Atelier « *Logique et ensembles* »

Faut-il le rappeler ? La logique mathématique constitue le fondement de la science informatique. C'est donc sans surprise que nous entendons nos collègues informaticiens, désormais en charge de l'enseignement de leur discipline dès le collège (et peut-être avant dans un proche avenir), mentionner la logique parmi les notions de mathématiques qu'ils jugent importantes pour les élèves en vue de leur propre enseignement. La logique, ce ne sont pas seulement les tables de vérité de ET et OU, loin s'en faut. Une attention particulière y est accordée au langage, c'est-à-dire à la façon de nommer les objets mathématiques et d'exprimer leurs propriétés. Les contraintes de langage sont évidemment cruciales en informatique : la moindre erreur de syntaxe dans un programme entraîne une sanction immédiate, obligeant l'utilisateur à reprendre immédiatement sa copie. Utiliser un langage précis et se conformer à des règles de syntaxe a été longtemps un des volets de l'apprentissage des mathématiques. C'était très net à l'époque des « maths modernes » (décennie 1970-1980), mais cela a continué encore une bonne vingtaine d'années après ce qu'on a pu appeler la « contre-réforme ». Mais depuis bientôt vingt ans, ces préoccupations ont entièrement disparu. Les notions et notations ensemblistes, qui constituaient le ciment des mathématiques, ont été mises de côté, sacrifiées au profit d'une approche « par résolution de problèmes » qui se veut plus pragmatique et plus facilement accessible aux élèves, où l'accent est mis principalement sur l'intuition, et qui autorise toutes sortes d'approximations et de manquements à la rigueur. Or la rigueur, c'est la caractéristique principale de notre discipline. Et ce sont aujourd'hui les informaticiens qui viennent opportunément nous le rappeler !
L'atelier « Logique et ensembles » avait pour but de faire un tour d'horizon des éléments qui nous semblent incontournables dans ces domaines, d'une part pour les professeurs (dont la formation initiale actuelle ignore superbement toute notion sérieuse de logique), d'autre part pour les élèves.

Cela nous amenés à aborder les points suivants :

1. Les notions ensemblistes.
2. Les notions de logique.
3. Quelle place ont actuellement ces différentes notions dans les programmes et dans les manuels ?
4. Des suggestions pour utiliser ces notions dans un enseignement mieux adapté aux besoins de la science informatique... et des mathématiques !
5. Propositions de quelques activités expérimentées ou à expérimenter dans des classes.

À propos des ensembles

- ►►► appartenance et égalité ;
- ►►► inclusion ;
- ►►► sous-ensembles ;
- ►►► définitions des ensembles en extension ou en compréhension ;
- ►►► opérations ensemblistes de base (passage au complémentaire, intersection, réunion) ;
- ► ensemble des parties d'un ensemble ;
- ►► applications d'un ensemble dans un autre ; image, antécédent, image directe et image réciproque d'un sous-ensemble ; injections, surjections, bijections ;
- ► fonction caractéristique d'une partie d'un ensemble ; lien avec le calcul binaire ;
- ► relations binaires, graphes ;
- ► ensembles infinis, ensembles dénombrables ;
- ►►► lien entre opérations ensemblistes et connecteurs logiques ; intervention des quantificateurs ;
- ►► lien entre ensembles et probabilités ;
- ► questions simples de dénombrement ; interprétation ensembliste des coefficients binomiaux.

À propos de la logique

- ►►► les noms d'objets, les variables (en mathématiques !), les propositions ;
- ►►► variables muettes ;
- ►►► les connecteurs logiques ;
- ►►► les quantificateurs ;
- ►►► les problèmes posés par l'implication, par la négation ;
- ►►► les ambiguïtés de la coexistence du langage courant et du langage mathématique ;
- ►► la grande variété des formulations utilisées pour les définitions et les propriétés mathématiques ainsi que pour les énoncés des exercices ;
- ►► les principaux modes de raisonnement utilisés en mathématiques (par l'absurde, par disjonction de cas, par contraposition, par le recours à des contre-exemples, par récurrence...) ; la notion de règle de déduction ;
- ► le lien entre les connecteurs logiques et les instructions de la programmation informatique (instructions conditionnelles, boucles, etc.).

Légende :

- — *En orange, les notions qui n'apparaissent pas du tout dans les programmes. En vert, celles qui y sont évoquées.*
- — *Les chevrons rouges correspondent à des notions qui ne nous semblent pas prioritaires et qui n'ont pas été développées dans l'atelier.*
- — *Les doubles chevrons bleus correspondent à des notions importantes mais qui n'ont pas été développées dans l'atelier, faute de temps.*
- — *Les triples chevrons bleus correspondent aux sujets effectivement abordés.*

Deux façons de définir un ensemble

- **En extension** : on donne la liste de tous les éléments de l'ensemble. Par exemple :
  - $A = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ a\ ,\ x\ ,\ y\ \}$
  - $Y = \{\ -1\ ,1\ ,\ -i\ ,\ iy\}$
- **En compréhension** : on donne une propriété caractéristique des éléments de l'ensemble. Par exemple :
  - $B = \{\ n \in \mathbb{Z}\ \mid\ (\exists u \in \mathbb{Z})(\exists v \in \mathbb{Z})(n = 9u + 6v)\ \}$
  - $Y = \left\{\ z \in \mathbb{C}\ \mid\ z^4 = 1\ \right\}$

Avec des variantes :

- $B = \{\ 0\ ,\ 3\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,\ 12\ ,15\ ,\ \dots\ \}$
- $J = \{\ f(x)\ \mid\ x \in I\ \}$

