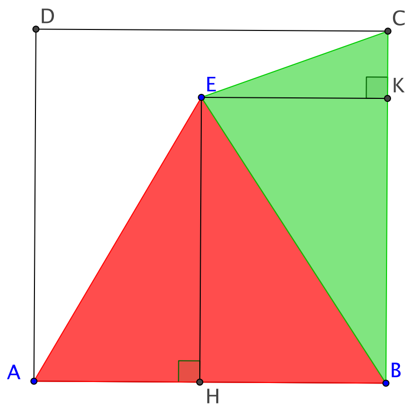

FIGURE 5 –

Là, le problème est facile. Avec la formule $base \times hauteur/2$ on voit que les hauteurs EH et EK issues de E sont égales, de sorte que E est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Ah, attention, la notion de bissectrice n'est pas affine. Mais ici, cette bissectrice est la diagonale du carré et par la transformation affine inverse elle reste diagonale du parallélogramme. Le professeur a donc aussitôt le résultat (la diagonale). De plus, nous verrons plus bas que le fait d'avoir identifié le problème comme affine indique quels outils employer pour une preuve élémentaire : ce sont les "lemmes du collège" de [8].

2.2.3 Le problème des tiers

Les problèmes d'aires sont sans doute, dans le cas affine, ceux qui se prêtent le mieux à l'utilisation des principes d'Erlangen. Voici un autre exemple de ce type.

Soit abc un triangle, i, j, k des points situés respectivement sur les côtés $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ au tiers le plus proche de b, c, a. Les droites (bj) et (ck), (ck) et (ai), (ai) et (bj) se coupent respectivement en p, q, r. Déterminer l'aire du triangle pqr en fonction de celle de abc.

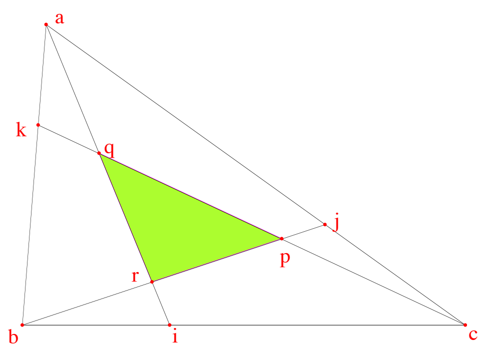

FIGURE 6 –

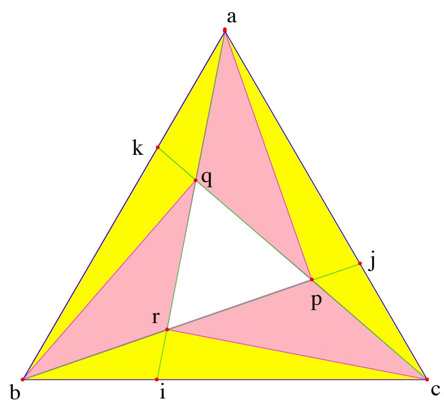

FIGURE 7 –

Le problème est clairement affine (les seules notions mises en jeu sont les rapports $1/3$ sur une même droite et les rapports d'aires). On peut donc, pour le résoudre, le transformer par une application affine. On peut supposer que l'on est dans le plan euclidien et on transforme abc en un triangle **équilatéral** $a'b'c'$ de centre o comme on l'a vu ci-dessus. On dispose alors d'un outil supplémentaire [6] : les rotations de centre o et d'angles $\pm 2\pi/3$ qui permutent a, b, c ; i, j, k et p, q, r. On en déduit nombre d'égalités d'aires, dont celles des triangles roses apq, bqr et crp et des triangles jaunes abq, bcr et cap et on

6. En vérité, cette transformation existe aussi dans le cas général : il existe une application affine qui permute (encore la transitivité) les points a, b, c et donc aussi les points i, j, k et p, q, r, mais elle est moins évidente, au sens propre du terme.

commence à subodorer le résultat : le triangle central est un septième du triangle initial, voir plus loin.

2.2.4 L'ellipse de Steiner

Il s'agit de montrer le résultat suivant : si ABC est un triangle et si D, E, F sont les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement, il existe une ellipse (dite de Steiner) tangente aux côtés des triangles en les points D, E, F.

