Le raisonnement à ε près, emblématique de l'analyse, et instrument indispensable de ses preuves : discours « méta » sur son fonctionnement, raison d'être de la formalisation de la notion de limite

Marc Rogalski

Introduction

Pourquoi le raisonnement à ε près est-il spécifique de l'analyse, et indispensable dès ses premiers résultats ? La raison profonde est que l'analyse se fait dans IR, et qu'un nombre réel est rarement connu autrement que par une suite d'approximations, que ce soit via la définition générale des réels, ou avant même, dans l'histoire comme dans l'enseignement, par le mode de définition ou de construction de nombres réels particuliers, tels π, $\sqrt{2}$, e, …

Dès lors, pour montrer une inégalité ou une égalité entre deux réels x et y *a priori* quelconques, la seule méthode est, en utilisant des suites approximantes, de montrer les deux assertions :

(a) $\forall\ \varepsilon > 0, x \leq y + \varepsilon$;

(b) $\forall\ \varepsilon > 0, |x - y| \leq \varepsilon$.

L'assertion (a) implique l'inégalité $x \leq y$, et l'assertion (b) implique l'égalité $x = y$. Il faut d'ailleurs remarquer que c'est déjà le cas dans l'ensemble **Q** des rationnels (quitte à prendre des ε rationnels, par exemple de la forme 10^{-n}).

Les deux implications ci-dessus sont rarement explicitées dans l'enseignement, ou plutôt elles y sont « naturalisées » : les enseignants pensent implicitement qu'elles sont naturelles et d'ailleurs immédiates pour les étudiants ; de plus il est rare qu'on explique aux étudiants pourquoi le recours à ce type de raisonnement à ε près est nécessaire : dit autrement, aucun discours « méta » n'est tenu à son propos, alors même que pendant le cours les enseignants auront à l'utiliser plusieurs fois.

Il en résulte que lorsqu'on soumet aux étudiants des questionnaires portant, d'une façon ou d'une autre, sur ce qu'on peut déduire des assertions (a) ou (b), les taux d'insuccès sont grands. *A fortiori* ne faut-il pas s'attendre à ce que le raisonnement à ε près soit disponible chez les étudiants, qu'ils pensent spontanément à y avoir recours.

Nous pensons que cette disponibilité doit être l'un des objectifs fondamentaux d'un enseignement d'analyse de première année d'université scientifique. Dans ce qui suit, nous allons examiner divers points de l'analyse élémentaire où ce raisonnement peut être mis en valeur, en regardant en particulier, d'une part **son rapport étroit avec le concept de limite**, et de l'autre **le discours « méta » qu'on peut tenir chaque fois qu'on l'utilise**. Ce type de discours est essentiel pour faire comprendre aux étudiants le **pourquoi** de certains concepts mathématiques (origines, objectifs…), et le **comment** de leurs fonctionnement (types variés de méthodes…), tant dans les cours que dans les problèmes. Ce discours doit être **écrit** chaque fois que possible par l'enseignant, **noté** par les étudiants. Il peut s'accompagner de la mise en œuvre avec ceux-ci de **situations didactiques** propres à les amener à prendre conscience du pourquoi et du comment, et à **élaborer eux-mêmes** une partie du discours « méta ».

I. Premières utilisations, autour de la notion de limite

I.1. L'unicité de la limite

Le premier résultat qu'on donne sur la notion de limite d'une suite $(u_n)_n$ est l'unicité de la limite. Comment montrer que si r et s sont deux limites de cette suite, elles sont égales ? Comme r et s ne sont connues que par les **approximations** qu'en donnent la suite, et non directement (en général), la seule méthode est effectivement de montrer que r et s sont « **arbitrairement proches** », c'est-à-dire vérifient l'assertion (b) (le vocabulaire noté en gras est à introduire à ce moment précis, s'il ne l'a pas été avant, il fait partie des commentaires « méta » à donner aux étudiants, à écrire au tableau et à faire noter par les étudiants). Il faut donc **se donner un $\varepsilon > 0$ arbitraire** (rôle du $\forall$), et montrer l'inégalité **souhaitée** $|r - s| < \varepsilon$. On va donc **approcher à $\varepsilon/2$ près** chacune des limites :

il existe N_1 tel que pour tous les $n \geq N_1$, $|u_n - r| \leq \varepsilon/2$,

et il existe N_2 tel que pour tous les $n \geq N_2$ on ait aussi $|u_n - s| \leq \varepsilon/2$;

alors, par **l'inégalité triangulaire**, $|r - s| \leq |r - u_n| + |u_n - s|$; si $n \geq N := \max(N_1,N_2)$, on a $|r - s| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$: c'est l'assertion (b), car ε a été choisi arbitraire.

