Perspectives ponctuelles, globales, locales en analyse : plus précisément dans les calculs de limites de fonctions

Fabrice Vandebrouck

Université Paris Diderot

IREM de PARIS

Plan

- Les fonctions, des objets complexes, de la troisième à l’université
- Les calculs de limites du lycée à l’université
- Les tests de positionnement à l’entrée à l’université

Des objets complexes

Avec une diversité de **registres de représentations** à coordonner

- registre de la langue naturelle
- registre numérique des tables de valeurs
- registre algébrique des formules
- registre graphique des courbes
- registre symbolique des tableaux de variation
- registre symbolique intrinsèque (f, fog, f^{-1}…)

Coordination nécessaire pour **dégager l’objet de ses diverses représentations**

Des objets complexes

- Le concept de fonction Formalise, Unifie, et Généralise (**concept FUG** en didactique) plusieurs notions déjà rencontrées par les élèves
  - « en fonction de… »
  - Programmes de calcul
  - Proportionnalité
  - Droites linéaires et affines
  - Des transformations géométriques
  - Courbes

Des objets complexes

- La notion de fonction intervient comme **objet** intra mathématique, étudié pour lui-même, mais aussi comme **outil** dans des modélisations
  - Géométriques
  - Physiques

  …

  Dialectique Outil / Objet, « changements de cadres », voire des « jeux de cadre »

