Quelques remarques sur l'article de Daniel Perrin paru dans le n° 6(1) de *Statistique et Enseignement*

Michel Henry, IREM de Besançon, CII Statistique et probabilités

Le bel article *Remarques sur l'enseignement des probabilités et de la statistique au Lycée* que Daniel Perrin a publié dans le n° 6(1) de *Statistique et Enseignement* m'a particulièrement intéressé. Je dois dire que je partage presque toutes les appréciations que Daniel Perrin avance, relativement à certains dérapages dans les évolutions des programmes d'enseignement des probabilités et de la statistique au lycée. Du point de vue mathématique, cet article présente rigoureusement les conséquences du choix d'introduire les intervalles de fluctuation, de la Seconde à la Terminale, et les intervalles de confiance en Terminale, dans un contexte d'approximation de lois binomiales par des lois normales correspondantes. Les calculs que Daniel Perrin a si bien conduits sont précieux. Loin d'être « *très ignorant en probabilités et statistique* » l'auteur montre qu'il a bien maîtrisé ces questions délicates. Du point de vue probabiliste, je voudrais apporter quelques nuances aux propos de Daniel.

Son introduction a réveillé en moi de vieux souvenirs. Mon choix en 1963 de l'option *probabilités* pour la licence de mathématiques m'avait été vertement reproché par les autorités de mon École. Cette hostilité avait été confirmée lors d'une conférence mémorable en 1968 donnée à l'IHP par le plus prestigieux des mathématiciens bourbakistes, plaçant les probabilités dans « le fumier ». Cet opprobre ne résista pas aux nécessaires évolutions de l'enseignement secondaire, et je fus à l'origine en 1990 de la création de la commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*. Nous avions alors accueilli très favorablement la réforme du programme de Première de 1991 qui, dans le chapitre probabilités, indiquait :
« *Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois* »[1].
Cette orientation tout-à-fait nouvelle, tranchait avec les calculs classiques de combinatoire et permettait de relier cet enseignement aux observations statistiques.

La réforme des programmes des années 2000 franchissait une nouvelle étape en introduisant le point de vue de la modélisation dans l'enseignement secondaire, tout en se démarquant de l'approche fréquentiste précédente. Ces programmes réalisaient un pas didactique décisif dans l'enseignement de la statistique et des probabilités. La commission les avait aussi favorablement accueillis, adoptant dans l'ensemble une position de critique constructive sur les plans épistémologique et didactique, tout en exprimant son soutien à la démarche de fond, en réponse aux premières résistances des professeurs de lycée. Par la suite, nous avions émis des doutes sur la pertinence didactique de la notion d'intervalle de fluctuation, considérant que cette notion, peu employée dans la pratique des statisticiens, apparaissait plus comme une création de transposition didactique que comme un outil de résolution de problèmes. Son exploitation pédagogique suppose en effet la mise en œuvre massive de simulations informatiques pour tester la proximité des fréquences obtenues avec une probabilité donnée, selon une définition variable de la Seconde à la Terminale.

---

[1] Sur l'évolution des programmes de l'enseignement secondaire, on pourra consulter l'article *Évolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités* paru dans *Statistique et Enseignement* n°1, vol 1, 2010. http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/StatEns/article/view/4

Comme Daniel Perrin le souligne, rejoignant d'autres publications[2], la recherche d'une formulation simple en Seconde pour l'approximation de tels intervalles conduit à une affirmation fausse dans sa généralité. Il se trouve que cette simplification passe par l'approximation normale de la loi binomiale et ce passage du discret au continu est à la source de phénomènes apparemment bizarres (mais mathématiquement bien explicables) qui font qu'une probabilité réputée supérieure à 0,95, seuil standard de confiance, peut se trouver en fait plus proche de 0,93 pour des valeurs de n et p bien particulières. Daniel Perrin, par des calculs précis et inattaquables, met ce phénomène en évidence et regrette que le programme puisse ainsi « *tromper sur la marchandise* ».

Naïvement, on pourrait suggérer de résoudre cette difficulté en prenant pour seuil de confiance 0,93 au lieu de 0,95. Après tout, ces deux probabilités sont très voisines et leur écart n'a pas grande signification. En fait il n'en a pas du tout, tant que l'on ne précise pas les conditions qui conduisent au choix de ce seuil de confiance. Car elles tiennent aux coûts correspondant aux décisions que l'on est amené à prendre à la suite d'un tel test statistique. Il y a alors deux sortes de mauvaises décisions, suite aux conclusions risquées du test, dites de première et seconde espèce[3]. L'optimisation de ces deux risques antagonistes conduit alors à un choix raisonné du seuil de confiance. Il n'est bien sûr pas question d'aborder ces subtilités dans l'enseignement secondaire. Je voudrais seulement suggérer que si Daniel Perrin a raison sur le plan mathématique et pédagogique, sa critique est mineure sur celui de la statistique.

