Quelques remarques de la Commission Inter Irem Géométrie sur le projet de programme de seconde.

Introduction

Bien que la réforme de la classe de seconde ait été reportée les élèves qui sont aujourd'hui en troisième et qui n'ont pas reçu le même enseignement que leurs aînés ne pourront pas suivre le programme de seconde tel qu'il est rédigé actuellement. Nous comprenons donc la nécessité et l'urgence d'opérer des modifications au programme actuel. En revanche nous comprenons mal pourquoi le programme semble rédigé de façon modulaire alors que les modules ont disparu.

Nous pointons dans ce texte quelques propositions qui nous paraissent impérieuses. Certes une analyse plus générale du rôle que devrait tenir la géométrie au Lycée et ses articulations avec son enseignement au Collège reste à faire mais le texte de Rudolf Bkouche sur l'enseignement de la géométrie offre déjà un point de départ (http://www.univ-irem.fr/spip.php?article187).

Nous relevons d'abord trois points qui ont été oubliés.

Trigonométrie. Cercle trigonométrique. Angles.

Traditionnellement les lignes trigonométriques étaient introduites en classe de troisième à partir des rapports des côtés du triangle rectangle. En seconde l'extension des angles géométriques aux angles orientés (ou aux arcs du cercle trigonométrique) élargissait utilement le champ des fonctions trigonométriques et montrait un passage des grandeurs aux grandeurs orientées et par conséquent des mesures aux mesures algébriques.

Ceci ouvrait aussi la voie au calcul trigonométrique, c'est-à-dire à la recherche des relations qu'entretiennent ces fonctions indépendamment du contexte géométrique qui les a engendrées. On sait que l'apprentissage de ce calcul est plus difficile que celui de l'algèbre des polynômes par exemple, et les élèves auraient besoin, pour bien le maîtriser d'un approfondissement sur plusieurs années.

L'utilisation de logiciels de calcul formel, on s'en aperçoit vite lorsque l'on a travaillé ce sujet en classe, n'est pas d'un grand secours pour l'apprentissage. En effet les algorithmes implémentés dans les logiciels sont par nature systématiques, alors que de nombreuses situations demandent des initiatives de type opportuniste. Par exemple dans une somme de trois termes il peut être judicieux de développer le premier et de linéariser le troisième. Certes on peut très bien commander au logiciel d'opérer selon ces vœux mais comment un élève pourrait-il trouver la solution par une analyse préalable s'il ne connaît pas déjà le calcul trigonométrique ?

En croyant pouvoir se passer, grâce aux calculateurs modernes, du calcul trigonométrique on fait donc une erreur proche de celle qui consisterait à remplacer la trigonométrie par le calcul sur les nombres complexes. Mais au moins les nombres complexes auraient-ils l'avantage de conserver l'aspect géométrique de la trigonométrie…

Certes toute formule de trigonométrie s'interprète (et parfois fort agréablement) avec des nombres complexes, mais la substitution systématique par l'exponentielle complexe compliquerait beaucoup de situations très simples. *A contrario* l'enseignement des complexes à des élèves qui connaissent déjà une partie du calcul trigonométrique leur offre un second éclairage, et donc un approfondissement. Il en irait de même avec les dits logiciels.

Le déclin de la trigonométrie est déjà bien avancé et l'on en constate les ravages (en analyse de Fourier ou en Physique par exemple). Retarder d'un an (voire plus) l'acquisition des premiers rudiments ne peut être bon. Il faudrait que l'enseignement de la trigonométrie s'étende de la troisième (les lignes trigonométriques définies dans le triangle rectangle) jusqu'en terminale en liaison avec le calcul vectoriel et les nombres complexes.

Calcul vectoriel.

La question du calcul vectoriel se posait puisqu'il avait disparu de la classe de troisième. Elle semble avoir été réglée de façon très radicale par sa suppression en seconde.
Comme nous ne pouvons imaginé que ce calcul si important pour la physique, la mécanique, les sciences de l'ingénieur ne puisse être complètement abandonné dans la formation des futurs bacheliers scientifiques, son enseignement sera sans doute reporté en Terminale ou en Première dans un module ou une section scientifiques. Faut-il rappeler que le calcul vectoriel a été une des grandes innovations de l'enseignement de la géométrie au XX^{ème} siècle ? C'est un instrument remarquable pour la géométrie et les sciences physiques et on ne comprend pas sa suppression en classe de seconde.

