Les origamis et l'enseignement de la géométrie

A.-M. Aebischer

IREM de Franche-Comté - CII Pop'math

24 novembre 2017

1. Cadre du travail

2. Cadre mathématique
   - La géométrie des origamis à pli simple
   - Comparaison avec la géométrie euclidienne

3. Exemples d'activités
   - Pliage en trois par pli simple
   - Samoussas
   - Solides Pop'up
   - Parabole
   - Solides réguliers

Chronologie

- animations à la fête de la science ;
- unité *popularisation des mathématiques* de master MEEF 2 ;
- stage du PAF
- travail de la CII Pop'math ;

  Josiane Lorblanche (Bordeaux), Gérard Martin (Toulouse)

  Marie-José Pestel (CIJM), Patricia Rat (Tours)

- ateliers avec des classes.

Pourquoi des origamis ?

- Construction d'origamis modulaires autour des solides réguliers ;

Pourquoi des origamis ?

- Construction d'origamis modulaires autour des solides réguliers ;
- les origamis permettent de matérialiser des concepts de géométrie ;

(Définition, propriétés, énoncés de problème)

Pourquoi des origamis ?

- Construction d'origamis modulaires autour des solides réguliers ;
- les origamis permettent de matérialiser des concepts de géométrie ;

  (Définition, propriétés, énoncés de problème)
- $\longrightarrow$ travail autour des compétences :

  Représenter, Raisonner, Chercher.

Principe du travail

Trouver des activités à la fois :

- motivantes par la référence à un problème concret ;
- motivantes par l'aspect matériel de la manipulation ;
- en lien avec les programmes et avec les compétences mathématiques travaillées dans l'enseignement secondaire.

Les axiomes Justin-Huzita-Hatori : 7 plis fondamentaux

A et B sont deux points de la feuille, D et Δ sont deux droites de la feuille.

1. $A \longrightarrow A$ et $B \longrightarrow B$. *Droite (AB).*

Les axiomes Justin-Huzita-Hatori : 7 plis fondamentaux

A et B sont deux points de la feuille, D et Δ sont deux droites de la feuille.

1. $A \longrightarrow A$ et $B \longrightarrow B$. *Droite (AB).*
2. $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow A$. *Médiatrice de $[AB]$.*

Les axiomes Justin-Huzita-Hatori : 7 plis fondamentaux

A et B sont deux points de la feuille, D et Δ sont deux droites de la feuille.

1. $A \longrightarrow A$ et $B \longrightarrow B$. *Droite (AB).*
2. $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow A$. *Médiatrice de $[AB]$.*
3. $D \longrightarrow \Delta$. *Axe de symétrie de (D, Δ).*

Les axiomes Justin-Huzita-Hatori : 7 plis fondamentaux

A et B sont deux points de la feuille, D et Δ sont deux droites de la feuille.

1. $A \longrightarrow A$ et $B \longrightarrow B$. *Droite (AB).*
2. $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow A$. *Médiatrice de $[AB]$.*
3. $D \longrightarrow \Delta$. *Axe de symétrie de (D, Δ).*
4. $A \longrightarrow A$, $D \longrightarrow D$. *Perpendiculaire à D passant par A.*

Les axiomes Justin-Huzita-Hatori : 7 plis fondamentaux

A et B sont deux points de la feuille, D et Δ sont deux droites de la feuille.

1. $A \longrightarrow A$ et $B \longrightarrow B$. *Droite (AB).*
2. $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow A$. *Médiatrice de $[AB]$.*
3. $D \longrightarrow \Delta$. *Axe de symétrie de (D, Δ).*
4. $A \longrightarrow A$, $D \longrightarrow D$. *Perpendiculaire à D passant par A.*
5. $A \longrightarrow D$ et $B \longrightarrow B$. *Une intersection du cercle $\mathcal{C}(B, BA)$ avec la droite D.*

Les axiomes Justin-Huzita-Hatori : 7 plis fondamentaux

A et B sont deux points de la feuille, D et Δ sont deux droites de la feuille.