On remarque qu'il y a deux sortes d'accolades :

- Celles de la définition en extension sont « inoffensives ». Elles n'ont aucun effet sur le statut des variables qui pourraient apparaître dans l'énumération des éléments.

$$A = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ a\ ,\ x\ ,\ y\ \}$$

- Celles de la définition en compréhension, inséparables de la barre verticale, ont la propriété de **rendre muette** la variable qui suit l'accolade ouvrante.

$$Y = \left\{\ z \in \mathbb{C}\ \mid\ z^4 = 1\ \right\}$$

Pour les définitions en compréhension ont adopte donc la forme suivante :

$$\{\_ \in \dots\ \mid\ \dots\dots\}$$

Exemples d'utilisation :

- Équations

$$\left\{x \in \mathbb{R}\ \mid\ 2x^2 - 5x - 3 = 0\ \right\} = \left\{\ -\tfrac{1}{2}\ ,\ 3\ \right\}$$

- Géométrie

  Le cercle de centre O et de rayon 1 : $\{M \in \mathscr{P}\ \mid\ OM = 1\ \}$
  La médiatrice de $[AB]$: $\{M \in \mathscr{P}\ \mid\ MA = MB\ \}$
  L'ellipse de foyers F et F' et d'excentricité e : $\{M \in \mathscr{P}\ \mid\ MF + MF' = e\ \}$

Inclusion - Sous-ensembles - Ensemble des parties

- Insister sur la distinction entre les signes $\in$ et $\subset$.
- Donner la définition de « A **est inclus dans** B ».
  Cela oblige à faire une quantification universelle :

  Pour tout x appartenant à A, x appartient à B.

Correspondance entre opérations ensemblistes et connecteurs logiques —
Liens avec les probabilités

Opération ensembliste	Connecteur logique	En langage probabiliste
Intersection : $\bigcap$	Conjonction : « ET »	« ET »
Réunion : $\bigcup$	Disjonction : « OU »	« OU »
Complémentaire : $\complement$	Négation : « NON »	Événement contraire

Opération ensembliste	Connecteur logique	
$A \cap B$	$\{ x \in E \mid x \in A \text{ ET } x \in B \}$	
$A \cup B$	$\{ x \in E \mid x \in A \text{ OU } x \in B \}$	
$\complement_E A$	$\{ x \in E \mid x \notin A \}$	

On trouve parfois une ligne supplémentaire dans ce tableau :

Opération ensembliste	Connecteur logique	
Intersection : $\bigcap$	Conjonction : « ET »	
Réunion : $\bigcup$	Disjonction : « OU »	
Complémentaire : $\complement$	Négation : « NON »	
Inclusion : $\subset$	**Implication : «** $\Longrightarrow$ **»**	**? ? ?**

Mais cela est tout à fait inopportun : l'inclusion n'y a pas sa place.
Ce n'est pas une **opération** mais une **relation binaire** sur l'ensemble des parties d'un ensemble.

Si l'on devait faire correspondre une opération ensembliste au connecteur « implication », elle devrait associer à deux sous-ensembles A et B de l'ensemble E le sous-ensemble suivant :

$$\{x \in E \mid x \in A \Longrightarrow x \in B\}$$

qui n'est autre que $\{x \in E \mid x \notin A \text{ OU } x \in B\}$, c'est-à-dire l'ensemble $(E \setminus A) \cup B$, réunion du complémentaire de A dans E et de B.
On en conviendra, $(A,B) \mapsto (E \setminus A) \cup B$ ne fait pas partie des opérations ensemblistes les plus courantes !

Il y a néanmoins un lien entre l'inclusion et l'implication, mais il est d'une tout autre nature : quelles que soient les parites A et B de E, on a

$$A \subset B \quad \text{si et seulement si} \quad \forall x \in E \ (x \in A \Longrightarrow x \in B).$$

Opération ensembliste	Connecteur logique	
Intersection : $\bigcap$	Conjonction : « ET »	
Réunion : $\bigcup$	Disjonction : « OU »	
Complémentaire : $\complement$	« NON »	
Inclusion : $\subset$	**Implication : « $\Longrightarrow$ »**	**Inopportun**

On voit donc que la seule façon de compléter le deuxième des tableaux ci-dessus pour faire intervenir l'implication est la suivante :

Opération ensembliste	Connecteur logique	
$A \cap B$	$\{ x \in E \mid x \in A \text{ ET } x \in B \}$	
$A \cup B$	$\{ x \in E \mid x \in A \text{ OU } x \in B \}$	
$\complement_E A$	$\{ x \in E \mid x \notin A \}$	
$(A,B) \mapsto (E \setminus A) \cup B$	$\{x \in E \mid x \in A \Longrightarrow x \in B\}$	

Fonctions

$$\longmapsto$$

La flèche d'application est l'un des symboles les plus importants dans le langage mathématique !
Il a la propriété de rendre muette la variable qui apparaît à sa gauche :

$$x \quad \mapsto \quad \cos^2 x$$

contrairement à la flèche ordinaire $\longrightarrow$, utilisée dans des expressions telles que

$$f : E \longrightarrow F$$

et qui elle, n'a pas la propriété de rendre muettes les variables.

Les notions suivantes ont été mentionnées au cours de l'atelier mais nous n'avons pas eu le temps de les développer :

- Propriétés des applications (injectivité, etc.).
- Fonctions caractéristiques, opérations ensemblistes et calcul modulo 2.
- Combinatoire et dénombrements.
- Cardinalité.