Là encore, le problème est affine car milieux et ellipse sont des notions affines. On peut donc, pour le résoudre, transformer ABC en un triangle équilatéral, mais là, l'ellipse de Steiner est évidente, c'est le cercle inscrit !

Pour des détails sur ce thème, voir :
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/MM21redaction.pdf`

3 Invariants et transitivité

3.1 Orbites et invariants

Ce qui précède montre l'importance de la transitivité dans l'application du programme d'Erlangen. Mais, bien entendu, l'action d'un groupe G sur un ensemble X n'est pas toujours transitive. Ainsi, l'opération du groupe des isométries du plan euclidien sur l'ensemble des points est transitive, mais elle ne l'est pas sur l'ensemble des couples de points du plan. Cependant, ce défaut de transitivité n'est pas moins intéressant, car il conduit à la notion d'**orbite** : l'orbite de x est l'ensemble des $y \in X$ que l'on peut atteindre à partir de x *via* G. La plupart du temps, les orbites sont repérées par des **invariants**. Dans le cas de la géométrie élémentaire, il s'agit de notions bien connues. Si l'on ne peut pas toujours envoyer par une isométrie un couple de points (A, B) sur un autre c'est qu'il y a une obstruction qui empêche cela, un invariant du couple de points qui ne change pas par isométrie. Pas besoin d'être grand clerc pour deviner que c'est la **longueur** AB. De la même manière, on ne peut envoyer un couple de demi-droites de même origine sur un autre que si leur **angle** est le même. La notion d'invariant est donc inhérente à la géométrie.

Nous verrons plus loin que cette notion d'orbite permet de mieux comprendre certains des outils légués par les Grecs comme les cas d'égalité ou de similitude des triangles.

3.2 Utilisation des invariants : l'exemple affine

3.2.1 Le principe

C'est un fait d'expérience évident que les invariants jouent un rôle essentiel en géométrie. Le principe qui va nous guider est encore dans l'esprit d'Erlangen : lorsqu'on travaille dans une géométrie donnée, les problèmes peuvent être résolus avec les invariants de cette géométrie. C'est plus qu'un principe car il y a un résultat théorique qui le justifie : *tous les théorèmes d'une géométrie correspondent à des relations (polynomiales) entre les invariants (polynomiaux) de cette géométrie.* Il ne peut être question de prouver ce méta-théorème ici, on renvoie pour cela le lecteur à :
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie2.pdf`
mais connaître ce résultat est d'un grand secours pratique. Ainsi, dans le cas de la géométrie affine, on montre (voir *loc. cit.*) qu'il n'y a qu'un invariant qui est l'aire (ou plutôt les rapports d'aires) et le principe ci-dessus affirme donc qu'on peut résoudre tous les problèmes de nature affine en utilisant cet invariant. De plus les résultats à utiliser sont ceux qui décrivent l'invariance de l'aire par les transformations affines : ce sont exactement les **lemmes du collège** de *Mathématiques d'école* ([8]), c'est-à-dire les résultats suivants, qui traduisent l'invariance de l'aire par symétrie cenrale, symétrie oblique, transvection et dilatation. Le lecteur les établira sans peine, par exemple avec la formule $base \times hauteur/2$:

3.1 Lemme. (Lemme du demi-parallélogramme) *Les diagonales d'un parallélogramme le partagent en deux triangles de même aire.*

3.2 Lemme. (Lemme de la médiane) *La médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.*

3.3 Lemme. (Lemme du trapèze) *Deux triangles de même base et dont les sommets sont situés sur une parallèle à la base ont même aire.*

3.4 Lemme. (Lemme des proportions) *Le rapport des aires de deux triangles qui ont un même sommet et des bases alignées est égal au rapport des bases.*

3.5 Lemme. (Lemme du chevron) *Soit abc un triangle, m un point du plan. On suppose que (am) coupe (bc) en $a' \neq b, c$. Alors on a* $\dfrac{\mathcal{A}(abm)}{\mathcal{A}(acm)} = \dfrac{a'b}{a'c}$.