Mais, pour me faire pardonner, je voudrais dire que je partage entièrement ses conclusions et propositions. Je trouve aussi que l'enseignement de la géométrie est essentiel (et source de plaisirs) pour la formation des citoyens, autant que celui de la statistique, notamment pour la pratique du raisonnement déductif qu'il suppose (ou supposait !). Il en est de même de celui de l'analyse. Par exemple, la notion de dérivée est à la base de toute compréhension des évolutions des systèmes naturels. Et l'arithmétique, discrètement omniprésente ? L'enseignement de la statistique ne doit donc pas être mis en concurrence avec les autres domaines de connaissances mathématiques, bien au contraire. La commission inter-IREM ne s'inscrit donc pas dans cette perspective et réfute toute idée de lobbying. Il convient donc de regarder sereinement où le bât blesse.

La formule $[p-\frac{1}{\sqrt{n}}, p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ est belle, certes. Son intérêt est surtout dans la mise en évidence du $1/\sqrt{n}$ comme écart de confiance, comme le souligne Daniel Perrin. Mais cet intérêt ne se limite pas à l'application du théorème de Moivre Laplace et au recours à l'approximation normale. Comme Daniel, je pense que la loi faible des grands nombres est beaucoup plus importante à comprendre à ce niveau, elle permet de comprendre l'importance du $1/\sqrt{n}$. Le théorème de Bernoulli, dont un énoncé correct serait préférable à une formulation « vulgarisée », peut facilement être démontré à l'intention des professeurs en quelques lignes à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

---

[2] Cerclé Véronique, *Quelques interrogations du professeur de Lycée autour des intervalles de fluctuation*, Repères-IREM n° 91, avril 2013, p. 51-69.
Ducel, Y. & Saussereau, B., *La prise de décision de la Seconde à la Première,* Repères-IREM n° 85, octobre 2011, p. 31-49. http://www.univ-irem.fr/spipbd13.html?article=71&id_numero=94&id_article_reperes=627

[3] Voir pour ces notions l'article de Ducel et al. *Calcul de risques de première et de seconde espèces à travers un exemple*, Repères-IREM, n° 94, janvier 2014, p. 46-70.
http://www.univ-irem.fr/spipbd13.html?article=71&id_numero=94&id_article_reperes=627

La belle formule de l'intervalle de fluctuation (si cette notion doit être conservée[4]) peut être donnée « *avec une probabilité voisine de 0,95* », sans justification par l'approximation normale. Du coup, ni le théorème de Moivre-Laplace, ni la loi normale n'ont de pertinence dans ces programmes de proba-stat, déjà assez chargés. De plus l'approximation normale se concevait à l'époque où l'on calculait des probabilités avec des tables de valeurs numériques (heureux temps pour les étudiants !), mais complètement dépassée avec nos logiciels performants actuels qui donnent pour la loi binomiale des valeurs précises largement suffisantes. Sur ce point, Daniel Perrin a 1000 fois raison.

Bien qu'ayant eu à l'enseigner (au niveau bac+3), je me suis toujours demandé pourquoi insister sur les conditions de taille des échantillons et de valeurs des probabilités que l'on trouve sous des formes variables dans les manuels pour appliquer une approximation normale : $n > 25$ ou 30 ou 50, $0,2 < p < 0,8$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$, etc. quand dans les applications, notamment pour les sondages, n est toujours grand, plutôt voisin de 1000, si l'on veut des résultats intéressants.

J'ai toujours pensé que l'enseignement du calcul des probabilités, après les notions élémentaires de la logique des événements, peut être structuré par la présentation des lois de base, comme modèles théoriques de situations types. Je rejoins Daniel Perrin pour que, de la Seconde à la Terminale, les lois discrètes soient étudiées en priorité. La loi uniforme discrète pour enchaîner avec l'initiation de la classe de Troisième et retrouver l'équiprobabilité comme cas particulier, puis la loi de Bernoulli illustrée par l'urne du même nom. La loi binomiale comme épreuves de Bernoulli répétées, puis la loi hypergéométrique. Enfin la loi géométrique tronquée pour rester dans le domaine discret fini. Mais j'ai une petite divergence avec Daniel Perrin, car il me semble important et à la portée des élèves de Terminale d'aborder la loi uniforme continue sur un intervalle, et même sur un domaine plan. Car du point de vue culturel, mais aussi didactique, il est nécessaire à ce niveau de montrer les limites de la définition classique de la probabilité en termes de cas. La nécessité d'une théorie probabiliste plus générale peut alors apparaître, sans aller vers une présentation abstraite à la Kolmogorov. Une illustration historique simple et riche est très accessible avec le jeu du franc-carreau de Buffon, voir aussi avec son problème de l'aiguille qui peut être traité au niveau terminale sans grande difficulté, tout en mettant en évidence l'importance de la notion de modèle. Concernant la loi de Poisson qui s'applique à un ensemble infini dénombrable d'événements, je pense qu'il est préférable de l'étudier en post-bac, conjointement avec la loi exponentielle des temps d'attente d'événement « rares ». Son introduction en Terminale alourdirait notablement le programme.

À Besançon, le 8 mai 2015

[4] Si j'avais (encore) quelques mots à dire sur les programmes de l'enseignement secondaire, je serais pour supprimer cette notion et donner toute son importance à celle d'intervalle de confiance dans une présentation simple de la pratique de l'estimation sur échantillons et du principe des sondages.