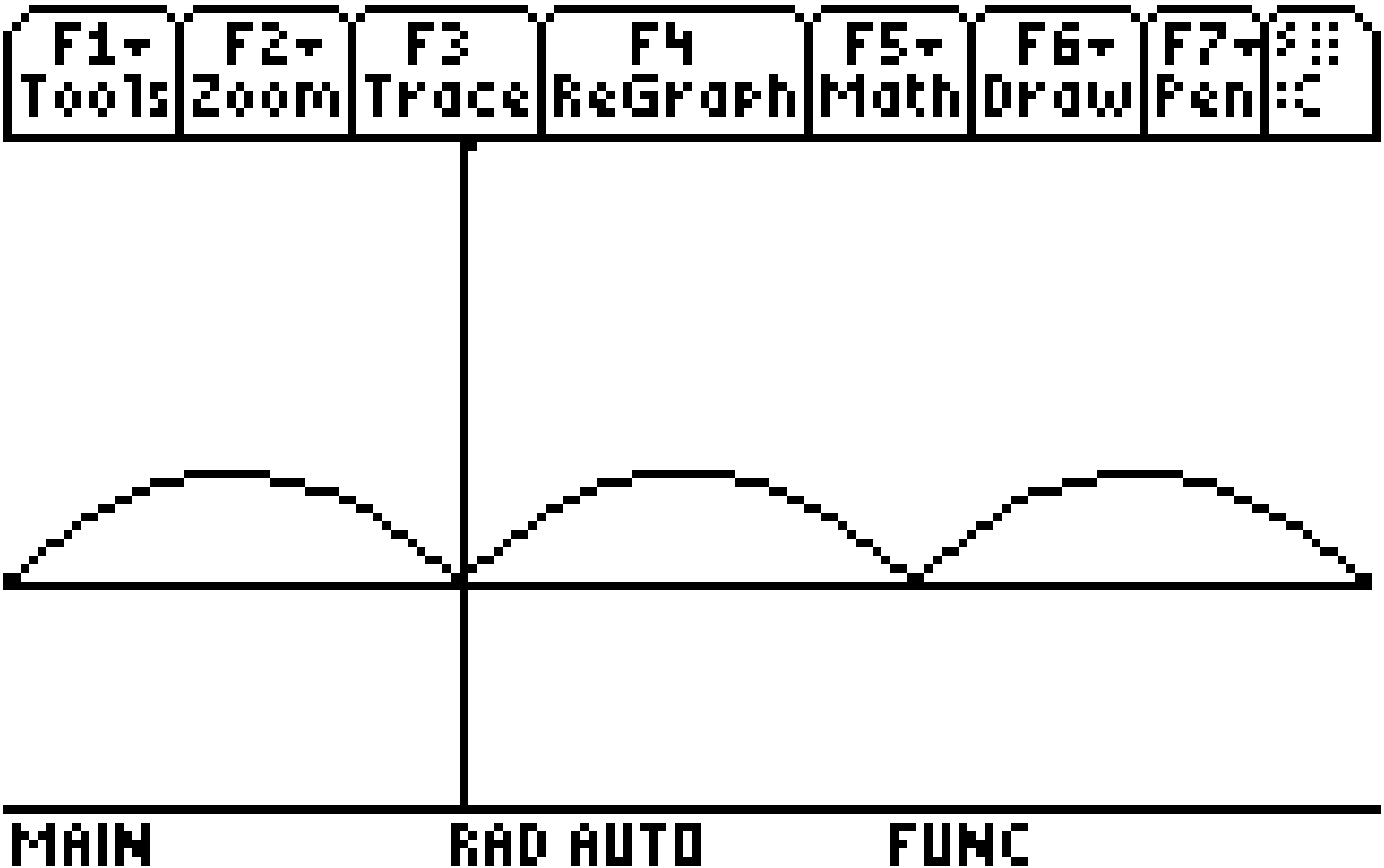
Des objets complexes

- Plusieurs **perspectives** à coordonner
  - Ponctuelle : caractéristique des propriétés en un point : valeur, image, antécédent…
  - Globale : croissance, décroissance, variations, *parité, périodicité*
  - Locale : comportement à l'infini, en un point (limite, dérivabilité…), *asymptotes…*
- **Tous les registres de représentations n'ont pas la même valence en terme de perspective**

Atelier : exo 1

- Associer à chaque registre la perspective (ou les perspectives) qu'il porte le mieux

• Langue naturelle • Table de valeurs • Formule • Courbes • Tableaux de variation • Symbole *f*	• ***Ponctuelle*** • ***Globale*** • ***Locale***


F1 Tools
F2 Zoom
F3 Trace
F4 ReGraph
F5 Math
F6 Draw
F7 Pen
MAIN
RAD AUTO
FUNC

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{e^{-x} - 1} - 1 - \frac{x}{2}$$

$$g(x) = x^2 + \sqrt{x} + \exp(x)$$

$$h(x)= (x^2+3x+1)/ln(x)$$

Registres et Perspectives

Tableaux de valeurs

Ponctuel

Expressions algébriques

Représentations graphiques

Local

f

Global

Tableaux de variation

Enjeux de l'enseignement

- Du Ponctuel au Global
  - Images, antécédents → covariations
  - Approche coordonnée (croiser les représentations)
    - Transfert des propriétés globales naturelles des courbes à la fonction
    - …
- Du Global au Local
  - Continuité, dérivabilité, limites

Université Paris-Diderot
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Année 2015-2016
Toutes sections

Examen du 17 Décembre 2015

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. Soit $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-2\mathrm{i}\}$. Soit $H : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $H(z) = \dfrac{2z-4}{\mathrm{i}z-2}$.

(a) Montrer que $H(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$.

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

P.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+x^2}}{\cos(\pi x)+2}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|\,(1+x)}{\sqrt{x^2+x^4}}$,

L.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}(x^2-x)$.

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

G.

$$f(x) = \frac{1-\cos(\pi x)}{2}.$$

(a) Justifier que f est une fonction continue et dérivable.

Exo 2 (pas trop évident)

Dans l’exercice de la diapositive suivante,

pointer dans chaque question les différentes perspectives mises en jeu sur la fonction f et sur sa dérivée f' (ou l’absence de perspective le cas échéant)

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos(\pi x)}{2}.$$

(a) Justifier que f est une fonction continue et dérivable.

(b) Donner l'expression de la dérivée de la fonction f.

(c) Que valent $f(0)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{3})$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{3})$?

(d) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $I = [0, 1]$.

(e) Calculer l'image directe $J = f(I)$ de I par f.

On désigne par $g : I \to J$ la fonction définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

(f) Déduire des points précédents que $g : I \to J$ est bijective.

On note $g^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque de g.

(g) Soit $y_0 = \frac{1}{4}$. Montrer que $y_0 \in J$. Montrer que g^{-1} est dérivable en y_0. Calculer $(g^{-1})'(y_0)$. (*Indication* : il n'est pas nécessaire de calculer explicitement l'expression de g^{-1}.)