Le mot « *ensemble* » dans les textes officiels

Nous avons recherché les occurrences du mot « ensemble » dans les textes officiels. La synthèse qui suit montre que ce terme est très peu utilisé et quand il l'est, c'est dans la grande majorité des cas dans un sens « non mathématique » : « *l'ensemble du cycle* », « *réussir ensemble* »...

Nous avons écrit ensemble *en vert lorsqu'il apparaît dans son sens mathématique et* ensemble *en rouge dans le cas contraire.*

Dans le programme du cycle 4 :

- Le mot « *ensemble* » a **30 occurrences**.
  - Parmi ces 30, **une seule** dans la section « L'informatique et la programmation », et **une seule** dans la section « Mathématiques ».
  - Dans **aucune** de ces 30 occurrences, le mot n'est utilisé dans son sens mathématique.
  - Exemples :

    « l'*ensemble* des compétences », « l'*ensemble* des disciplines », « réussir *ensemble* », « vivre *ensemble* », « filles et garçons *ensemble* », « *ensembles* géographiques », « l'*ensemble* du cycle »...

Dans le programme de Seconde :

- Le mot « *ensemble* » a **9 occurrences**.
  - Les **cinq** premières sont dans le traditionnel tableau à trois colonnes (*Contenus*, *Capacités attendues*, *Commentaires*) :
    - ▷ **Une seule** dans la colonne *Contenus* :
      - · « Probabilité sur un *ensemble* fini »
    - ▷ **Deux** dans la colonne *Capacités attendues* :
      - · « l'*ensemble* de définition » (2 fois, à propos des fonctions)
    - ▷ **Deux** dans la colonne *Commentaires* (à propos des fonctions) :
      - · « l'*ensemble* de définition »
      - · « exemples de fonctions définies sur un *ensemble* fini ou sur $\mathbf{N}$ »
  - Les **quatre** dernières sont dans la section « Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée) », dans le premier encadré (« Notations mathématiques ») :
    - ▷ « élément d'un *ensemble* »
    - ▷ « sous-*ensemble* »
    - ▷ « *ensembles* de nombres »
    - ▷ « complémentaire d'un *ensemble* »

Dans le programme de Première S :

- Le mot « *ensemble* » a **5 occurrences**.

- **Une** occurrence non mathématique (« *ensemble* des fonctions mobilisables »)
- **Quatre** dans l'encadré « Notations mathématiques » (idem seconde).

Dans le programme de Terminale S :

- Le mot « *ensemble* » a **6 occurrences**.
  - Les **cinq** du programme de Première S
  - Et une occurrence supplémentaire :
    - « nouvel *ensemble* de nombres »
      (à propos des nombres complexes).

Dans les « ressources thématiques pour le collège » :

Nombres décimaux	**0**	
Fractions	**0**	
Nombres relatifs	**6**	« étendre l'*ensemble* des décimaux positifs » « à des *ensembles* plus vastes » « Des maths *ensemble* et pour chacun » (bibliographie)
Puissances	**0**	
Divisibilité et nombres premiers	**1**	« *ensemble* des entiers naturels »
Calcul littéral	**0**	
Traitement des données	**0**	
Probabilités	**0**	
Proportionnalité	**0**	
Fonctions	**1**	« *ensemble* de définition »
Grandeurs et mesures	**0**	
Géométrie dans l'espace	**2**	« l'*ensemble* de ses travaux » « l'*ensemble* des thèmes »
Géométrie plane	**0**	
Algorithmique et programmation	**0**	

Dans les « ressources pour faire la classe en mathématiques au lycée » :

- Les compétences mathématiques au Lycée : **0 occurrence**
- Le calcul sous toutes ses formes : **4 occurrences**
  - « *ensembles* de nombres »
  - « former un *ensemble* structuré et cohérent »
  - « *ensemble* de définition »
  - « L'*ensemble* de ces apprentissages »
- Algorithmique et programmation : **3 occurrences**
  - « un algorithme s'appuie sur un *ensemble* très réduit de constructions »
  - « S'inspirant de l'écriture mathématique d'un *ensemble* en compréhension »

- « un sous-*ensemble* des nombres décimaux »

- Mesure et incertitudes : **9 occurrences**
  - « l'*ensemble* de toutes les observations possibles »
  - « Mesurage : *ensemble* d'opérations ayant pour but de déterminer [...] »
  - « un mesurage va donner un *ensemble* de données »
  - « la distribution de l'*ensemble* des moyennes est bien moins dispersée »
  - « l'*ensemble* des mesures uniques »
  - « elle dépend d'un *ensemble* d'informations »
  - « la distribution de l'*ensemble* des valeurs est normale »
  - « l'*ensemble* des mesures d'une grandeur est associé »
  - « la distribution de l'*ensemble* de ces moyennes est approximativement normale »
- Exercices pour les classes terminales S, ES, STMG, STI2D : $\mathbf{2+9}$ occurrences
  - « On détermine le revenu net imposable qui est par définition l'*ensemble* des revenus perçus annuels (salaires nets, revenus fonciers, financiers, etc.) d'un foyer fiscal auquel on soustrait certains montants que l'on peut déduire comme les pensions alimentaires par exemple. » (2 fois)
  - « l'*ensemble* des compétences mathématiques »
  - « On note $\mathbb{C}$ l'*ensemble* des nombres complexes »
  - « l'*ensemble* des compétences attendues »
  - « un *ensemble* de trois exercices indépendants liés par une problématique commune »
  - « on note S l'*ensemble* des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions : $\mid z-1\mid=\mid z-i\mid$ et $\mid z-3-2i\mid\leqslant 2$ »
  - « l'*ensemble* S est le segment $[AB]$ »
  - « En récupérant l'*ensemble* des relevés »
  - « il faut synthétiser l'*ensemble* du problème »
  - « un *ensemble* de cellules filles appelé tumeur »
- Probabilités et statistique : **8 occurrences**
  - « 40 *ensembles* poulie-pompe »
  - « un échantillon, c'est à dire une fraction ou sous-*ensemble* de cette population »
  - « l'*ensemble* de la population » (3 fois)
  - « *ensemble* des points de coordonnées (x,y) du carré tels que »
  - « un sous-*ensemble* de la population »
  - « (1000) fois avec remise dans l'*ensemble* $\{$'Pile', 'Face'$\}$ (description du logiciel R) »
- Matrices (spécialité S) : **3 occurrences**
  - « modifie la luminosité de l'*ensemble* »
  - « font de l'*ensemble* des matrices carrées d'ordre 2 un cadre assez confortable pour les calculs »
  - « il y a donc des diviseurs de 0 dans l'*ensemble* des matrices carrées d'ordre 2 »