Parmi les autres commentaires « méta » à tenir, il y a évidemment à nommer « **la méthode du découpage de ε en deux** », méthode qui resservira souvent. On peut aussi donner sa variante équivalente, en jouant sur le $\forall$ de la définition : partir de deux fois le même ε, et obtenir 2ε à la fin.

On peut aussi remarquer que dans la définition de la limite choisie, **le rôle du « pour tous les $n \geq N$ » a été utilisé de façon essentielle**, et que si on n'avait gardé dans la définition que « pour des n arbitrairement grands » ou « pour une infinité de n », cas de la notion de valeur d'adhérence, on n'aurait pu montrer l'unicité de « la » valeur d'adhérence (faute de trouver nécessairement un n commun vérifiant les deux inégalités à la fois $|u_n - r| \leq \varepsilon/2$ et $|u_n - s| \leq \varepsilon/2$). Nous reviendrons sur ce point plus loin.

Bien entendu, le même argument est à reprendre avec l'unicité des limites de fonctions.

1.2. Le prolongement des inégalités

Il s'agit du résultat qui affirme que si on a pour tout n assez grand $u_n \leq v_n$, et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = v$, alors $u \leq v$.

Là encore, la preuve se fait par un raisonnement à ε près : on écrit

$u - v = u - u_n + u_n - v_n + v_n - v \leq u - u_n + v_n - v \leq |u - u_n| + |v - v_n| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ si $n \geq \max(N_1,N_2)$, comme dans le paragraphe précédent. Là aussi il faut tenir le **discours « méta » sur les raisons de la méthode utilisée** et sur la raison pour laquelle ce résultat ne marche pas pour les valeurs d'adhérence (par exemple avec $(-1)^n \leq (-1)^n + 1/2$).

I.3. La limite avec $\phi(\varepsilon)$

Il s'agit d'étendre la « méthode du 2ε » à un cas plus général. Soit $\phi :]0, \theta[\to]0,+\infty[: \varepsilon \to \phi(\varepsilon)$, la fonction ϕ vérifiant la condition $\lim_{\varepsilon\to 0} \phi(\varepsilon) = 0$. Si on a réussi à prouver que pour tout $\varepsilon \in]0, \theta[$ on a $|u_n - r| \leq \phi(\varepsilon)$ à partir d'un certain rang N, alors $u_n \to r$ (**discours « méta » sur : raisonner avec ε assez petit suffit**).

Voici un exemple classique. On étudie la suite « pseudo-récurrente » définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{[n/(n+1) + u_n]}.$$

L'idée est que le comportement de la suite va être assez analogue à celui de la suite où le terme $n/(n+1)$ est remplacé par sa limite 1, au moins pour n assez grand (**discours « méta » à tenir**). On précise alors ce constat intuitif : pour un $\varepsilon \in]0,1[$ donné on a donc pour un certain N : $1 > n/(n+1) \geq 1 - \varepsilon$ si $n \geq N$. A partir de ce N, on va donc considérer les deux suites récurrentes (plus simples) où le terme variable $n/(n+1)$ est remplacé par $1 - \varepsilon$ et par 1 :

$$v_N = u_N \text{ et si } n \geq N \quad v_{n+1} = \sqrt{[1 - \varepsilon + v_n]} \;;\; w_N = u_N \text{ et si } n \geq N \quad w_{n+1} = \sqrt{[1 + w_n]}.$$

Alors une récurrence simple montre qu'on a pour tout $n \geq N$ $v_n \leq u_n \leq w_n$. Mais on a facilement $\lim_{n\to+\infty} w_n = (1+\sqrt{5})/2$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = (1+\sqrt{[5-4\varepsilon]})/2$ (on a supposé $\varepsilon < 1 < 5/4$; **discours**

« méta » : pourquoi a-t-on pu supposer cela ?). Donc, si $n \geq N_1 \geq N$, on a *à la fois* (il y a là un **autre discours « méta » à tenir** : pourquoi le même N_1 ?)