1. $A \longrightarrow A$ et $B \longrightarrow B$. *Droite (AB).*
2. $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow A$. *Médiatrice de $[AB]$.*
3. $D \longrightarrow \Delta$. *Axe de symétrie de (D, Δ).*
4. $A \longrightarrow A$, $D \longrightarrow D$. *Perpendiculaire à D passant par A.*
5. $A \longrightarrow D$ et $B \longrightarrow B$. *Une intersection du cercle $\mathcal{C}(B, BA)$ avec la droite D.*
6. $A \longrightarrow D$ et $B \longrightarrow \Delta$. *Tangente commune aux paraboles $\mathcal{P}_1(A, D)$ et $\mathcal{P}_2(B, \Delta)$.*

Les axiomes Justin-Huzita-Hatori : 7 plis fondamentaux

A et B sont deux points de la feuille, D et Δ sont deux droites de la feuille.

1. $A \longrightarrow A$ et $B \longrightarrow B$. *Droite (AB).*
2. $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow A$. *Médiatrice de $[AB]$.*
3. $D \longrightarrow \Delta$. *Axe de symétrie de (D, Δ).*
4. $A \longrightarrow A$, $D \longrightarrow D$. *Perpendiculaire à D passant par A.*
5. $A \longrightarrow D$ et $B \longrightarrow B$. *Une intersection du cercle $\mathcal{C}(B, BA)$ avec la droite D.*
6. $A \longrightarrow D$ et $B \longrightarrow \Delta$. *Tangente commune aux paraboles $\mathcal{P}_1(A, D)$ et $\mathcal{P}_2(B, \Delta)$.*
7. $A \longrightarrow D$ et $\Delta \longrightarrow \Delta$. *Projeté de A sur D perpendiculairement à Δ.*

Origamis versus Règle et compas

- Les axiomes 1 à 5 permettent de réaliser les constructions à la règle et au compas.

(Intersections droite/droite, droite/cercle, cercle/cercle)

Origamis versus Règle et compas

- Les axiomes 1 à 5 permettent de réaliser les constructions à la règle et au compas.

(Intersections droite/droite, droite/cercle, cercle/cercle)

- **l'axiome 6, permet de construire les solutions d'équations du troisième degré à coefficient entiers.**

Origamis versus Règle et compas

- Les axiomes 1 à 5 permettent de réaliser les constructions à la règle et au compas.

(Intersections droite/droite, droite/cercle, cercle/cercle)

- **l'axiome 6, permet de construire les solutions d'équations du troisième degré à coefficient entiers.**
- l'axiome 7 fournit un pli direct que l'on pourrait aussi réaliser en plusieurs étapes avec les axiomes 1 à 5.

Origamis versus Règle et compas

- Les axiomes 1 à 5 permettent de réaliser les constructions à la règle et au compas.

(Intersections droite/droite, droite/cercle, cercle/cercle)

- **l'axiome 6, permet de construire les solutions d'équations du troisième degré à coefficient entiers.**
- l'axiome 7 fournit un pli direct que l'on pourrait aussi réaliser en plusieurs étapes avec les axiomes 1 à 5.

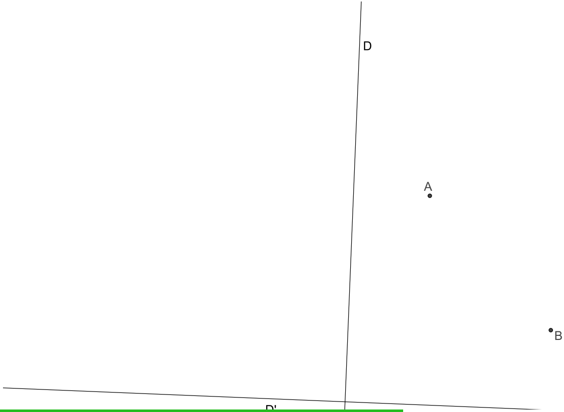
Origamis > Règle et compas

Duplication du cube, trisection de l'angle

Résolution d'une équation du troisième degré

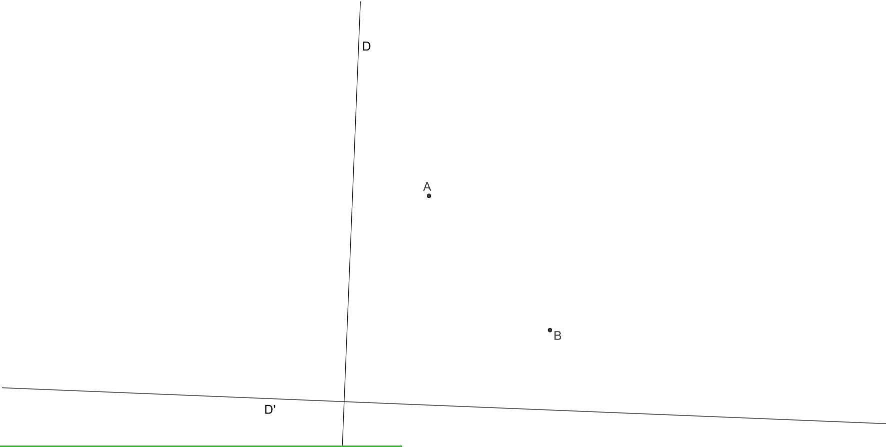
Résolution d'une équation du troisième degré