Nous donnons maintenant quelques applications de ces principes.

3.2.2 Thalès

Il s'agit de montrer qu'on a $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$, voir figure ci-dessous. On interprète ces rapports en termes d'aires par le lemme des proportions et il faut prouver $\dfrac{\mathcal{A}(AB'C)}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{\mathcal{A}(AC'B)}{\mathcal{A}(ACB)}$, soit $\mathcal{A}(AB'C) = \mathcal{A}(AC'B)$. Mais ces triangles ont en commun $AB'C'$ et il reste à voir $\mathcal{A}(BB'C') = \mathcal{A}(CB'C')$: c'est le lemme du trapèze.

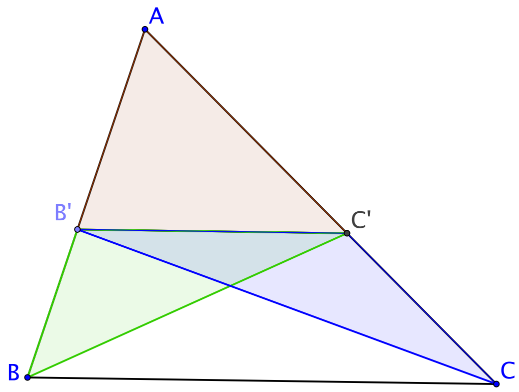

FIGURE 8 –

3.2.3 Les médianes

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de $[BC], [CA], [AB]$. Les droites (BB') et (CC') se coupent[7] en G. Alors G est sur (AA'). En effet, le lemme du chevron appliqué avec B', C' donne l'égalité $\mathcal{A}(GAC) = \mathcal{A}(GBC) = \mathcal{A}(GAB)$ et appliqué avec A' il donne le résultat.

3.2.4 Le problème des tiers

Voir figure 7. Avec $ic = 2\,ib$, on voit que le triangle qcr est d'aire double de qrb (c'est le lemme du chevron) et on en déduit que le triangle blanc central a même aire que le rose crp. Le lemme des proportions, appliqué dans cqr, montre que l'on a $pq = pc$, et en l'appliquant dans aqc on en déduit que l'aire de apq est égale à celle de apc, donc que les aires jaunes et roses sont égales. En définitive, l'aire de pqr est bien le septième de celle de abc.

Pour une preuve élémentaire directe, voir [8] exercice 225.

7. Tiens, au fait, pourquoi ?

3.2.5 Ménélaüs

Il s'agit de montrer $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$ voir figure ci-dessous. On écrit $\frac{A'B}{A'C} = \frac{\mathcal{A}(A'BC')}{\mathcal{A}(A'CC')}$ et $\frac{C'A}{C'B} = \frac{\mathcal{A}(C'AA')}{\mathcal{A}(C'BA')}$ par le lemme des proportions et on conclut par le lemme du chevron.

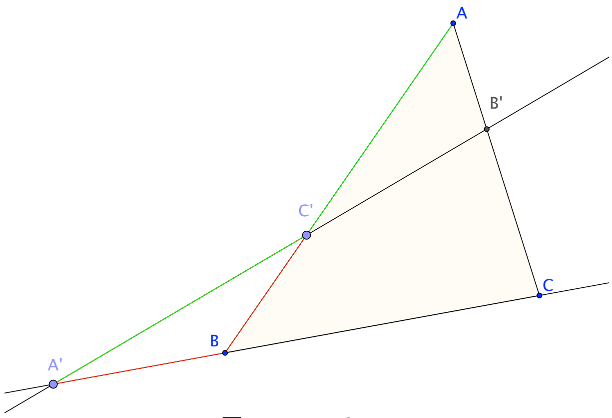

FIGURE 9 –

4 Critères de transitivité : les cas d'isométrie

Lorsqu'un groupe G opère sur un ensemble X de manière non transitive, on est amené à déterminer ses orbites, donc à prouver un théorème du type suivant :

Soient $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$ si et seulement si x et y ont mêmes invariants.

Nous allons étudier cette situation dans le cas où X est l'espace des triangles du plan et G le groupe des isométries.