$$(1+\sqrt{[5-4\varepsilon]})/2 - \varepsilon \leq u_n \leq (1+\sqrt{5})/2 + \varepsilon.$$

Du coup on peut encadrer $u_n - (1+\sqrt{5})/2$:

$\varepsilon \geq u_n - (1+\sqrt{5})/2 \geq -\varepsilon - \left\{(1+\sqrt{5})/2 - (1+\sqrt{[5-4\varepsilon]})/2\right\} = -\varepsilon\left\{1 + 2/(\sqrt{5} + \sqrt{[5-4\varepsilon]})\right\} \geq -\varepsilon\boxed{?}1 + 2/\sqrt{5})$

soit en définitive $|u_n - (1+\sqrt{5})/2| \leq \varepsilon\boxed{?}1 + 2/\sqrt{5})$. On peut donc appliquer la méthode annoncée avec $\phi(\varepsilon) = \varepsilon\boxed{?}1 + 2/\sqrt{5})$ définie sur $]0, 1[$.

Remarquons qu'on a utilisé **une version désalgorithmisée** du « théorème des gendarmes » : si on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = v$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = w$, alors pour $\varepsilon > 0$ donné, on a, si n est suffisamment grand :

$$v - \varepsilon \leq u_n \leq w + \varepsilon.$$

Il faut évidemment développer un discours « méta » à ce sujet : **toujours préférer un énoncé qui réutilise la définition de la limite** à un énoncé « automatique » où on n'a pas à utiliser ce que signifie « limite ».

II. Deuxièmes types d'utilisation avec les premiers résultats de l'analyse

II.1. Monotonie et signe de la dérivée

Supposons qu'on ait montré la

Proposition 1. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et si $\forall x \in I$ on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

On peut alors prouver l'énoncé

Proposition 2. Avec les mêmes hypothèses, si $f' \geq 0$ sur I alors f est croissante (au sens large) sur I.

On montre l'inégalité souhaitée $f(x) \leq f(y)$ si $x < y$ en la montrant à ε près. Soit donc $\varepsilon > 0$ donné, arbitraire, et considérons la fonction définie par $g(x) = f(x) + \varepsilon x$. On a évidemment $g'(x) = f'(x) + \varepsilon \geq \varepsilon > 0$ $\forall x \in I$. Par la proposition 1, si $x < y$, on a donc $g(x) < g(y)$, soit $f(x) + \varepsilon x < f(y) + \varepsilon\boxed{?}$, soit encore $f(x) - f(y) < \varepsilon(y - x)$. Pour x et y donnés (avec $x < y$), ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$. **Une petite explication « méta » pour dire que** ce n'est autre que l'assertion (a), et donc que $f(x) \leq f(y)$.

Commentaire « méta » général : quand on a un énoncé avec inégalité stricte, on passe souvent à l'inégalité large par un raisonnement à ε près. Et **autre commentaire « méta »** , un peu surprenant : il est souvent plus facile de montrer un résultat d'inégalité stricte qu'un résultat d'inégalité large, en particulier **en raisonnant par contraposée**. On le vérifie en montrant la proposition 1 par contraposée.

Supposons qu'il existe $x < y$ dans I tels que $f(x) \geq f(y)$. Si t est le milieu de $[x,y]$, alors, ou bien on a $f(x) \geq f(t)$, ou bien on a $f(t) \geq f(y)$ (sinon…). On note $[a_1,b_1]$ l'intervalle le plus à gauche qui vérifie cette inégalité, et on recommence le même raisonnement avec $[a_1,b_1]$, etc. On fabrique ainsi par récurrence une suite d'intervalles emboîtés $[a_n,b_n]$ vérifiant $b_n - a_n = (y - x)/2^n$ et $f(a_n) \geq f(b_n)$. Alors a_n et b_n tendend vers un point commun c. On peut alors montrer que

$$(*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(f(b_n) - f(a_n)\right)/(b_n - a_n) = f'(c).$$

Comme $f(a_n) \geq f(b_n)$, on déduit que $f'(c) \leq 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Commentaire « méta » : avec l'hypothèse $f' \geq 0$ (et non $f' > 0$) on n'aurait pu conclure à une contradiction.
Reste à prouver (*). Nous laissons la démonstration au lecteur, signalons seulement qu'il faut distinguer deux cas : ou bien a_n ou (exclusif) b_n est égal à c partir d'un certain rang, ou bien $a_n < c < b_n$. Seul ce dernier cas n'est pas tout à fait immédiat. En cas de difficultés, voir l'annexe 1.