On se donne deux points A et B et deux droites D et D'.
($A \notin D$, $B \notin D'$).



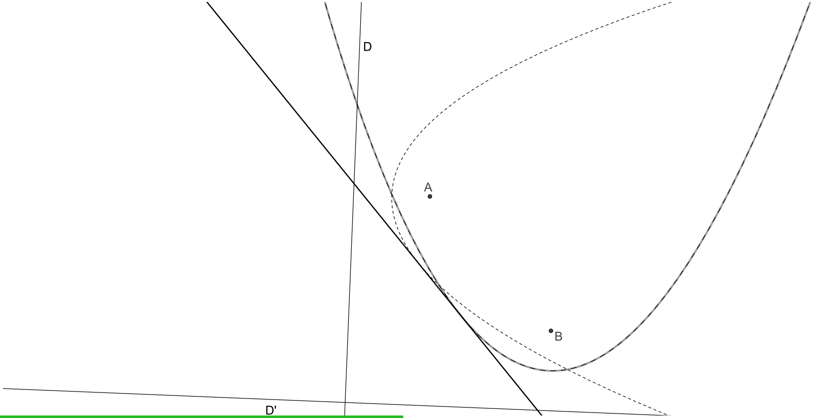
Résolution d'une équation du troisième degré

On veut réaliser un pli qui amène A sur D et B sur D' .



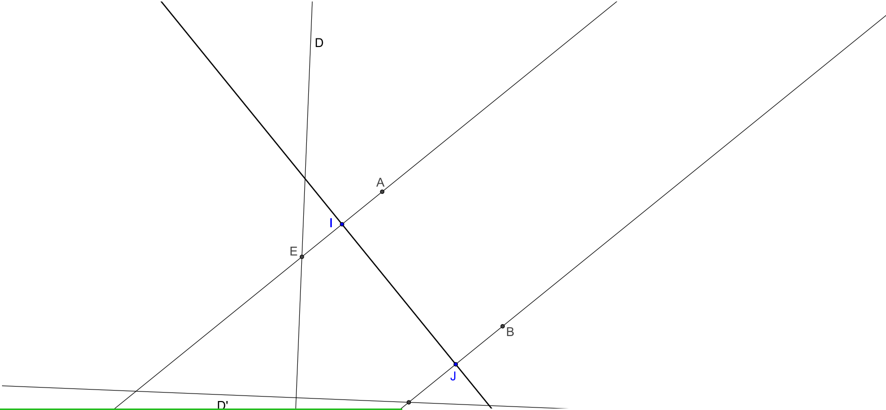
Résolution d'une équation du troisième degré

Cela revient à chercher une tangente commune aux deux paraboles (A, D) et (B, D').



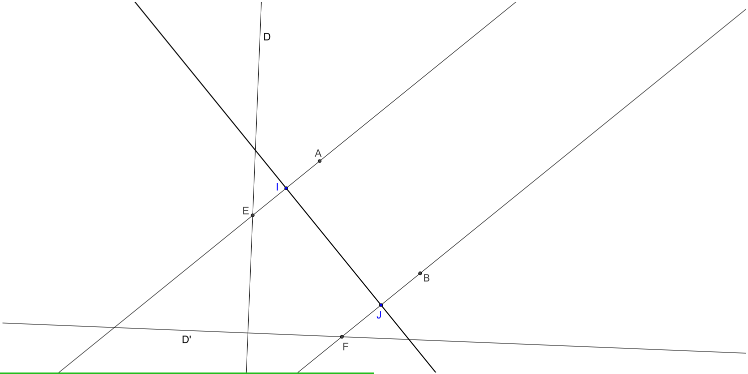
Résolution d'une équation du troisième degré

Cette tangente est l'axe d'une symétrie qui amène A sur D (en E) et B sur D' (en F).