Questions bonus.

On définit la fonction h par

$$\begin{aligned} h : \quad I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(h) Montrer que h est continue à droite en 0 (on pourra utiliser la définition de dérivabilité de f en 0).

(i) Montrer que h est continue sur I. En déduire qu'il existe $c \in I$ tel que $h(x) \leq h(c)$ pour tout $x \in I$.

Le calcul des limites

- Tâches emblématique de la transition lycée-université
  – Fonctions définies par leur expression algébrique
  – Niveau de complexité qui s'accroit du lycée à l'université…

Feuille de TD n° 5 : Continuité

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition et discuter de la parité de la fonction f dans les exemples suivants.

(a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$,

(b) $f(x) = \frac{2x^3-5}{x^2+x-6}$,

(c) $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$,

(d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,

(e) $f(x) = x - |x|$,

(f) $f(x) = \frac{x}{|x|}$,

(g) $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$,

(h) $f(x) = \tan(x) - \cos(x)$,

(i) $f(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$,

(j) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\ln(|x-1|)}$.

Exercice 2. Représentez graphiquement, dans chaque cas ci-dessous, une fonction qui satisfait les conditions suivantes.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $f(0) = 1$.

(b) $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 2^+$, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0^-$, $\lim_{x\to 4^-} g(x) = 3$, $\lim_{x\to 4^+} g(x) = +\infty$, $g(5) = 1$, $g(0) = 2$.

Exercice 3. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $[a, +\infty[$, $(a \in \mathbb{R})$.

$+\infty$?

Exercice 5. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim_{x\to 0} x^2-2x$,

(b) $\lim_{x\to 1} x^2-4x+3$,

(c) $\lim_{x\to 2} x^2-2x$,

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-3}$,

(e) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1}$,

(f) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3}$,

(g) $\lim_{x\to +\infty} 1+x+\ln x$,

(h) $\lim_{x\to +\infty} x^4e^x\ln^2 x$,

(i) $\lim_{x\to +\infty} xe^{\frac{1}{x}}$,

(j) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^4-1}$,

(k) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

(l) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)}$,

(m) $\lim_{x\to 1} \cos\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)$,

(n) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1+\tan\frac{1}{x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\right)}$,

(o) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$,

(p) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x^2}+x}{\sin x}$,

(q) $\lim_{x\to 0^+} \sin\dfrac{1}{x}$,

(r) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,

(s) $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{2}{x-1}}$,

(t) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$,

(u) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$,

(v) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x}{x-1}$.

Exercice 6. Dire si les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définiti
fier).

Le calcul des limites

- Tâches emblématiques de la transition lycée-université
  - Des règles d’algèbre des limites qui sont substituées par des raisonnements analytiques d’équivalence, de négligeabilité (plus tard avec des calculs de développements limités à piloter) **qui supportent et sont supportés par l’introduction de ces notions locales au niveau formel** : $f \sim g$, $f = o(g)$…
  - Un rôle du registre graphique différent, comme support aussi au raisonnement

Université Paris-Diderot
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Année 2015-2016
Toutes sections

Examen du 17 Décembre 2015

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

L.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+x^2}}{\cos(\pi x)+2}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|\,(1+x)}{\sqrt{x^2+x^4}}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}(x^2-x)$.

- Identifier la structure des expressions
- **Visualiser globalement et localement chaque sous expressions**
- **Identifier les termes prépondérants et les termes négligeables**

« METTRE DU RELIEF SUR LES FORMULES »

Tests de positionnement des étudiants de L1 : quelques flashs à partir des deux premières années

Groupe IREM GLU* - Projet SPC EVALAC**

Taux de bonnes réponses à l'ensemble du test (20 questions) par filière

2015	Année 2015 (sur effectif total de 513 étudiants)							
	Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
TAUX DE BONNES REPONSES	**63,35%**	81,57%	72,71%	68,45%	63,26%	60,84%	55,45%	53,79%
2016	**Année 2016 (sur effectif total de 616 étudiants)**							
	Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
TAUX DE BONNES REPONSES	**63,77%**	80,20%	72,59%	70,42%	65,38%	60,06%	55,99%	53,57%