II.2. Quand on approche une suite par sa limite à ε près : le théorème de Césaro, le partage d'une somme en deux paquets

Remarquons d'abord que c'est un peu bizarre : d'habitude, l'objectif d'avoir une suite u_n, c'est de disposer d'un moyen d'approcher le nombre réel qui en est la limite. Mais quand on veut prouver un énoncé général portant sur une suite non précisée, supposée convergente, remplacer cette suite à ε près par sa limite peut être efficace (**discours « méta », à rapprocher de ce qui a été fait pour la suite pseudo-récurrente du § I.3.**, où la méthode est utilisée pour une suite particulière : $n/(n+1)$). Voyons sur l'énoncé suivant comment cela peut marcher.

Proposition 3. [Théorème de Césaro] Soit u_n une suite convergeant vers un nombre r. On considère la suite $v_n = (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)/n$ (nommée « moyenne de Césaro » de la suite u_n). Alors v_n converge aussi vers le nombre r.

Preuve. Dans la moyenne, si n est grand, tous les termes sont proches de leur limite r. Précisons cette intuition : si $\varepsilon > 0$ est donné, on écrit pour $n \geq N$: $u_n = r + \varepsilon_n$, avec $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$ (on a donc approché les u_n par r à ε près si $n \geq N$). On a alors

$$v_n = (\textstyle\sum_{1\leq p\leq N-1} u_p)/n + (\varepsilon_N + \varepsilon_{N+1} + \ldots + \varepsilon_n)/n + r\,(n - N + 1)/n.$$

Si M est un majorant de la suite $|u_n|$ (elle est bornée car convergente), le premier terme est majoré en valeur absolue par $M(N-1)/n$, le deuxième par $\varepsilon(n - N + 1)/n$, donc par ε. Si on soustrait alors r des deux membres, on obtient

$$|v_n - r| \leq M(N-1)/n + \varepsilon + (N-1)/n = (M+1)(N-1)/n + \varepsilon.$$

Prenons alors $n \geq N_1 \geq N$, avec N_1 choisi assez grand pour que $(M+1)(N-1)/n \leq \varepsilon$. Pour $n \geq N_1$ on a donc trouvé que $|v_n - r| \leq 2\varepsilon$: c'est la définition de la convergence de la suite v_n vers r (avec 2ε au lieu de ε, voir un **discours « méta »** antérieur). cqfd.

Il y a alors **tout un discours « méta » à tenir sur** : quand une suite s'écrit sous la somme d'une somme d'une suite de n termes $v_{n,p}$ pour $p = 1, 2, \ldots, n$, il est souvent utile, pour deviner sa limite, de **partager la somme en deux paquets**, l'un proche d'un nombre r si n est assez grand, puis de faire n encore plus grand pour que l'autre paquet tende vers 0. Nous allon voir en détail un autre exemple classique sur lequel développer cette méthode.

II.3. Un exemple supplémentaire : deux suites tendant vers la base e de l'exponentielle

En général, selon les choix des cours, on introduit le nombre e, soit comme $\lim_{n\to+\infty} (1+1/n)^n$, ou comme $\sum_{0\leq n<+\infty} 1/(n!)$. En fait, on peut montrer *a priori* que si ces deux limites existent, elles sont égales, grâce au résultat suivant.

Proposition 4. La suite $u_n = (1 + 1/1! + 1/2! + \ldots + 1/n!) - (1 + 1/n)^n$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$.

Démonstration. On a par la formule du binôme $u_n = \sum_{2\leq p\leq n} (1/n!)[1 - n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)/n^p]$. L'idée qui va nous guider est que pour p fixé le crochet tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On prend donc un entier K qu'on choisira plus loin assez grand, mais fixé, et on se donne un $\varepsilon > 0$.