Le constat est clair : les éléments de base du langage et du raisonnement utilisés en mathématiques sont très peu présents dans l'enseignement secondaire. La terminologie et les notations les plus courantes y sont purement et simplement ignorées. Ces notions sont également absentes de la formation des enseignants, à tous les niveaux. Les recommandations officielles insistent lourdement sur le fait que les éléments de logique et les notions ensemblistes ne doivent pas faire l'objet d'un enseignement spécifique, mais apparaître « naturellement » au fil des divers chapitres des programmes. Le résultat est que les enseignants sont doublement mal à l'aise. D'une part ils ne maîtrisent pas bien eux-mêmes les notions élémentaires de logique et le langage ensembliste. D'autre part ils ne savent pas de quelle façon ils pourraient les utiliser dans leur enseignement.

La création d'un enseignement de science informatique à part entière va probablement changer la donne. Nos collègues informaticiens ont en effet besoin pour leur discipline d'un socle de connaissances élémentaires de logique, et d'un langage obéissant à des règles précises et rigoureuses. Ils nous pressent de réintégrer dans nos cours de mathématiques ces éléments essentiels. Gageons qu'ils finiront par être entendus. Mais force est de constater que le chemin risque d'être long ! Si les projets de programmes pour la future réforme du lycée reprennent dans leur exposé des motifs les recommandations du *rapport Villani-Torossian* [1], cela ne semble pas encore se traduire dans les contenus annoncés, et le mot d'ordre demeure : « pas de cours de logique ! ».

1. « Les définitions et propriétés doivent être clairement identifiées ». « La trace écrite doit à la fois respecter les enchaînements logiques, être rigoureuse et précise ». « La notion de preuve est au cœur de l'activité mathématique ». « Redonner [sa] place à la notion de preuve ».

Des activités expérimentées en classe

1. L'énoncé suivant a été proposé à deux classes de Première S du lycée Pierre-Gilles de Gennes à Paris. L'objectif était d'étudier la perception par les élèves de la notion de variable en mathématiques.
Nous avons analysé 47 copies d'élèves.

> *Dans cet exercice, toutes les variables prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.*
>
> On considère la proposition P suivante :
>
> $$a \text{ est une solution de l'équation } x^2+2x-15=0$$
>
> Écrivez une proposition Q équivalente à P (c'est-à-dire vraie chaque fois que P est vraie et fausse chaque fois que P est fausse) telle que la seule variable qui apparaisse dans Q soit a (et donc dans laquelle n'apparaisse ni x ni aucune autre variable différente de a).

Nous avons retenu deux critères principaux : « réponse acceptable ou non » (il y a évidemment là une part de subjectivité) et « utilisation ou non du discriminant ». Ces critères ont été croisés avec les six critères secondaires suivants :

- ▹ Présence de tentatives de justification
- ▹ Présence de tentatives de transformation des expressions
- ▹ La réponse fournie ne fait intervenir que la variable a
- ▹ Présence de l'expression « $a=3$ ou $a=-5$ »
- ▹ Confusion entre proposition et polynôme
- ▹ Présence de l'expression « a est solution de l'équation $a^2+2a-15=0$ »

Voici les principales constatations et remarques qui ressortent des 47 copies analysées.

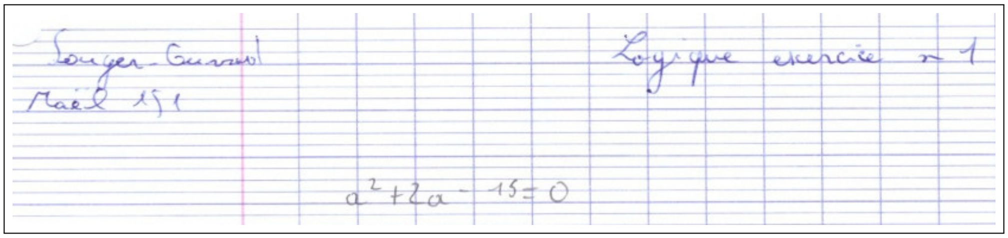
- ▹ Les élèves ont été souvent déroutés par ce type d'activité.
- ▹ La réponse a été jugée acceptable dans 19 copies et inacceptable dans les 28 autres.
- ▹ Sur les 19 réponses acceptables, 13 ne faisaient pas appel au discriminant.
- ▹ Une réponse possible à la question était « $a=-5$ ou $a=3$ ». Or les élèves écrivent souvent « les solutions sont $x=-5$ et $x=3$ » : il y avait donc là une source possible d'erreurs.
- ▹ La présence dans l'énoncé de la phrase « a est solution de l'équation $x^2+2x-15=0$ » était de nature à déclencher chez les élèves le réflexe de se lancer dans la résolution de l'équation sans réfléchir à la question posée.