Résolution d'une équation du troisième degré

On considère D et D' comme les axes d'un repère orthonormé.
Dans ce repère, on pose $A(a,b)$, $B(c,d)$ et on appelle t la pente de la droite (AE).
t est solution de l'équation $at^3 + (d-2b)t^2 + (2c-a)t - d = 0$.



Exemples d'activités

- Construire deux plis perpendiculaires ;

Exemples d'activités

- Construire deux plis perpendiculaires ;
- Construire deux plis parallèles (validation par raisonnement) ;

Exemples d'activités

- Construire deux plis perpendiculaires ;
- Construire deux plis parallèles (validation par raisonnement) ;
- Construire un carré, un rectangle de format imposé ;

Exemples d'activités

- Construire deux plis perpendiculaires ;
- Construire deux plis parallèles (validation par raisonnement) ;
- Construire un carré, un rectangle de format imposé ;
- Partage en trois parties superposables d'un rectangle par pli simple *ou comment plier une feuille A4 pour l'insérer dans une enveloppe 11x22* ;

Exemples d'activités

- Construire deux plis perpendiculaires ;
- Construire deux plis parallèles (validation par raisonnement) ;
- Construire un carré, un rectangle de format imposé ;
- Partage en trois parties superposables d'un rectangle par pli simple *ou comment plier une feuille A4 pour l'insérer dans une enveloppe 11x22* ;
- Boîte du pâtissier (suite de l'activité précédente) ;

Exemples d'activités

- Construire deux plis perpendiculaires ;
- Construire deux plis parallèles (validation par raisonnement) ;
- Construire un carré, un rectangle de format imposé ;
- Partage en trois parties superposables d'un rectangle par pli simple *ou comment plier une feuille A4 pour l'insérer dans une enveloppe 11x22* ;
- Boîte du pâtissier (suite de l'activité précédente) ;
- Inscription d'un triangle équilatéral dans une bande de papier *ou comment faire des samoussas (ou comment réaliser un hexaflexagone)* ;

Exemples d'activités

- Construire deux plis perpendiculaires ;
- Construire deux plis parallèles (validation par raisonnement) ;
- Construire un carré, un rectangle de format imposé ;
- Partage en trois parties superposables d'un rectangle par pli simple *ou comment plier une feuille A4 pour l'insérer dans une enveloppe 11x22* ;
- Boîte du pâtissier (suite de l'activité précédente) ;
- Inscription d'un triangle équilatéral dans une bande de papier *ou comment faire des samoussas (ou comment réaliser un hexaflexagone)* ;
- Solides pop'up

Exemples d'activités

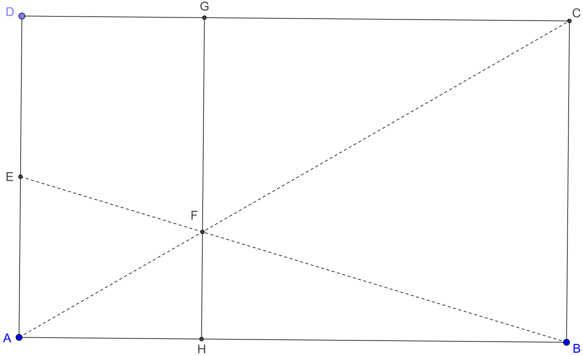
- Construire deux plis perpendiculaires ;
- Construire deux plis parallèles (validation par raisonnement) ;
- Construire un carré, un rectangle de format imposé ;
- Partage en trois parties superposables d'un rectangle par pli simple *ou comment plier une feuille A4 pour l'insérer dans une enveloppe 11x22* ;
- Boîte du pâtissier (suite de l'activité précédente) ;
- Inscription d'un triangle équilatéral dans une bande de papier *ou comment faire des samoussas (ou comment réaliser un hexaflexagone)* ;
- Solides pop'up
- Enveloppe d'une parabole, *ou comment créer du courbe avec du droit* ;

Exemples d'activités

- Construire deux plis perpendiculaires ;
- Construire deux plis parallèles (validation par raisonnement) ;
- Construire un carré, un rectangle de format imposé ;
- Partage en trois parties superposables d'un rectangle par pli simple *ou comment plier une feuille A4 pour l'insérer dans une enveloppe 11x22* ;
- Boîte du pâtissier (suite de l'activité précédente) ;
- Inscription d'un triangle équilatéral dans une bande de papier *ou comment faire des samoussas (ou comment réaliser un hexaflexagone)* ;
- Solides pop'up
- Enveloppe d'une parabole, *ou comment créer du courbe avec du droit* ;
- Polyèdres réguliers par origamis modulaires.