Pour $n \geq N_2 \geq K$, le premier crochet est majoré par $\varepsilon/(K-1)$; pour $n \geq N_3 \geq K$, le deuxième crochet est majoré par $\varepsilon/(K-1)$; … ; pour $n \geq N_K \geq K$, le K-1ème crochet est majoré par $\varepsilon/(K-1)$. Donc pour $n \geq N' = \max(N_2, \ldots, N_K)$, la somme des termes de p = 2 à p = K est majorée par $(K - 1)\varepsilon/(K-1) = \varepsilon$. On a alors la majoration $0 \leq u_n \leq \varepsilon + \sum_{K+1\leq p\leq n} 1/p! \leq \varepsilon + 1/(K.K!)$, car on peut majorer la somme $\sum_{K+1\leq p\leq n} 1/p!$ par le multiple d'une somme d'une série géométrique de raison $1/(K+2)$:

$$\begin{aligned}\sum_{K+1\leq p\leq n} 1/p! &= 1/(K+1)!\,[1 + 1/(K+2) + 1/(K+2)(K+3) + \ldots + 1/(K+1)\ldots n]\\ &< 1/(K+1)!\,[1 + 1/(K+2) + 1/(K+2)^2 + \ldots + 1/(K+2)^{n-K-1}]\\ &< [1/(K+1)!]1/[1-1/(K+2)] = (K+2)/(K+1)(K+1)! \leq 1/(K.K!).\end{aligned}$$

Alors, ε étant donné, il aura suffit de choisir K pour que $1/(K.K!) \leq \varepsilon$ pour obtenir, pour $n \geq N'$, l'encadrement $0 \leq u_n \leq 2\varepsilon$: c'est la convergence de u_n vers 0. cqfd.

Le **discours « méta »** alors à tenir devrait mettre en valeur la méthode consistant à **choisir un K qu'on déterminera plus tard**, en fonction des inégalités à prouver, sufisamment grand mais fixe, et à faire tendre ensuite n vers l'infini, **quitte à faire les calculs dans l'ordre inverse**, comme ici.

Remarque. L'encadrement $1 + 1/1! + 1/2! + \ldots + 1/n! < e < 1 + 1/1! + 1/2! + \ldots + 1/n! + 1/n.n!$ permet de montrer aisément l'irrationalité du nombre e : on suppose que e = p/q, on choisit n = q dans les inégalités précédentes, on multiplie par n! et on en déduit un encadrement impossible d'un entier.

III. Pourquoi approcher à ε près, et pourquoi pour tous les n assez grands ?

Dans la définition de la limite d'une suite, on demande d'approcher la limite r à ε près pour tous les n assez grands (la formulation «… $\forall\varepsilon > 0\ \exists N$ tel que $\forall n \geq N$… ». Pourquoi avoir fait ce choix ? Pourquoi ne pas avoir dit « pour des n arbitrairement grands » ou « pour une infinité de n » (c'est équivalent, et c'est équivalent à « il existe une sous-suite u_{n_p} qui tend vers r quand p tend vers $+\infty$ » : à faire montrer !) ? Comprendre **la raison de ce choix** peut favoriser sa bonne compréhension et permettre aux étudiants de surmonter la difficulté logique de la formulation de la limite, avec ses trois quantificateurs $\forall\varepsilon$, $\exists N$, et $\forall n$.

La première idée, c'est **qu'on cherche à approcher certains nombres réels particuliers intéressants**, tels π, $\sqrt{2}$, e… par des suites de nombres connus, si possible des rationnels. Et alors on cherche à obtenir un ordre d'approximation a priori, en fonction des besoins ; on note ε cet ordre d'approximation, c'est-à-dire qu'on cherche à obtenir un n tel que $|u_n - r| \leq \varepsilon$, si u_n est la suite d'approximations qu'on espère avoir trouvée. Cette préoccupation explique le $\forall\varepsilon$, qui signifie qu'on cherche **des ordres d'approximations arbitrairement petits**.

Ensuite, il est facile de se rendre compte que si on a une suite de **rationnels** u_n qu'on espère approcher un nombre **irrationnel** r, alors pour avoir des approximations de plus en plus fines il faudra nécessairement prendre des n de plus en plus grands (faire faire ce point par les étudiants). Mais ce point ne permet pas encore de trancher entre le choix entre « des entiers n de plus en plus grands » (formulation « … $\forall N\ \exists n \geq N$… ») et « tous les entiers assez grands ». Nous allons dans ce qui suit comparer deux manières d'approcher le nombre $\sqrt{2}$, et comprendre ce qui incite à trancher pour la bonne formulation de la notion de limite. Du point de vue didactique, l'idée serait de **faire faire cette étude aux étudiants avant de leur donner la notion de limite, en utilisant le discours « méta » précédent** pour justifier la définition choisie.