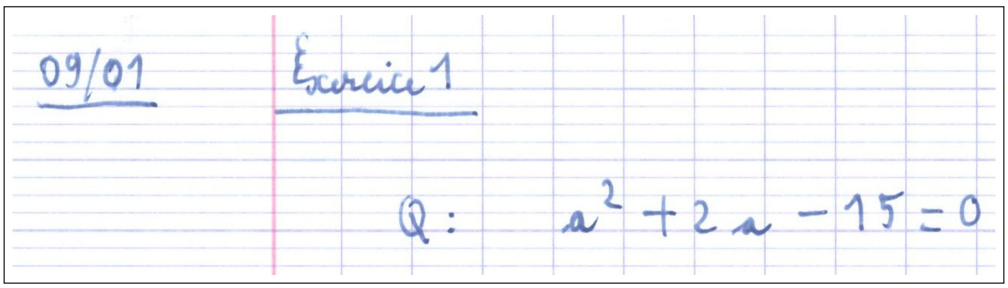
  Cette hypothèse a été confirmée par le fait que sur les 22 copies où le discriminant était utilisé, 6 seulement ont fourni une réponse acceptable.
- ▹ Les notations de l'énoncé étaient visiblement mal choisies : désigner des propositions par P et Q augmentait le risque de confusion entre *proposition* et *polynôme*.

Extraits de copies

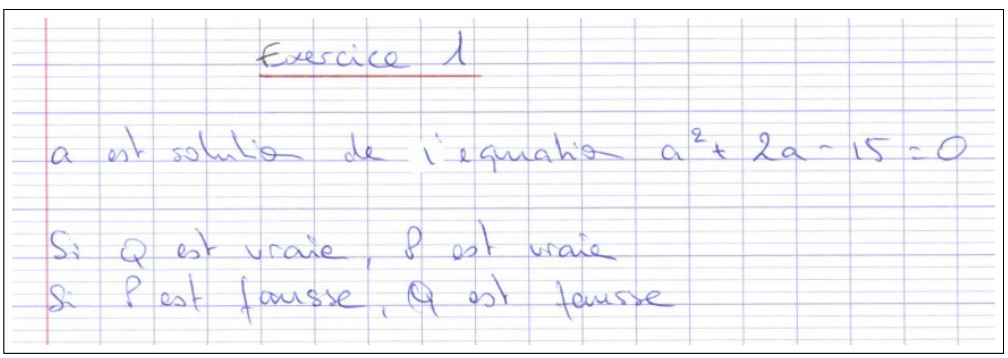
► Réponse acceptable sans utilisation du discriminant : 13 copies (sur 19 acceptables)

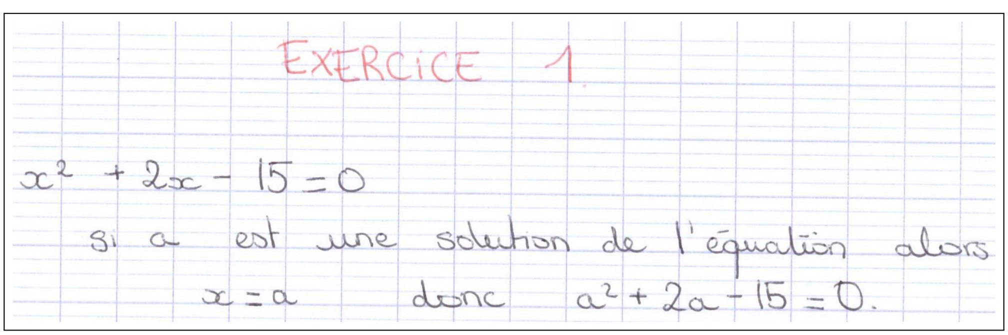
○ *Laconiques...*


Songer-Guerrol
Maël 1S1
Logique exercice n 1
$a^2+2a-15=0$


09/01
Exercice 1
Q : $a^2+2a-15=0$

○ *Avec tentatives de justification*


Exercice 1
a est solution de l'équation $a^2+2a-15=0$
Si Q est vraie, P est vraie
Si P est fausse, Q est fausse


EXERCICE 1
$x^2+2x-15=0$
si a est une solution de l'équation alors
$x=a$ donc $a^2+2a-15=0$.

Exercice 1

$P = 0$ pour $x = a$ $\Longleftrightarrow$ $Q = 0$

Si $P = 0$ alors $Q = 0$

Si $P \neq 0$ alors $Q \neq 0$

Si a est une solution de l'équation $x^2 + 2x - 15 = 0$

alors $a^2 + 2a = 15$ $\rightarrow Q : a^2 + 2a = 15$

Si Q est fausse alors P est fausse

Quand $x = a$, $P = 0$

$x = a \Longleftrightarrow P = 0$

exercice 1. $x^2 + 2x - 15 = 0$

P : a est solution de l'équation $x^2 + 2x - 15 = 0$

Q : $a^2 + 2a - 15 = 0$

P et Q sont ~~éq~~ équivalents puisque si a est solution de $x^2 + 2x - 15 = 0$, alors on peut remplacer x par la valeur a.