Un petit calcul élémentaire

2015		[illegible]
$2 \times 2^n = ?$	2^{n+1}	[illegible]
	2^{2n}	[illegible]
	4^n	[illegible]
2016		[illegible]
$2 \times 2^n = ?$	2^{n+1}	[illegible]
	2^{2n}	[illegible]
	4^n	[illegible]

Connaissances de base sur les nombres complexes

Connaissances de base sur les nombres complexes

2015		Année 2015 (sur effectif total de 513 étudiants)
$exp(2i\pi) = ?$	0	
	-1	
	1	
	i	
2016		
$exp(2i\pi) = ?$	0	
	-1	
	1	
	i	

Une fonction de référence

2015		Année 2015 (effectif total 156 étudiants à qui la question a été posée)
$\lim_{x \to 0} \exp(-x)$	0	
	$+\infty$	
	$-\infty$	
	1	
2016		
$\lim_{x \to 0} \exp(-x)$	0	
	$+\infty$	
	$-\infty$	
	1	

Forme indéterminée élémentaire dans le calcul d'une limite

2015		Année 2015 (effectif total 141 étudiants à qui la question a été posée)
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1}$	-1	
	1	
	0	
	$+\infty$	
2016		
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1}$	-1	
	1	
	0	
	$+\infty$	

(*) Groupe Lycée Université : Mireille Fouquet, Séverine Leidwanger, Fabrice Vandebrouck et les collègues de lycée Pascale Creuse, Mathieu Richaud, Charles Rivière et Sylvie Alory (**) Projet SPC Évaluer pour Accompagner : Tests de positionnement et d'évaluation formative des étudiants en sciences

Tests de positionnement des étudiants de L1 : quelques flashs à partir des deux premières années

Groupe IREM GLU* - Projet SPC EVALAC**

Taux de bonnes réponses à l'ensemble du test (20 questions) par filière

2015	Année 2015 (sur effectif total de 513 étudiants)							
	Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
TAUX DE BONNES REPONSES	**63,35%**	81,57%	72,71%	68,45%	63,26%	60,84%	55,45%	53,79%
2016	**Année 2016 (sur effectif total de 616 étudiants)**							
	Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
TAUX DE BONNES REPONSES	**63,77%**	80,20%	72,59%	70,42%	65,38%	60,06%	55,99%	53,57%

Un petit calcul élémentaire

2015		Année 2015 (sur effectif total de 513 étudiants)							
		Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
$2 \times 2^n = ?$	2^{n+1}	**82,26%**	**100,00%**	**94,92%**	**92,73%**	**84,88%**	**80,90%**	**74,24%**	**64,49%**
	2^{2n}	**5,07%**	0,00%	0,00%	1,82%	4,65%	5,62%	4,55%	12,15%
	4^n	**12,67%**	0,00%	5,08%	5,45%	10,47%	13,48%	21,21%	23,36%
2016		**Année 2016 (sur effectif total de 616 étudiants)**							
		Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
$2 \times 2^n = ?$	2^{n+1}	**83,77%**	**91,84%**	**89,29%**	**88,10%**	**89,58%**	**76,74%**	**75,31%**	**76,53%**
	2^{2n}	**3,08%**	0,00%	1,79%	2,38%	1,39%	1,16%	8,64%	6,12%
	4^n	**13,15%**	8,16%	8,93%	9,52%	9,03%	22,09%	16,05%	17,35%

Connaissances de base sur les nombres complexes

Connaissances de base sur les nombres complexes

2015		Année 2015 (sur effectif total de 513 étudiants)							
		Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
$exp(2i\pi) = ?$	0	17,93%	17,65%	18,64%	18,18%	20,93%	19,10%	13,64%	16,82%
	-1	9,75%	1,96%	10,17%	10,91%	6,98%	10,11%	12,12%	14,02%
	1	53,80%	76,47%	50,85%	61,82%	54,65%	51,69%	51,52%	42,99%
	i	18,13%	3,92%	20,34%	9,09%	17,44%	16,85%	22,73%	26,17%
2016		Année 2016 (effectif total 616 étudiants)							
		Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
$exp(2i\pi) = ?$	0	20,62%	20,41%	10,71%	23,81%	24,31%	18,60%	22,22%	19,39%
	-1	7,47%	0,00%	7,14%	1,19%	8,33%	10,47%	11,11%	10,20%
	1	54,71%	73,47%	64,29%	64,29%	48,61%	52,33%	50,62%	45,92%
	i	15,75%	6,12%	17,86%	10,71%	17,36%	13,95%	16,05%	22,45%