Il s'agirait alors d'une approche de la notion de limite différente de celles suggérées par les diverses ingénieries présentées dans les chapitres précédents, approche ayant pour but de contourner les versions FUG de cette notion, dans la mesure où la définition formelle serait justifiée pour les étudiants.

III.1. L'approximation de √2 par la suite de Héron

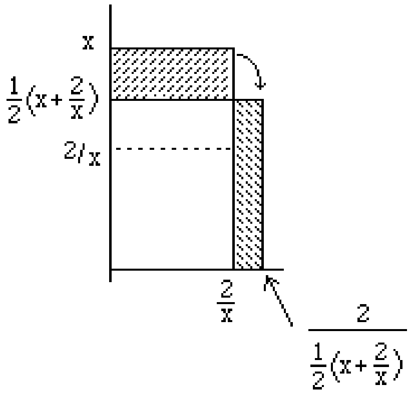
C'est l'occasion de jouer sur le changement de cadres, entre géométrie : diagonale du carré, et algèbre/analyse : résolution de l'équation $x^2 = 2$. Cette dernière peut donner plusieurs preuves classiques de l'irrationalité de √2 (son existence allant de soi au début), mais la preuve géométrique est aussi instructive. On peut mettre en œuvre un algorithme de dichotomie, ou mieux de « décatomie », pour faire apparaître un grand nombre de décimales successives de √2.

Un changement de cadre amène les étudiants à transformer peu à peu un rectangle de base 1 et hauteur 2 en des rectangles successifs de même aire 2 mais se rapprochant de plus en plus d'un carré. L'idée est de transporter la moitié de l'aire en excédent par rapport au carré de côté 1, pour construire un rectangle d'aire 2, de hauteur plus petite que 2 et de base plus grande que 1, donc plus proche d'un carré : un rectangle de hauteur 3/2 et de base 4/3. On peut alors dévoluer aux étudiants le fait de recommencer la même opération sur ce nouveau rectangle, etc, et construire ainsi une suite de rectangles de plus en plus proches d'un carré, et ayant toujours une aire égale à 2. Les étudiants peuvent montrer que la différence entre la hauteur et la base des rectangles diminue "vite".

On renvoie au cadre numérique l'approximation obtenue dans le cadre géométrique, sous la forme d'une suite de nombres rationnels :

$$u_0 = 2,\ u_{n+1} = (1/2)(u_n + 2/u_n).$$

C'est la méthode de Héron pour approcher √2. On peut alors faire évaluer aux étudiants une « vitesse de convergence quadratique » de la suite de Héron, pour qu'ils voient que « le nombre de décimales exactes double à chaque itération » (voir annexe 2).



Ce qu'il faut noter, c'est que l'inégalité $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq 2(0,3)^{2n}$ permet de montrer (voir l'annexe 2) que si on se donne $\varepsilon > 0$, alors **pour tous les $n \geq N$** $:= 1 + E\Big[(1/\ln 2)\ln\big((\ln(\varepsilon/2))/\ln(0,3)\big)\Big]$**,** on a bien $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \varepsilon$. Ce nombre N est ainsi calculable, et pour n'importe quel entier plus grand l'aproximation est au moins aussi bonne. Et la convergence est très rapide.

On va maintenant proposer un autre mode d'approximation de √2 (mais pas par des nombres rationnels).

III.2. Etude de la manière dont on peut approcher √2 par la suite $v_n = 2\cos n$

Il s'agit de se convaincre numériquement que cette suite a la propriété suivante.

Proposition 5. Pour tout $\lambda \in [-2, 2]$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des entiers n aussi grands qu'on veut tels que $|\lambda - 2\cos n| \leq \varepsilon$. C'est en particulier le cas pour $\lambda = \sqrt{2}$.

Pour que les étudiants se convainquent de ce résultat, on peut construire un petit programme *maple* très simple qui permet, pour $x \in [-2, +2]$, $\varepsilon > 0$, N et p dans $\mathbb{N}$, de déterminer les n dans

l'intervalle [N, N+p] tels que 2cos n approche x à ε près. Les étudiants peuvent alors voir, par exemple, que dans la plupart des tranches de 100.000 termes consécutifs on trouve environ 4 ou 5 termes de la suite qui approchent $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près ; et faire un constat analogue pour d'autres nombres λ de [-2, 2], tels $\sqrt{3}$ ou 1.
Voici ce programme :

```
DensCOS := proc (e::numeric, x::numeric, N::integer, p::integer) local i;
for i from N to N+p
        do
            if   is(abs(evalf(e-2*cos(i), 10)) < x)
                 then print(i, evalf(2*cos(i), 10))
            end if
        end do
end proc
```