4.1 Quels invariants ?

On connaît de nombreux invariants des triangles par isométrie : les longueurs des côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, les trois angles α, β, γ, mais aussi bien d'autres (aire, périmètre, longueurs des médianes, des hauteurs, etc.). La question est de savoir lesquels caractérisent les triangles modulo isométrie.

4.2 Combien d'invariants ?

En général, un seul invariant ne suffit pas à déterminer les orbites de l'action de G sur X et une question essentielle est de trouver le nombre minimum d'invariants nécessaires. Pour cela on raisonne sur la **dimension** (au sens des variétés). Ainsi, l'espace des triangles modulo isométrie est de dimension 3 c'est-à-dire qu'un triangle, à isométrie près, dépend de trois paramètres. En effet, un triangle est formé de trois points de $\mathbf{R}^2$ avec chacun deux coordonnées. L'espace des triangles dépend donc de six paramètres. Mais les isométries du plan sont de dimension trois. En effet, si une isométrie (directe) envoie A sur B, elle est composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie d'une rotation de centre B. Comme les translations sont de dimension 2 et les rotations de centr fixé de dimension 1 on a bien le compte. L'espace des triangles modulo isométrie est donc de dimension $3 = 6 - 3$ car chaque isométrie identifie les triangles qu'elle échange.

Cela impose que le nombre minimal d'invariants nécessaires pour caractériser un triangle modulo isométrie est trois. On peut ainsi répondre immédiatement à la question suivante, posée dans le bulletin de l'APMEP :

Deux triangles qui ont même aire et même périmètre sont-ils isométriques ?

La réponse est évidemment non puisqu'il il faut au moins trois invariants, voir ma conférence IREM de 2013,
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/aireperi/APM-aire-perimetre10.pdf`

4.3 Quels invariants, bis

Il faut donc trois invariants, mais pas n'importe lesquels, par exemple les trois angles ne conviennent pas car ils sont liés par la relation $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Dans cette optique, une question autrefois très classique est celle des résolutions de triangles. Il s'agit de déterminer un triangle (à isométrie près) connaissant trois de ses invariants, par exemple son aire et deux des longueurs de ses côtés, ou ses trois hauteurs. Il y a évidemment une profusion de tels exemples[8]. Si les invariants sont bien choisis, on va trouver seulement un nombre fini de solutions possibles.

4.4 Les cas d'isométrie

Cependant, le cas essentiel est celui où les trois invariants déterminent un **unique** triangle à isométrie près, c'est ce que font les **cas d'isométrie** (avec comme invariants deux côtés et un angle, deux angles et un côté ou les

8. Pour les professeurs, c'était une mine inépuisable d'exercices !

trois côtés), donnant ainsi des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie transformant un triangle en un autre.

Deux points essentiels permettent d'en comprendre l'intérêt pratique :

• Quand, avec trois invariants, on a montré que deux triangles sont isométriques, on en déduit l'égalité des invariants autres que ceux utilisés.

• On peut montrer que deux triangles sont isométriques **sans être obligé** [9] **d'exhiber l'isométrie qui fait le travail**.

4.5 Les cas d'isométrie dans l'enseignement

Les cas d'isométrie des triangles étaient un des outils essentiels des collégiens d'autrefois pour faire de la géométrie. Bannis par la réforme des mathématiques modernes, ils ont fait leur réapparition en seconde dans les années 1990, avant d'être balayés par les modifications de programmes de lycée de 2008, puis de réapparaître dans les programmes de collège de 2015 ! Je considère que ces tergiversations sont très préjudiciables à l'enseignement, notamment au regard de la formation des maîtres. Pourtant, il y a en faveur des cas d'isométrie de solides arguments, à la fois théoriques (nous les avons vus) et didactiques. De ce côté, je me contenterai d'un exemple très simple, mais révélateur.

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte des points D et E sur $[AB)$ et $[BC)$ tels que $BD = CE = AB - BC$. Montrer que ADE est isocèle.

C'est très facile avec les cas d'isométrie. En effet, on considère ACE et EBD. Ils sont isométriques (deux côtés et un angle, vu comme supplémentaire). On en déduit $AE = DE$.