Une fonction de référence

2015		Année 2015 (effectif total 156 étudiants à qui la question a été posée)							
		Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
$\lim_{x \to 0} \exp(-x)$	0	16,03%	6,25%	4,55%	0,00%	23,33%	12,50%	14,29%	37,04%
	$+\infty$	9,62%	12,50%	4,55%	6,25%	6,67%	20,83%	14,29%	3,70%
	$-\infty$	8,97%	0,00%	13,64%	0,00%	16,67%	12,50%	9,52%	3,70%
	1	65,38%	81,25%	77,27%	93,75%	53,33%	54,17%	61,90%	55,56%
2016		Année 2016 (effectif total 197 étudiants à qui la question a été posée)							
		Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
$\lim_{x \to 0} \exp(-x)$	0	12,69%	12,50%	9,52%	14,29%	5,00%	18,52%	16,13%	15,15%
	$+\infty$	11,17%	6,25%	9,52%	0,00%	10,00%	22,22%	9,68%	15,15%
	$-\infty$	12,69%	0,00%	19,05%	4,76%	12,50%	7,41%	29,03%	9,09%
	1	62,94%	81,25%	61,90%	80,95%	72,50%	51,85%	45,16%	60,61%

Forme indéterminée élémentaire dans le calcul d'une limite

2015		Année 2015 (effectif total 141 étudiants à qui la question a été posée)							
		Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1}$	-1	7,80%	0,00%	0,00%	6,67%	15,79%	8,33%	10,53%	9,38%
	1	52,48%	88,89%	85,71%	60,00%	47,37%	50,00%	31,58%	31,25%
	0	20,57%	5,56%	0,00%	33,33%	15,79%	25,00%	21,05%	31,25%
	$+\infty$	18,44%	5,56%	14,29%	0,00%	21,05%	16,67%	31,58%	28,13%
2016		Année 2016 (effectif total 100 étudiants à qui la question a été posée)							
		Total	Maths-Info	CPEI	Maths	Physique	MIASH	Chimie	Info
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1}$	-1	10,00%	8,33%	11,11%	0,00%	16,67%	16,67%	14,29%	5,88%
	1	55,00%	83,33%	66,67%	50,00%	38,89%	50,00%	50,00%	52,94%
	0	16,00%	8,33%	11,11%	18,75%	16,67%	16,67%	21,43%	17,65%
	$+\infty$	19,00%	0,00%	11,11%	31,25%	27,78%	16,67%	14,29%	23,53%

(*) Groupe Lycée Université : Mireille Fouquet, Séverine Leidwanger, Fabrice Vandebrouck et les collègues de lycée Pascale Creuse, Mathieu Richaud, Charles Rivière et Sylvie Alory (**) Projet SPC Évaluer pour Accompagner : Tests de positionnement et d'évaluation formative des étudiants en sciences

Exo 3-a : classer par ordre de difficulté les calculs de limites

Limite de	en	Réponses possibles	Sept 2015	Sept 2016
ln(1+x)	0^+	**0***		
		$+\infty$		
		$-\infty$		
1/(x+1)	$+\infty$	**0***		
		$+\infty$		
		1		

Exo 3-a : classer par ordre de difficulté les calculs de limites

Limite de	en	Réponses possibles	Sept 2015	Sept 2016
ln(1+x)	0^+	**0***	**68%**	**64%**
		$+\infty$	23%	23%
		$-\infty$	9%	11%
1/(x+1)	$+\infty$	**0***	**85%**	**87%**
		$+\infty$	8%	7%
		1	7%	5%

Exo 3-b : classer par ordre de difficulté les calculs de limites

Limite de	en	Réponses possibles	Sept 2015	Sept 2016
ln(1/x)	$+\infty$	0		
		$+\infty$		
		$-\infty$*		
		PDL		
(x-1)/(x+1)	0	**-1***		
		1		
		0		