Il n'y a plus qu'a le particulariser pour des valeurs des paramètres. Par exemple, on trouve :
DensCOS(evalf(√2,10), 10^{-4}, 1000000, 100000);

1015973, 1.414232203
1016683, 1.414146940
1067437, 1.414117446
1068147, 1.414202710
1068857, 1.414287970

ou
DensCOS(evalf(√2, 10), 10^{-4}, 10000000, 100000);

10030715, 1.414178205
10031425, 1.414263465
10082534, 1.414283760
10083244, 1.414198500

ou
DensCOS(evalf(√3,10), 10^{-4}, 1000000, 100000);

1024077, 1.731988301
1024787, 1.732048593
1025497, 1.732108878
1058623, 1.732129730
1059333, 1.732069447
1060043, 1.732009157

ou
DensCOS(evalf(1, 10), 0. 10^{-4}, 1000000, 100000);

1006804, 0.9999059630
1007514, 1.000010388
1076606, 1.000046508
1077316, 0.9999420850

On trouvera dans l'annexe 3 une preuve de la proposition 5.

III.3. Conclusion sur la raison d'être du choix de la formalisation de la notion de limite

Si on compare les deux manières d'approcher $\sqrt{2}$, par la suite de Héron et par la suite 2cos n, on constate plusieurs choses. D'abord, et même si des termes d'indices de plus en plus grands des deux suites approchent arbitrairement $\sqrt{2}$, on n'a dans le deuxième cas aucun moyen de déterminer un n qui approche $\sqrt{2}$ à un ordre d'approximation donné ; de plus, si on en a trouvé un, pour un p nettement plus grand on peut être plus proche d'un autre nombre de [-2, 2] que $\sqrt{2}$, par exemple $\sqrt{3}$ ou 1 ! La suite 2cos n est donc un moyen très malcommode d'approcher $\sqrt{2}$. On choisit donc de formaliser la notion de limite pour avoir les propriétés du type de celles de la suite de Héron : pour un ordre d'approximation donné ε, on est sûr d'y arriver pour tous les entiers n à partir d'un certain rang N.

On peut ainsi espérer que les réflexions suscitées chez les étudiants par l'étude de ces deux suites rendent pour eux **nécessaire et naturelle** la formalisation choisie pour la notion de limite, et leur permettent de mieux comprendre la logique qui y est à l'œuvre.

Annexe 1 : la dérivée bilatérale

Il s'git de montrer le résultat suivant :

Proposition 6. Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle ouvert I, et soient a_n et b_n deux suites de nombres de I vérifiant $a_n < b_n$ et $a_n \uparrow c$, $b_n \downarrow c$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} (f(b_n) - f(a_n))/(b_n - a_n) = f'(c).$$

Preuve. Si $a_n = c$ à partir d'un certain rang, alors $b_n \neq c$ à partir de ce même rang, et le quotient de l'énoncé s'écrit $(f(b_n) - f(c))/(b_n - c)$, dont la limite est f '(c) par définition. Même raisonnement si $b_n = c$ à partir d'un certain rang.

Si aucune de ces circonstances n'a lieu, on a $a_n < c < b_n$ pour tout n. On écrit alors le quotient dont on cherche la limite : $(f(b_n) - f(a_n))/(b_n - a_n)$ comme

$$\big[(f(b_n) - f(c))/(b_n - c)\big] \times (b_n - c)/(b_n - a_n) + \big[(f(c) - f(a_n))/(c - a_n)\big] \times \boxed{?}\boxed{?}\boxed{?}-\boxed{?}a_n)/(b_n - a_n)$$

$$= \big[(f(b_n) - f(c))/(b_n - c)\big] \times \boxed{?}_n + \big[(f(c) - f(a_n))/(c - a_n)\big] \times (1 - t_n),$$

avec $0 < t_n < 1$. On a donc un barycentre de deux nombres tendant tous deux vers f '(c) quand n tend vers $+\infty$. Il n'est alors pas difficile de montrer que ce barycentre tend aussi vers f '(c). cqfd

Remarque. (1) Bien sûr, seule la dérivabilité de f au point c intervient.