○ *Avec tentatives de transformation de l'expression*

Exercice 1

Selon la proposition P, a est une solution de :

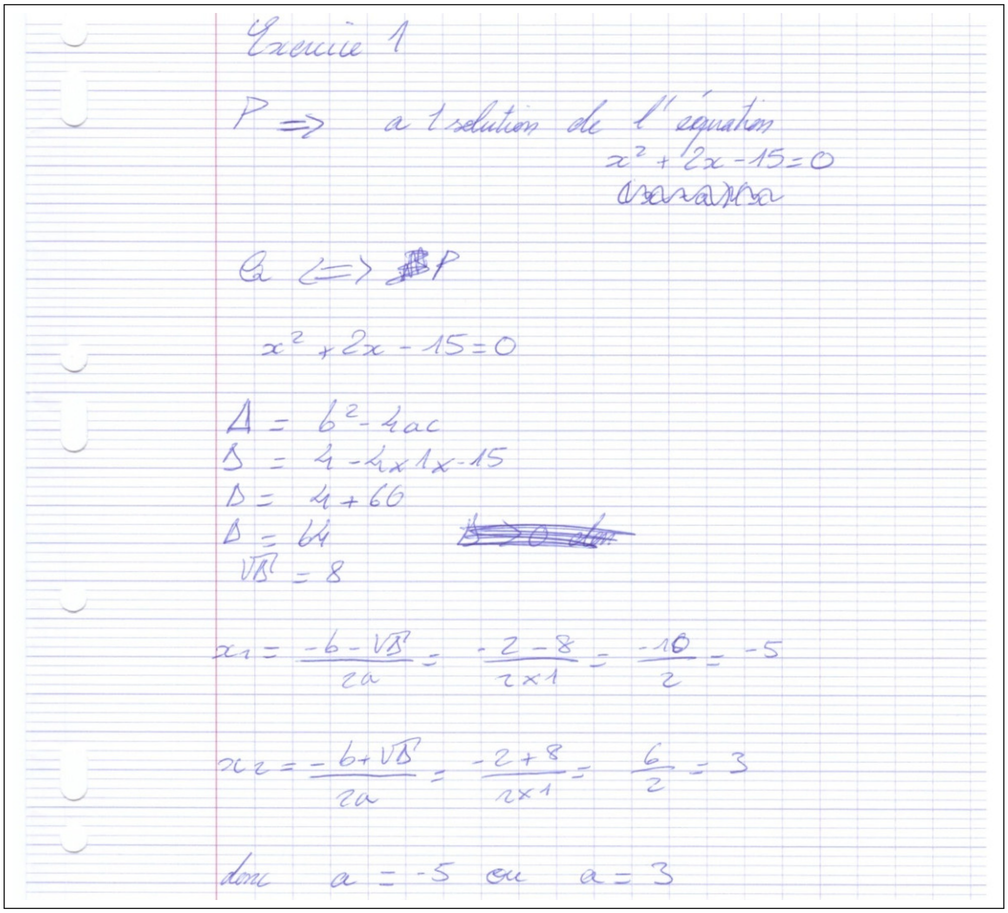
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

On peut donc écrire : $\boxed{a^2 + 2a - 15 = 0}$

Comme $a^2 + 2a - 15 = 0$,

Proposition Q : $2(a^2 + 2a - 15) = 0$

► Réponse acceptable avec utilisation du discriminant : 6 copies (sur 19 acceptables)



Exercice 1

P ⇒ a 1 solution de l'équation $x^2+2x-15=0$

Q ⟺ P

$x^2+2x-15=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = 4-4\times1\times-15$

$\Delta = 4+60$

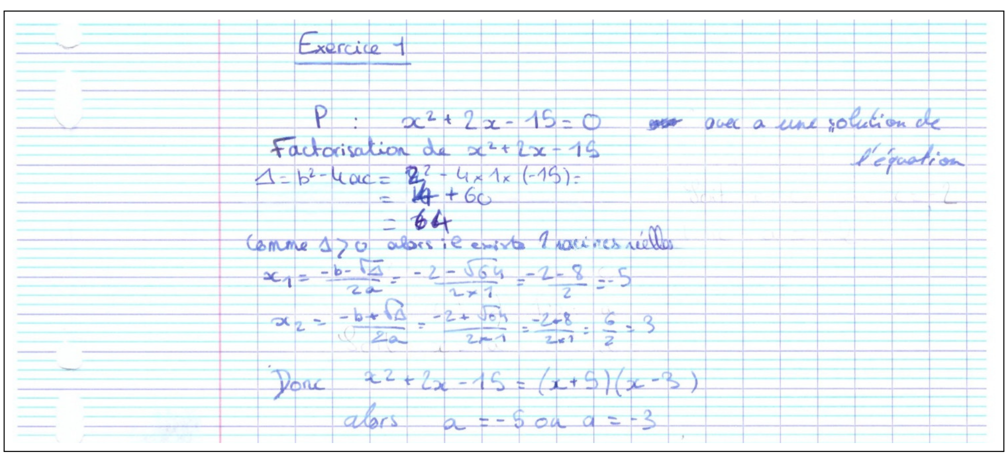
$\Delta = 64$

$\sqrt{\Delta} = 8$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-8}{2\times1} = \frac{-10}{2} = -5$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+8}{2\times1} = \frac{6}{2} = 3$

donc $a=-5$ ou $a=3$



Exercice 1

P : $x^2+2x-15=0$ avec a une solution de l'équation

Factorisation de $x^2+2x-15$

$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\times1\times(-15) = 4+60 = 64$

Comme $\Delta>0$ alors il existe 2 racines réelles

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{64}}{2\times1} = \frac{-2-8}{2} = -5$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{64}}{2\times1} = \frac{-2+8}{2\times1} = \frac{6}{2} = 3$

Donc $x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$

alors $a=-5$ ou $a=-3$

Exercice 1

On a P <=> "a" est une solution de l'équation $x^2 + 2x - 15 = 0$

On utilise le discriminant pour essayer de trouver "a"

$\Delta = b^2 - 4ac$ avec $b = 2$; $a = 1$ et $c = -15$

$\Delta = 2^2 - 4(1 \times (-15))$

$\Delta = 4 - 4(-15)$

$\Delta = 4 + 60$

$\Delta = 64$

Comme le discriminant est >0, il y a 2 racines réelles et l'une d'elle est "a".