Nous ne voulons pas trancher ici, *ex abrupto*, de ce qui doit ou de ce qui ne doit pas faire partie d'un tronc commun, c'est-à-dire d'une culture commune mathématique pour les élèves d'une seconde générale. En revanche nous pensons que l'enseignement des concepts scientifiques nécessite du temps. La présence d'un concept à plusieurs niveaux du cycle de formation permet aux élèves parmi lesquels très peu accèdent au sens et à la maîtrise du premier coup, de revenir sur la notion, de l'enrichir d'aspect nouveaux et de tisser de nouvelles relations avec ce qui a été vu entre temps (en mathématiques ou dans d'autres matières).
Le problème n'est pas la définition du vecteur qui peut être introduit de façon naïve, par exemple en reliant la notion de vecteur à celle de grandeur dirigée comme on disait au XIX^{ème} siècle. Mais ceci ne signifie pas qu'il faille identifier d'emblée vecteur et couple de réels. Car le calcul vectoriel est un calcul *géométrique* au sens qu'on calcule directement sur les objets géométriques et non sur des représentations numériques de ces objets comme en géométrie analytique.

L'important est le calcul (d'ailleurs dans un premier temps les scalaires pourraient être des entiers). Ce calcul, très simple à maîtriser, donne un premier exemple d'opérations qui portent sur des objets non numériques. D'ailleurs historiquement c'est grâce au calcul vectoriel (ou plus exactement son ancêtre le calcul des quaternions) que Hamilton a posé, pour la première fois, en 1843, l'importance des propriétés des lois internes et externes. Pourquoi se passer de ce modèle si commode pour celui qui aura à enseigner l'algèbre linéaire ? On ne peut oublier que l'enseignement de l'algèbre linéaire, qui relève de l'enseignement supérieur, s'appuie sur les analogies entre les divers phénomènes linéaires dont la géométrie. Le nom même d'espace vectoriel montre le rapport de l'algèbre linéaire avec la géométrie. Enfin si l'on sait que l'algèbre linéaire a permis de développer ce que l'on appelle la *géométrisation* de nombreux chapitres des mathématiques et de la physique, cette géométrisation opère par analogie entre vecteur du plan ou de l'espace et vecteur abstrait.

Les applications des vecteurs à la géométrie, même si elles ne sont pas indispensables, donnaient l'occasion, là encore, au professeur de seconde de reprendre une partie de ce qui avait été fait au collège avec un éclairage nouveau. Ainsi de Thalès et de l'homothétie. En remplaçant les manipulations sur les rapports de longueurs et les configurations dites « de Thalès » par l'agrandissement qui les produit on donne un exemple d'algébrisation puisque les agrandissements se composent explicitant par là de nouveaux alignements de points de la figure. On passe donc ici des invariants vers les transformations (*cf* la commission Kahane) dans un cadre simple. Ce chapitre quand il était enseigné en Seconde ou en Première n'a jamais été signalé par les enseignants comme problématique (contrairement, par exemple, à celui de la géométrie dans l'espace) et beaucoup d'élèves retrouvaient avec bonheur une partie des exercices qu'ils connaissaient déjà dans un autre cadre. L'étude des centres d'homothéties de deux cercles et les propriétés associées est un autre exemple de sujet important.

On ne peut biffer d'un trait les relations entre le calcul vectoriel et la géométrie analytique et les applications des vecteurs à la géométrie analytique. Le calcul vectoriel permet de donner une interprétation *synthétique* aux relations analytiques qui traduisent l'alignement ou l'orthogonalité. Le problème n'est pas de choisir entre le côté analytique ou le côté synthétique, mais au contraire d'enseigner la relation entre l'analytique et le synthétique. Sinon pourquoi ne pas proposer d'enseigner les nombres complexes comme des couples de réels réglés par les relations convenables ?

Algèbre

Le chapitre de géométrie analytique qui est proposé permettra aux élèves de résoudre des équations et des inéquations. Nous pensons cependant qu'il serait utile qu'un chapitre autonome soit consacré, à part, à la théorie des équations et des systèmes d'équations linéaires. Ce chapitre serait une étape dans la formation des élèves à l'algèbre. Nous insistons d'ailleurs sur le rôle du calcul littéral et sur la simplicité qu'il apporte. Il faudrait assez vite introduire dans les équations des coefficients littéraux. On peut d'ailleurs faire le lien avec l'algorithmique, moins pour développer un enseignement d'algorithmique que pour montrer, à travers quelques exemples, le rôle des algorithmes.

Nous contestons les choix initiaux que les rédacteurs de ces projets ont faits et qui prolongent dans une grande mesure des partis pris déjà effectués depuis longtemps :

- Il serait inutile de proposer une formation raisonnée du calcul puisque les logiciels et les machines[1] peuvent remplacer la technique qu'on qualifie souvent de *virtuosité inutile*

- Il faudrait abandonner l'enseignement des concepts synthétiques, réputés difficiles, *angles*, *vecteurs*, *produit scalaire*, et les remplacer par de simples formules analytiques qui n'en sont que des conséquences.