(2) Le résultat précédent est faux si a_n et b_n sont *du même coté* du point c. Le contre-exemple classique est la fonction définie par f(0) = 0 et si $x \neq 0$ $f(x) = x^2\sin(1/x)$. Elle est dérivable de dérivée 0 en 0, mais si on pose $a_n = 1/(2n\pi+\pi/2)$ et $b_n = 1/(2n\pi-\pi/2)$, le lecteur vérifiera aisément que $(f(b_n) - f(a_n))/(b_n - a_n)$ tend vers $-4/\pi$ et non 0 quand n tend vers $+\infty$.

Annexe 2 : sur la suite de Héron

On a posé $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = (1/2)(u_n + 2/u_n)$. On a facilement

$$0 < u_{n+1} - \sqrt{2} = (1/2)(u_n + 2/u_n - 2\sqrt{2}) = (u_n - \sqrt{2})^2/2u_n < (u_n - \sqrt{2})^2/2.$$

Comme $u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} < 0{,}6$, une récurrence aisée montre que

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leq (0{,}6)^{2n}/2^{2n-1} = 2(0{,}3)^{2n}.$$

Si on veut alors avoir $u_n - \sqrt{2} \leq \varepsilon$, il suffit donc de majorer $2(0{,}3)^{2n}$ par ε. Il n'y a plus qu'a prendre les logarithmes deux fois pour trouver le N annoncé au § III.1.

De plus, l'inégalité montre que si $u_n - \sqrt{2} < 10^{-p}$, alors $u_{n+1} - \sqrt{2} < 10^{-2p}/2$; autrement dit, dans la plupart des cas, le nombre de décimales exactes obtenues à un rang n double à l'itération suivante.

Remarquons enfin que la différence entre la hauteur et la largeur du rectangle obtenu au rang n + 1, c'est-à-dire $u_{n+1} - 2/u_{n+1}$ vaut $(u_n - 2/u_n)^2/2(u_n + 2/u_n) < (u_n - 2/u_n)^2/2$. Elle décroit avec le même ordre de rapidité que la vitesse de convergence de la suite u_n vers $\sqrt{2}$.

Annexe 3 : sur la suite 2cos n

(1) Soit I ou J l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou T (le cercle unité) ou [a, b], soit $f : I \to J$ continue et surjective, et soit $D \subset I$. Alors si D est dense dans I, f(D) est dense dans J (où « D dense dans X » signifie « tout point de X est limite d'une suite de points de D »).

(2) Soit G un sous-groupe (notion à définir) de $\mathbb{R}$. S'il existe des $g \in G$ positifs et arbitrairement petits, alors G est dense dans $\mathbb{R}$ (pour $0 < g < 1/n$, un x réel est dans l'un des intervalles [kg, (k+1)g], pour un certain $k \in Z$, donc si x_n est ce nombre kg, alors $|x - x_n| \leq g < 1/n$).

(3) Soit α un nombre irrationnel (qu'on peut supposer dans]0, 1[). Alors le sous-groupe $G = \{n+p\alpha \mid n, p \in Z\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (sinon –utiliser la borne inférieure– il existe un minimum g_0 dans l'ensemble $G \cap \mathbb{R}_*^+$, et comme on voit qu'alors $g_0 Z = G$, g_0 serait rationnel, et donc α aussi).

(4) Prenons $\alpha = 2\pi$. Alors $G = \{n+2\pi p \mid n, p \in Z\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to T : x \to e^{ix}$, continue surjective. Alors $f(G) = \{e^{in}e^{2i\pi p} \mid n, p \in Z\} = \{e^{in} \mid n \in Z\}$ est dense dans T.

(5) Mais l'application cos : $T \to [-1, +1]$ est continue surjective, donc $\cos[f(G)] = \{\cos n \mid n \in Z\}$, qui coïncide avec $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$, est dense dans [-1, +1].

(6) Soit $\varepsilon > 0$, N un entier et $A = \{2\cos 0, 2\cos 1, \ldots, 2\cos N\}$. Si $\lambda \in [-2, +2]$, on l'approche à $\varepsilon/2$ près par un $y \notin A$; soit $d > 0$ la distance de y à A ; on approche y par un 2cos n, de sorte que $|y - 2\cos n| \leq \min(\varepsilon/2, d/2)$. Alors nécessairement $n > N$, et $|\lambda - 2\cos n| \leq \varepsilon$.