L'autonomie d'une batterie peut-elle être négative? (suite)

Michel FRECHET

Figurant déjà, sous le même titre dans ce débat, le petit texte, que j'avais voulu volontairement court, n'a, me semble-t-il, pas été compris. Aussi, je voudrais ici préciser ma pensée.

N'ayant côtoyé que de très loin les probabilités durant mon cursus scolaire et universitaire, j'ai dû me pencher sérieusement sur la question afin de pouvoir enseigner les lois normales. J'ai d'ailleurs eu, à ce sujet, de nombreux échanges avec l'un des concepteurs des programmes.

J'ai demandé l'aide de collègues. Toutes les réponses que j'ai obtenues alors, ont été : « *Pourquoi t'embêtes-tu ? Il suffit que les élèves donnent le résultat de leur calculatrice* ! »

Comme vous le savez, au lycée, le baccalauréat « pilote » notre enseignement. Aussi, après m'être penché sur l'aspect théorique de la loi normale, j'ai regardé les exercices du baccalauréat concernant cette notion, ainsi que leurs corrections données par des professeurs (sur le site de l'APMEP, par exemple (*mea culpa*)). J'ai trouvé cela affligeant.

Enfin, je sais que l'on fait de la modélisation lorsque l'on utilise la loi normale, pour des grandeurs notamment et je ne remets pas en cause la pertinence de l'utilisation de ce modèle. Et mon intervention n'est pas due à une ignorance de ce fait. Lorsque j'ai parlé de « *crime contre l'esprit* » géométrique dans mon premier courriel, je visais surtout la rédaction des énoncés de baccalauréat sur les lois normales, rédaction qui amène à des absurdités, comme je l'ai montré.

Exemples de sujets de S en 2013

Il y a deux ans, j'avais une terminale S, j'ai donc étudié les sujets de cette série. En voici un, qui donne des tables qui n'existent que pour cet exercice !

Liban S, 28 mai 2013

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que X **suit** la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.

   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.
   On suppose que Y **suit** la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.
   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à $0,99$.
   Soit Z la variable aléatoire définie par :
$$Z = \frac{Y - m_2}{\sigma_2}$$
   a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?
   b) Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16\,;\,0,18]$.
   c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

Échanges avec un des concepteurs des programmes

Questions

Je me pose beaucoup de questions sur le programme et aussi, mais cela va ensemble, sur les sujets de bac et les résultats attendus des élèves.

Notamment ces deux là :

- Pourquoi donner systématiquement des tables (bidons à mon avis) plutôt que de les faire travailler sur les intégrales ?
- Pourquoi leur demander de connaître 3 valeurs ?

Il ont appris durant l'année à travailler avec les intégrales et ils savent se servir d'une calculatrice pour calculer ces intégrales.

Si on doit absolument les faire travailler avec une table, pourquoi pas celle de la fonction de répartition de la loi normale standard uniquement ?

Réponses

Tes questions sont légitimes.

Les sujets 2013 n'étaient pas à mon avis très pertinents...

La commission Inter – Irem devait d'ailleurs publier une analyse critique de ces sujets.

Ce que je propose

Liban, 28 mai 2013, correction en utilisant la loi de densité de la loi normale centrée réduite

$$p(0,16 \leqslant X \leqslant 0,18) = \underbrace{p\left(\frac{0,16-0,17}{0,006} < \frac{X-m_1}{\sigma_1} < \frac{0,18-0,17}{0,006}\right)}_{\text{on centre}} = p\left(-\frac{1}{0,6} < Z < \frac{1}{0,6}\right) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{1}{0,6}}^{\frac{1}{0,6}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx}_{\text{loi de densité normale}} \simeq \underbrace{0,9044}_{\text{Calculatrice}}$$

On calcule ici l'intégrale à la calculatrice. Pas besoin ici de tableau !

En terminales ES

Cette année, j'enseigne en Terminale ES. Lors de la correction d'un exercice sur la loi normale, un élève m'a interpellé :

« *Tous les exercices que vous nous proposez (annales du bac) parlent de quantités positives. La probabilité d'avoir une valeur négative est donc nulle ? Or, on voit que non.* »

Question légitime, n'est-ce pas ?

Autre question tout aussi légitime : lorsqu'un énoncé dit qu'une variable aléatoire positive X **suit** une loi normale, comment répondre à la question : donner la probabilité pour que X soit inférieur à 250 ?

$$p(0 \leqslant \text{X} \leqslant 250) \quad \text{ou} \quad p(\text{X} \leqslant 250)?$$

J'explique alors à ma classe qu'en fait on approxime la loi de probabilité de la variable aléatoire par une loi normale ; de plus, la calculatrice donne $p(\text{X} < 0) = 0$. Tous les exercices faits en classe jusque là donnaient comme espérance un nombre plus grand que 200 et dans ce cas, les premiers chiffres non nuls se trouvent *très loin* et donc ne sont pas pris en compte par la calculatrice, ce qui a rassuré mes élèves quant à la notion d'approximation.

Néanmoins, et c'est cela qui m'a poussé à vous envoyer le premier texte, au lieu d'écrire :

L'autonomie de la batterie [...] **suit** une loi normale [...]

Ne devrait-on pas dire :

L'autonomie de la batterie [...] **peut être modélisée par** une loi normale [...] (comme c'est heureusement le cas dans plusieurs sujets)

De plus, ici l'espérance est un nombre assez petit $\mu = 8$ et la calculatrice ne donne plus zéro :

$$p(\text{X} < 0) = 0,00003167$$

Questions

Les concepteurs des sujets de baccalauréats (professeurs, inspecteurs) devraient être plus attentifs quant à la rédaction des sujets. Le baccalauréat, comme je l'ai dit plus haut, pilote l'enseignement (qu'on le veuille ou non) des classes de terminales. Comment donc expliquer aux élèves la modélisation, la notion d'approximation si les énoncés affirment péremptoirement qu'une variable aléatoire positive suit une loi normale ?

C'était le sens de mon intervention : comment un énoncé mal conçu peut amener à des résultats faux !

D'autre part, l'intégration est une partie importante du programme en S et en ES. Pourquoi alors ne pas s'en servir pour calculer une probabilité, comme je l'ai montré plus haut ?

Pourquoi donner comme question au bac : « **À l'aide de la calculatrice**, calculer $\text{P}(256 \leqslant \text{X} \leqslant 635)$?

Si l'on veut enseigner correctement la notion de modèles, en montrer l'utilité et la force, pourquoi donner des exercices aussi indigents, où seules comptent la lecture d'un tableau (*bidon*) ou la dextérité avec laquelle on manipule une calculatrice pour calculer directement la probabilité ?