Exo 3-b : classer par ordre de difficulté les calculs de limites

Limite de	en	Réponses possibles	Sept 2015	Sept 2016
ln(1/x)	$+\infty$	0	23%	27%
		$+\infty$	12%	9%
		$-\infty$*	**50%**	**46%**
		PDL	14%	16%
(x-1)/(x+1)	0	**-1***	**73%**	**73%**
		1	9%	9%
		0	14%	13%

Exo 3-c : classer par ordre de difficulté les calculs de limites

Limite de	en	Réponses possibles	Sept 2015	Sept 2016
exp(x)-x	$-\infty$	0		
		$+\infty$*		
		$-\infty$		
	$+\infty$	0		
		$+\infty$*		
		$-\infty$		

Exo 3-c : classer par ordre de difficulté les calculs de limites

Limite de	en	Réponses possibles	Sept 2015	Sept 2016
exp(x)-x	$-\infty$	0	18%	16%
		$+\infty$*	**55%**	**60%**
		$-\infty$	27%	23%
	$+\infty$	0	11%	11%
		$+\infty$*	**78%**	**80%**
		$-\infty$	11%	**8%**

Exo 3-d : classer par ordre de difficulté les calculs de limites

Limite de	en	Réponses possibles	Sept 2015	Sept 2016
$(x-1)/(x+1)$	**$+\infty$**	-1		
		1		
		0		
		$+\infty$		
$(x^2-1)/(x+3)$	$+\infty$	**$+\infty$**		
		0		
		-1/3		

Exo 3-d : classer par ordre de difficulté les calculs de limites

Limite de	en	Réponses possibles	Sept 2015	Sept 2016
(x-1)/(x+1)	**+ ∞**	-1	8%	10%
		1	**52%**	**55%**
		0	20%	16%
		+ ∞	19%	19%
(x²-1)/(x+3)	+ ∞	**+ ∞**	**81%**	**85%**
		0	14%	9%
		-1/3	5%	5%

Suite…

Limite de	en	Réponses possibles	Sept 2015	Sept 2016
(2x-2)/(x+1)	**-1^+**	**$-\infty$***	**37%**	**35%**
		$+\infty$	23%	27%
		0	30%	24%
		-4	9%	13%
	$+\infty$	**2***	**56%**	**56%**
		$+\infty$	37%	33%
		-2	7%	10%

Suite…

$(x^2-1)/(x-1)$	**1^+**	**2***	**10%**	**14%**
		0	35%	35%
		1	23%	26%
		$+\infty$	31%	24%

Des commentaires d’étudiants

- « *exp est très puissante, assez rapide, si je remplace x par un grand nombre…* »
- « *racine de x tend vers* + *l’infini, donc moins racine de x tend vers – l’infini, +1, c’est toujours – l’infini, exponentielle croit plus vite que racine de x donc c’est lui qui gagne, du coup + l’infini* »
- « + *l’infini c’est la même chose, exp(x) tend vers + l’infini, -x tend vers – infini mais exponentielle va plus rapidement donc + infini* ».

Exponentielle l’emporte toujours

- « *c'est une composée ln(u(x)), 1/x tend vers* 0^+*, c'est une formule du cours, on pose X=1/x, ln(X)* ***ça fait*** *moins l'infini quand X tend vers* 0^+ » puis « *c'est pareil c'est une composée, X=-x,* ***x tend*** *vers 0 donc* ***X tend*** *vers 0 et exp(0)=1* »

Amalgame Ponctuel et Local

- Autre exemple pour le calcul de la limite de *sin*(*x*)/*x* en 0 : « *sin(0) c'est 0, et x lui il s'approche de 0, du coup ça fait 0* »

Amalgame Ponctuel et Local

- « *exp(-x)-1 tend vers + infini, exp(-x)-1 tend vers + infini, du coup ça tend vers 1*, *-1 et +1 on les néglige* »

Utilise la négligeabilité mais…

Mauvaise argumentation : règles $\infty / \infty = 1$

- « *exponentielle en moins l'infini, c'est 0, ln x tend vers + infini, et 0 fois l'infini c'est 0* ».