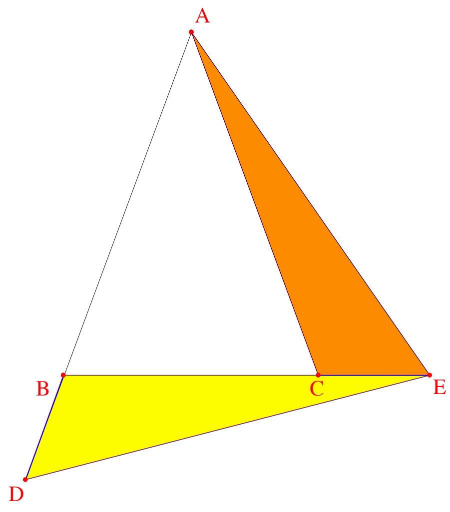

FIGURE 10 –

9. Envoyer ce triangle sur cet autre ? *Il peut le faire !* comme auraient dit Pierre Dac et Francis Blanche, voir `https://www.youtube.com/watch?v=Vp_NrF9zfEw`

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème par les transformations [10]. Voici un exemple de démonstration par les transformations.

Comme ABC est isocèle, on dispose de la symétrie σ_1 par rapport à la médiatrice de $[BC]$ qui transforme E en F. On compose ensuite par la symétrie σ_2 par rapport à la bissectrice de $\widehat{ABC}$. Comme les triangles ABE et FBD sont isocèles en B, cette bissectrice est aussi médiatrice de $[AE]$ et de $[FD]$ et la conservation des longueurs par symétrie donne $AE = AF$ (par σ_1) puis $AF = ED$ (par σ_2).

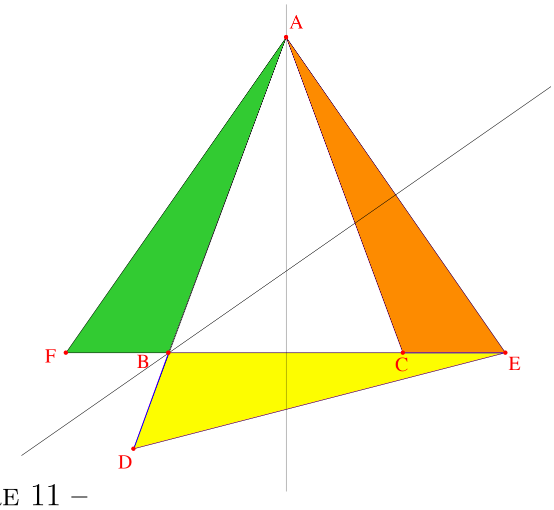

FIGURE 11 –

La principale critique que l'on peut faire à cette preuve c'est qu'elle nécessite **l'introduction d'un objet intermédiaire** : le point F ou le triangle ABF. C'est une difficulté essentielle pour les élèves, qui obligerait sans doute à donner une indication.

Il y a bien d'autres arguments en faveur de l'usage des cas d'isométrie par rapport à celui des transformations (voir [4], [2] ou [6] et surtout [1]) : les triangles peuvent se voir comme des surfaces, donc sont plus immédiatement perceptibles par les jeunes élèves que les points ou les lignes, la rédaction d'une solution par les cas d'isométrie est souvent plus simple. Un autre point est important : pour que l'usage des transformations soit efficace, il faut pratiquement les avoir toutes, ce qui n'est pas le cas au début du cursus.

Le lecteur ne manquera pas de trouver d'autres preuves du résultat précédent utilisant les transformations, mais toutes présentent les mêmes défauts. Sur tous ces points on renvoie à la brochure [1].

4.6 Résumé de la méthode

On peut résumer ainsi la procédure d'utilisation des cas d'isométrie :

• L'objectif est de montrer l'égalité de deux longueurs ou de deux angles de la figure.

10. Pour revenir à Francis Blanche, il n'est pas évident de trouver la transformation qui passe de ACE à EBD. L'examen du sens des angles montre que c'est une rotation. On la trouve évidemment comme composée des symétries σ_1 et σ_2 définies ci-après.