Pliage en trois par pli simple-1

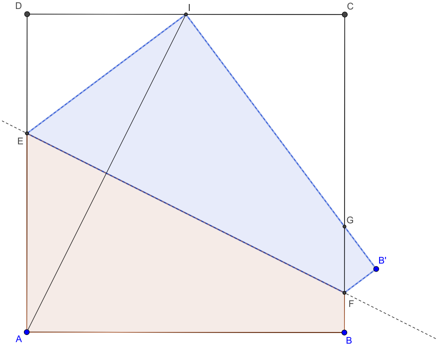
Avec le théorème de Thalès



$\frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$ - Activité en liaison : boîte du pâtissier

Pliage en trois par pli simple-2

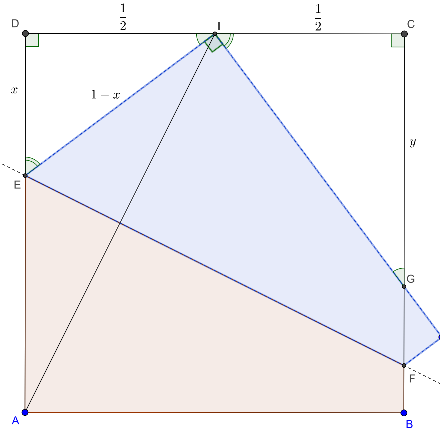
Avec agrandissement/réduction



$$\frac{BG}{BC} = \frac{1}{3}$$

Pliage en trois par pli simple-2

Avec agrandissement/réduction



$x = \frac{3}{8}$

$y = \frac{2}{3}$

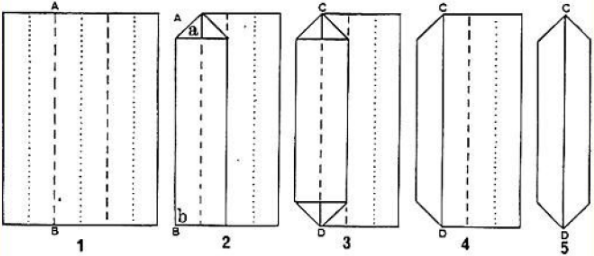
Boîte du pâtissier

Boîte du pâtissier

1. CONSIGNES DE CONSTRUCTION

1.1. On utilise une feuille de papier 21 × 29,7.
Les plis en creux sont représentés : ------
et les plis en relief : ......

figure 1



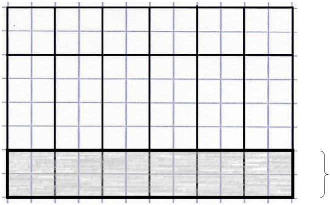
a) faire apparaître les cinq plis (équidistants) indiqués fig. 1
b) plier suivant AB, et réaliser les pliages du coin (a), fig. 2
c) réaliser dans le coin (b) les mêmes pliages qu'en (a), fig. 3
d) plier suivant le pli en creux CD, fig. 4
e) mêmes actions dans la partie droite de la feuille. On aboutit au résultat représenté fig. 5
f) il reste à ouvrir la boîte, et à marquer les plis des arêtes :

Boîte du pâtissier

Exemples d'activités :

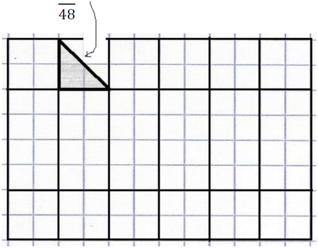
- Représentations ;
- Travail sur les fractions ;
- Dimensions de la boîte réalisées ;
- Comment obtenir une boîte à fond carré ?
- Travail algébrique.