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow \frac{-2 - \sqrt{64}}{2} \Leftrightarrow \frac{-2-8}{2} \Leftrightarrow \frac{-10}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -5$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow \frac{-2 + \sqrt{64}}{2} \Leftrightarrow \frac{-2+8}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{2}$

$\Leftrightarrow x_2 = 3$

"a" est soit égal à 3 soit égal à -5

donc "a" $= 3$ ou "a" $= -5$

Exercice 1: $Q = P$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 60 = 64$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-8}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$x^2 + 2x - 15 = 0 = (x+5)(x-3) \Rightarrow x = -5$ ou 3

$\Rightarrow a = -5$ ou 3

proposition Q: $a \in \mathbb{R}$ mais $a = -5$ ou $a = 3$

► Réponse non acceptable, sans utilisation du discriminant : 12 copies (sur 28 non acceptables)

exercice 1

-5 et 3 sont des solutions de l'equation $a^2+2a-15=0$

Exercice n° 1 :

On a P une proposition dans laquelle :

a est une solution de : $x^2+2x-15=0$.

On a alors P équivalent à Q, une proposition dans laquelle :

a est une solution de l'équation : ~~[illegible]~~ $(x+5)(x-3)$

Exercice n°1

$P = a^2 + 2a - 15$

Exercice 1

si $Q \Leftrightarrow P$ alors

On considère la proposition Q suivante :

~~Seulement quelques reels sont solution de l'équation $a^2+2a-15=0$~~

L'ensemble des reels sont solution de l'équation $a^2+2a-15=0$

► Réponse non acceptable, avec utilisation du discriminant : 16 copies (sur 28 non acceptables)

Excercice 1

P : a solution -> $x^2 + 2x - 15 = 0$

<=> pr $x = a$ $x^2 + 2x - 15 = 0$

<=> $a^2 + 2a - 15 = 0$

$Q \approx P$ P vraie <-> Q vraie

Q fausse <-> P fausse

Q : a est une solution d'une équation :

• P vraie : $a^2 + 2a - 15 = 0$

factorisation de $a^2 + 2a - 15$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-15)(1) = 64$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -5$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 3$

<=> $S = \{-5 ; 3\}$

• P fausse : $S =]-\infty ; -5[\cup]-5 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

$a^2 + 2a - 15 = (x+5)(x-3)$

=> Q : a est une solution de $(x+5)(x-3) = 0$

Exercice n°1 :

Proposition Q : On a $x^2+2x-15=0$

$\Delta = 2^2-4\times1\times(-15)$ Comme $\Delta>0$, 2 racines réelles :

$\Delta = 4+60$

$\Delta = 64$

$x_1 = \frac{-2-8}{2} = -5$; $x_2 = \frac{-2+8}{2} = 3$.

$a = -5$ ou 3.

Proposition q : $2a^2+4a-30=0$ et $x^2+2x-15=0$

avec -5

$= 2\times(-5)^2+4\times(-5)-30$ $\quad$ $= (-5)^2+2\times(-5)-15$

$= 50-20-30$ $\quad$ $= 25 \mp 10-15$

$= 0$ $\quad$ $= 0$

Avec 2 : $2a^2+4a-30$ et $= x^2+2x-15$

$= 2\times2^2+4\times2-30$ $\quad$ $= 2^2+2\times2-15$

$= 8+8-30$ $\quad$ $= 4+4-15$

$= -14 \neq 0$ $\quad$ $= -7 \neq 0$

Exercice 1

$\Delta = b^2-4ac$

$= 4-4\times1\times(-15)$

$= 4+64$

$= 64$

Comme $\Delta>0$ il y a deux réels possible

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-8}{2} = \underline{\underline{-5}}$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+8}{2} = \underline{\underline{3}}$

$a = -5$ ou $a = 3$

- On considère la proposition Q

-5 et 3 sont les solution de l'équation

$a^2+2a-15=0$

Ex 1 : $P(x) : x^2+2x-15$ $P(a)=0$

$Q(a) \Leftrightarrow P(x)$

$Q(a) \Leftrightarrow x^2+2x-15$ $\Delta = b^2-4ac = 4+60 = 64$ $\Delta > 0 \Rightarrow x_1$ et x_2

$x_1 = \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-8}{2} = -3$ $x_2 = \frac{10}{2} = 5$

$P(x) > 0 \in]-3;5[$

$P(x) < 0 \in]-\infty;-3[\cup]5;+\infty[$ $a = (-3) \cup (5)$

Comme $Q(a) \Leftrightarrow P(x)$ $Q(a) \in \mathbb{R}$; $> 0 \in]-3;5[$ ~~et $< 0 \in]-\infty;-3[\cup]5;+\infty[$~~.