Règle $0 \times \infty = 0$

- Pour *(2x-2)/(x+1)* en + ∞ : « *en haut, + l'infini, en bas, + l'infini donc + l'infini c'est dans le tableau des formes indéterminées* ».

Règle ∞ / ∞ = ∞

- Pour *(2x-2)/(x+1)* en + ∞ : « *c'est 2 fois plus au-dessus qu'en dessous* » et conclut correctement 2

Raisonnement qualitatif, presque local

- *« x^2 tend vers l'infini plus vite que x, donc c'est l'infini ».*

Raisonnement local correct… mais sans doute le même argument marche pour 2x face à x puisque beaucoup répondent + ∞

- Pour *(2x-2)/(x+1)* en -1 : « *plus on divise par un 0, plus c'est grand. Vu que c'est négatif (le numérateur), ça fait moins l'infini* »

Approche locale

Déterminer les limites suivantes. Une seule réponse est correcte.

	Limites proposées	**A**	**B**	**C**	**D**
10.7	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1}$?	0	$+\infty$	1	
13.5	$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-1}{x+1}$?	0	$+\infty$	-1	
13.13	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-2}{x+1}$?	-2	$+\infty$	2	
13.9	$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{2x-2}{x+1}$?	$-\infty$	$+\infty$	0	-4
13.6	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x^2-1}{x-1}$?	$+\infty$	0	1	2
13.11	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\sin x}{x}$?	0	1	Pas de limite	$+\infty$

testTS

	réponse correcte		réponse fausse 1		réponse fausse 2		réponse fausse 3		total réponses
10.7	21	95,5	1	4,5	0	0,0			22
	17	81,0	2	9,5	2	9,5			21
	38	**88,4**	3	7,0	2	4,7			43
13.5	22	100,0	0	0,0	0	0,0			22
	16	80,0	4	20,0	0	0,0			20
	38	**90,5**	4	9,5	0	0,0			42
13.13	15	68,2	5	22,7	2	9,1			22
B	9	42,9	12	57,1	0	0,0			21
	24	**55,8**	17	39,5	2	4,7			43
13.9	13	59,1	6	27,3	3	13,6	0	0,0	22
C	7	33,3	7	33,3	5	23,8	2	9,5	21
	20	**46,5**	13	30,2	8	18,6	2	4,7	43
13.6	0	0,0	15	68,2	7	31,8	0	0,0	22
B,A	1	4,8	7	33,3	10	47,6	3	14,3	21
	1	2,3	22	**51,2**	17	**39,5**	3	7,0	43
13.11	0	0,0	9	45,0	6	30,0	5	25,0	20
A,C,D	3	14,3	8	38,1	6	28,6	4	19,0	21
	3	7,3	17	**41,5**	12	**29,3**	9	22,0	41

Conclusion

- Le registre algébrique ne supporte les perspectives que pour les experts ***a priori***
- Les étudiants ont sans doute des difficultés pour reconnaître les formes indéterminées $\infty - \infty$, $0 \times \infty$… et qui plus est pour les traiter algébriquement (mélange dans le tableau des formes indéterminées + difficultés de traitements algébriques) – en effet, pas de difference significative dans les résultats selon que la forme algébrique est déterminée ou non…
- Par contre difference sensible entre limite en ∞ (mieux réussies) et limite en un point

- En outre, il semble qu’ils amalgament pour certain les perspectives ponctuelles et locales, embarquées dans des procedures algébriques. On dirait qu’ils ont développé une algèbre généralisée ($exp(-\infty)=0$; $ln(0)=-\infty$…)
- **Cependant, on assiste peut-être à un cercle vertueux :** partant de leurs difficultés algébriques ou leur imcompréhension des règles sur les limites (?), ils ont développé peut-être des nouvelles connaissances assez **QUALITATIVES (proches des experts)** qui marchent plus ou moins et qui sont liées à l’adoption de la perspective locale.
- Ne faudrait-il pas plutôt construire sur ces connaissances nouvelles plutôt que passer par l’applications de règles ?

- Débat : faut il enseigner le tableau des règles des limites ou capitaliser sur une approche plus qualitative ???