Boîte du pâtissier

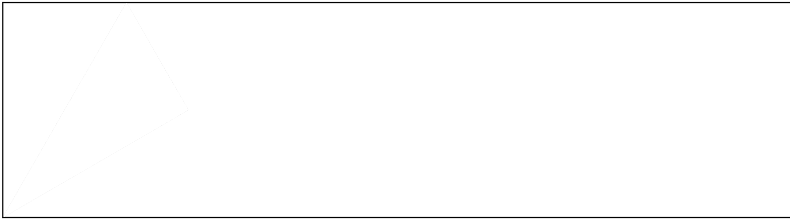


$\frac{1}{4}$

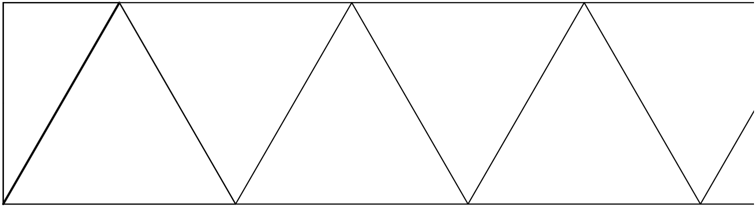
$\frac{1}{48}$



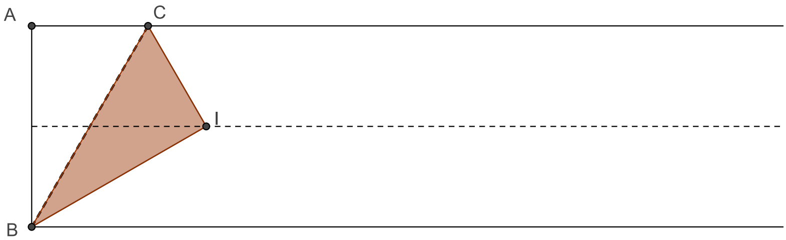
Inscription d'un triangle équilatéral dans une bande



Inscription d'un triangle équilatéral dans une bande



Inscription d'un triangle équilatéral dans une bande



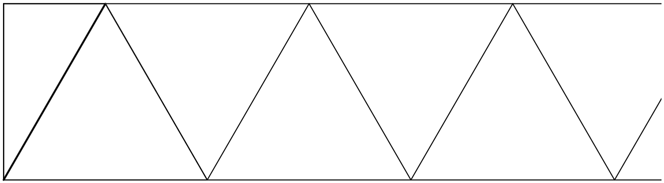
Réaliser un pli passant par B qui amène A sur le pli médian (en I) : le triangle BIA est équilatéral.

Inscription d'un triangle équilatéral dans une bande

Le triangle BCD est équilatéral.

$\widehat{ABI} = 60^\circ$ – $\widehat{CBD} = 60^\circ$ – I milieu de $[CD]$ – (BI) médiatrice de $[CD]$ – BCD triangle isocèle ayant un angle de 60°

Inscription d'un triangle équilatéral dans une bande



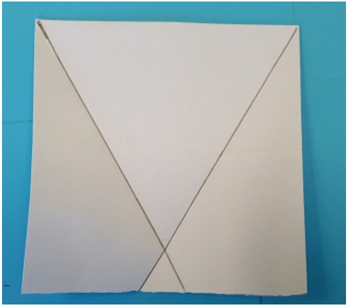
Avec une bande de 9 triangles équilatéraux, on peut réaliser un hexaflexagone ou . . .un samoussa.

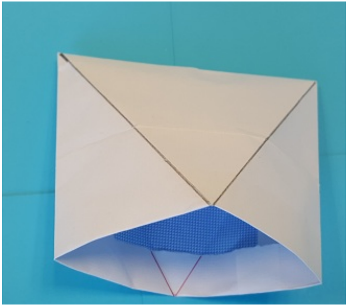
Solides pop'up - Tétraèdre régulier

Matériel : 1 enveloppe 11cmx22cm, collée, partagée en deux dans sa largeur.

But : Réaliser un tétraèdre régulier à insérer entre les pages d'un cahier.
Le pliage sera alternativement en 3 ou 2 dimensions, au gré de l'ouverture ou de la fermeture des pages concernées.

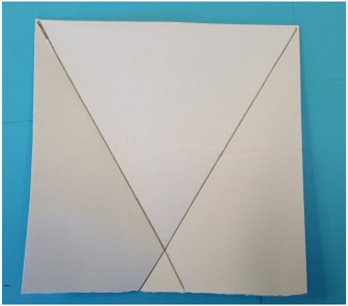
Pliage

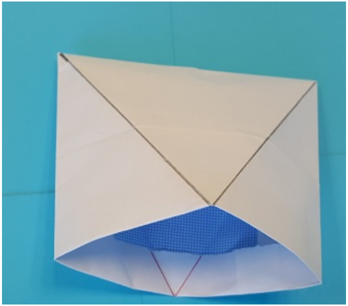




- L'ouverture de l'enveloppe est dirigée du côté de la personne qui réalise le pliage.