Le calcul intelligent ne peut pas être enseigné à un élève qui n'a jamais fait de calcul. L'intérêt de regrouper, d'interpréter, de synthétiser n'apparaît qu'après avoir vérifié par soi-même que la démarche naïve est bien embarrassante. Ceux qui ont enseigné le calcul formel savent que pour utiliser efficacement les logiciels il faut penser le calcul dont on va implémenter les procédures. Les élèves en difficulté considèrent les logiciels comme des oracles magiques qui vont donner des solutions et non pas comme des outils qu'ils doivent maîtriser.

[1] Le problème est le même dans l'opposition logiciels de géométrie dynamique *versus* dessins à la main.

Mais pourquoi demanderait-on aux élèves de faire des efforts synthétiques si le cours lui-même a gommé tous les aspects synthétiques des domaines abordés ?

Conclusion

Nous l'avons déjà dit, l'urgence implique d'harmoniser l'enseignement de seconde avec les allègements de la classe de troisième. La solution la plus raisonnable serait de reprendre le programme actuel de seconde en l'adaptant, en particulier en introduisant le calcul vectoriel : vecteurs comme classe d'équipollence de segments de droites orientés, somme de vecteurs et relation de Chasles, multiplication pas un scalaire, relation avec l'homothétie. Cela permettrait d'introduire la calcul vectoriel métrique (produit scalaire et applications) en première, tout au moins en première scientifique.

Nous ne souhaitons pas qu'on multiplie l'introduction de thèmes optionnels et encore moins qu'on leur associe une enveloppe horaire. Ceci ne constitue pas seulement une perte de temps mais aussi une erreur pédagogique (l'intérêt des sujets choisis n'étant pas en cause). Les élèves ne sont pas des jeunes chercheurs ou des spectateurs qu'on ait à divertir.
Les enseignements optionnels empêchent de créer une culture commune, c'est-à-dire un socle sur lequel les enseignants futurs pourront bâtir. Il en va ainsi à l'heure actuelle avec les terminales S, tout ce qui n'appartient pas au tronc commun est vite oublié parce que jamais repris.

Les discussions qu'engendre cette brève consultation sur les programmes de seconde montrent l'urgence de mettre en place un groupe de travail sur les programmes de mathématiques du collège et du lycée. Il est extravagant de définir les programmes année par année sans définir une vision globale, y compris dans la définition des filières au lycée et des mathématiques enseignées dans chacune de ces filières.

On pourrait au moins commencer par penser les programmes sur les trois années du Lycée et fixer les savoir-faire et les connaissances exigibles section par section. Mais tous les savoir n'ont pas le même statut. Est-il important d'avoir appris que les médianes ou les bissectrices d'un triangle sont concourantes ? Non au sens utilitaire où l'on sait que Madrid est la capitale de l'Espagne. Ce qui est important c'est d'avoir compris que ces admirables propriétés, physiquement vérifiables, sont à la fois un point d'arrivée (comment faire et avec quels outils les démontrer), et un point de départ (inutile de revenir là dessus pour démontrer autre chose).

Cette remarque peut nous amener à reconsidérer l'enseignement des probabilités et des statistiques qui sont certes des outils incontournables dans beaucoup de filières (médecine, économie, écoles de commerce et d'ingénieur). Peut-on dire qu'elles représentent à la fois un point d'arrivée et un point de départ ? Elles furent longtemps, à tort, écartées de l'enseignement secondaire. Il ne faudrait pas que par un balancement brutal elles prennent une part excessive ou prépondérante aujourd'hui.

Cette réflexion globale sur l'enseignement des mathématiques commencerait par poser la question des horaires. La question du temps est double, d'une part le temps du professeur lui permettant de faire le programme, d'autre part, et c'est sans doute plus important, le temps de l'élève, c'est-à-dire le temps de maturation pour comprendre ce qu'on lui enseigne. Tout professeur sait, ne serait-ce que par une introspection qui n'est jamais inutile, qu'il ne suffit pas d'entendre ou de lire un discours mathématique pour le comprendre et qu'il faut du temps avec de nombreux retours. Ce temps conditionne aussi les rendez-vous que l'élève aura avec son professeur de mathématiques et il conditionne en parallèle les travaux parallèles (exercices, devoirs libres) qui seront faits. Un horaire hebdomadaire de 3 heures ne permet rien de tout cela, il semble raisonnable de le doubler.