$Q(a) = 0$ quand $a = 3$ ou $a = -5$

si on écrit l'opposé de cette fonction, les racines sont les mêmes et P est vraie

quand Q est vraie. $x^2+2x-15 \Leftrightarrow -a^2-2a+15$

$P(x) \Leftrightarrow Q(a)$

$3^2+2\times3-15 \Leftrightarrow -3^2-2\times3+15$

$9+6-15 \Leftrightarrow -9-6+15$

$0 \Leftrightarrow 0$

$Q(a) : -a^2-2a+15$

Ex 1

$x^2+2x-15=0$

$\Delta = b^2-4ac = 2^2+4\times1\times15 = 4+60 = 64$

Comme $\Delta > 0$, il y a 2 racines réelles :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{64}}{2\times1} = \frac{-2-8}{2} = -5$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$(x+5)(x-3) = x^2+2x-15 = 0$

$S = \{-5;3\}$

$a=-5$ ou $a=3$

On considère la proposition Q suivante :

b est une solution de l'équation $x^2+2x-15=0$

donc $a=-5$ et $b=3$ ou $a=3$ et $b=-5$

On considère la proposition Q suivante :

a est une solution de l'équation $2x^2+4x-30=0$

$2x^2+4x-30=0$

$\Delta = 16+4\times2\times30 = 16+240 = 256$

2. Un deuxième exercice a été testé en classe. Il porte également sur la notion de variable, mais la question de la négation d'une implication y joue un rôle essentiel. Au cours de l'atelier, faute de temps, nous n'avons pu qu'évoquer cet exercice, dont voici l'énoncé :

Dans cet exercice, toutes les variables prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

On considère la proposition A suivante :

Si x est positif, alors x^2 est supérieur ou égal à x.

1. Écrivez une proposition B qui soit une négation de la proposition A, c'est-à-dire qui soit vraie chaque fois que A est fausse et fausse chaque fois que A est vraie.
2. Pensez-vous que la proposition A est vraie, que la proposition A est fausse, ou que l'on ne peut dire ni qu'elle est vraie, ni qu'elle est fausse ? Justifiez votre choix.
3. On considère la proposition E suivante :

   Pour tout réel x, si x est supérieur ou égal à b, alors x^2 est supérieur ou égal à x.

   (a) Donnez une valeur de b telle que la proposition E soit vraie.

   (b) Déterminez l'ensemble des valeurs de b telles que la proposition E soit vraie.

   (c) Écrivez une proposition F équivalente à E telle que la seule variable qui apparaisse dans F soit b

Une remarque s'impose : sur les 37 copies rendues, il n'y a eu aucune réponse correcte à la première question : la formulation en « si …, alors … » a été systématiquement utilisée pour la négation de la proposition A.

Appelons P la proposition « x est positif » et Q la proposition « x^2 est supérieur ou égal à x ». La proposition A correspondait à « si P, alors Q ».
Les réponses obtenues pour ce qui est de la négation de la proposition A se répartissent comme suit :

« Si P, alors non Q »	14 copies
« Si non P, alors Q »	6 copies
« Si non P, alors non Q »	6 copies
Autres	9 copies
Question 1 non abordée	2 copies

Remarque sur la réponse attendue : la négation de la proposition « P implique Q » est « P et non Q », et donc la réponse « x est positif et x^2 est strictement inférieur à x » aurait été acceptable. Mais, sauf exception rarissime, les personnes un tant soit peu familières des pratiques langagières en mathématiques considéreront qu'il y a dans la proposition A de l'énoncé une quantification universelle impicite, et l'interpréteront donc comme s'il s'agissait de la proposition : « pour tout x, si x est positif, alors x^2 est supérieur ou égal à x ». Cela les conduira notamment à répondre à la deuxième question que A est fausse, alors qu'il y a des valeurs de x pour lesquelles elle est vraie : par exemple, attribuer à x n'importe quelle valeur réelle strictement négative rend la prémisse de l'implication fausse, et par conséquent l'implication elle-même vraie. Avec cette interprétation, la négation de A serait donc : « il existe au moins un réel x tel que x est positif et x^2 est strictement inférieur à x ».

Remarque sur la question 3 : cette question n'a pratiquement été abordée par aucun élève. Pour la sous-question (a), on aurait pu s'attendre à ce que quelques élèves proposent la valeur $b = 1$. Mais la manière de poser la question était sans doute inhabituelle, donc déroutante. C'est une chose de savoir que, lorsque x est plus grand que 1, x^2 est plus grand que x, c'en est une autre de mettre cette connaissance en relation avec la question posée ici. Une bonne façon d'aborder la sous-question (b) était de partir justement de cette propriété (« lorsque x est plus grand que 1, x^2 est plus grand que x ») et de se demander si elle pouvait subsister si l'on y remplaçait le nombre 1 par un autre nombre réel. Il n'est pas très difficile de se convaincre que n'importe quel nombre supérieur à 1 convient (si b est plus grand que 1, et si x est plus grand que b, alors x est plus grand que 1, et par conséquent x^2 est plus grand que x). Cela montre que, dans l'ensemble des valeurs cherché, il y a au moins tous les nombres réels supérieurs ou égaux à 1. En fait, il n'y en a pas d'autres, et cela est un peu plus délicat à prouver. Il s'agit, étant donné un nombre $b < 1$ (inégalité stricte), de trouver une valeur de x qui mette en défaut l'implication, c'est-à-dire qui soit telle que $x \geqslant b$ et $x^2 < x$. Il suffit pour cela de donner à x une valeur qui soit à la fois supérieure à b et strictement inférieure à 1. Cela est toujours possible : si $b < 0$, on prend par exemple $x = \frac{1}{2}$, si $0 \leqslant b < 1$, on prend par exemple $x = (1+b)/2$. L'ensemble cherché était donc l'intervalle réel $[0, +\infty[$. Et on obtenait ainsi facilement une réponse à la sous-question (c) : la proposition E est équivalente à $b \geqslant 1$.

Rajout sur questions 2 et 3 à faire.

Conclusion en attente : Le salut par les maths discrètes et l'informatique ?