• On incorpore[11] ces éléments dans deux triangles qui semblent visuellement "pareils".

• On montre que ces triangles sont isométriques en prouvant que trois de leurs éléments (autres que ceux convoités) sont égaux.

• On conclut.

Cette méthode est très simple et les expériences menées dans les classes de collège montrent que les élèves s'en emparent facilement.

4.7 D'autres exemples

Voici deux autres exemples sur lesquels le lecteur vérifiera l'efficacité de l'utilisation des cas d'isométrie :

Exemple 1 : *Soit ABC un triangle isocèle en A, la médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en D. On porte E tel que $AE = BD$ (voir figure ci-dessous). Montrer que DCE est isocèle en C.*

Exemple 2 : *Soit ABC un triangle. On suppose que les hauteurs BB' et CC' sont égales. Montrer que ABC est isocèle.*

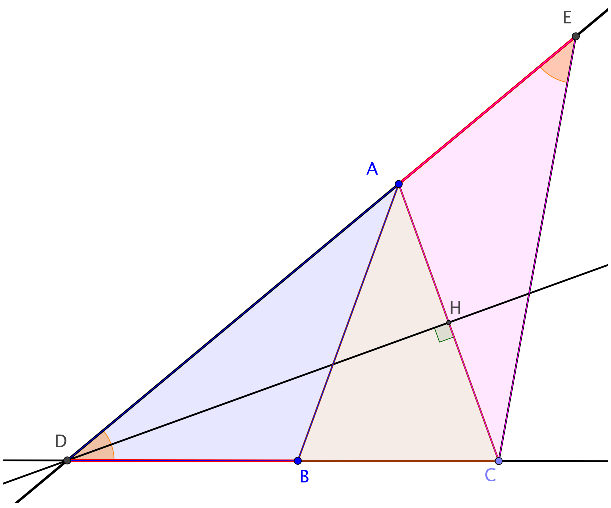

FIGURE 12 – Exemple 1

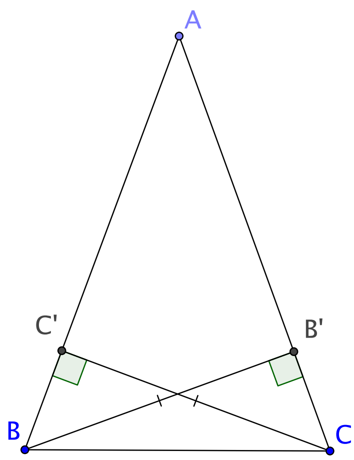

FIGURE 13 – Exemple 2

Nous n'aborderons pas ici les cas de similitude, mais ce qui vient d'être dit se transpose aisément dans ce cadre.

11. C'est le mot-clé.

5 Conclusion

Les arguments énoncés ci-dessus ont servi de perspective au groupe Géométrie de l'IREM de Paris dans l'élaboration de la Brochure [1].

Cette brochure propose une progression pour l'enseignement de la géométrie au collège qui récuse un usage trop précoce des transformations en privilégiant au contraire les points suivants :

- Utilisation des invariants (et notamment des aires).
- Utilisation des cas d'isométrie et de similitude des triangles.

J'espère avoir montré ici en quoi l'usage de ces outils est justifié à la fois par des raisons mathématiques et didactiques.

Références

[1] Groupe géométrie de l'IREM de Paris, *Brochure 100, Enseigner la géométrie au cycle 4*
`http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf`

[2] Duperret Jean-Claude, Perrin Daniel, Richeton Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 472-497, 2001.

[3] Hilbert David, *Les fondements de la géométrie*, Dunod, Paris, 1971.

[4] Kahane Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, Paris, 2002.

[5] Klein Felix, *Le programme d'Erlangen*, Jacques Gabay, Paris, 1974.

[6] Perrin Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations*, Repères IREM, 53 : 91–110, 2003.

[7] Perrin Daniel, *Cours d'algèbre*, Ellipses, Paris, 1996.

[8] Perrin Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini, Paris, 2011.

[9] Perrin Daniel, *Une axiomatique pour la géométrie du collège*, Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), 2050.