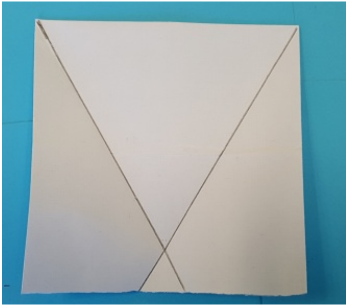
Pliage

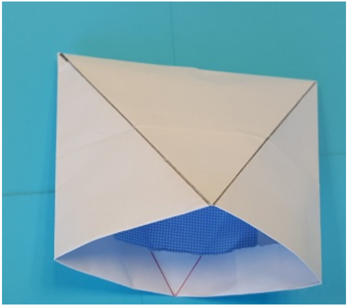




- L'ouverture de l'enveloppe est dirigée du côté de la personne qui réalise le pliage.
- Le pliage consiste à faire apparaître un triangle équilatéral dont une base est le côté de l'enveloppe opposé à l'ouverture.

Pliage



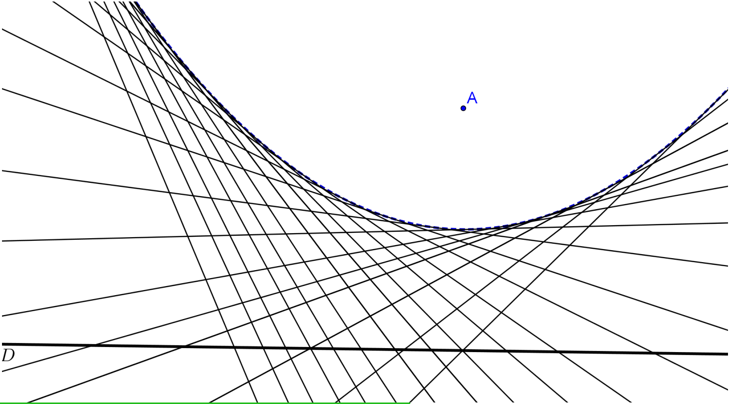


- L'ouverture de l'enveloppe est dirigée du côté de la personne qui réalise le pliage.
- Le pliage consiste à faire apparaître un triangle équilatéral dont une base est le côté de l'enveloppe opposé à l'ouverture.
- Ensuite, on rabat la bande excédentaire à l'intérieur de l'enveloppe.

Enveloppe d'une parabole

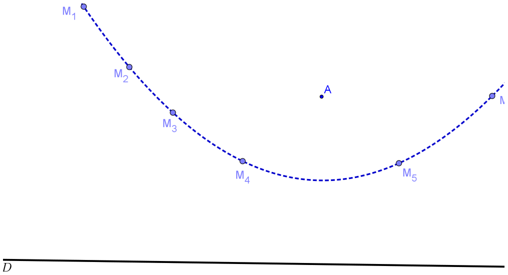
Données : une droite D (bord de la feuille), un point A non situé sur D.

On réalise plusieurs plis qui rabattent le point A sur la droite D.



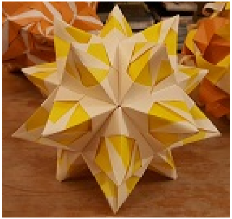
Parabole

De quelle courbe s'agit-il ?



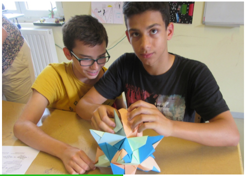
→ *Reconnaître,* ***admettre*** *que c'est l'ensemble des points équidistants de* A *et de* D*.*
On cherche une équation de la courbe dans un repère particulier pour reconnaître une parabole.

Des objets fascinants



Avec les classes

- À la remise des prix du RMFC, classe de troisième de Chatillon le duc ;
- Au collège Notre-Dame de Mont Roland, classe de quatrième



Un triple objectif

- satisfaction esthétique ;
- décorer la salle de classe ;
- travail autour des polyèdres réguliers convexes
  (liste, noms, caractéristiques géométriques telles que nombre de faces, de sommets, d'arêtes, degré des sommets).

Le principe

- représenter d'un polyèdre régulier convexe en « l'étoilant » ;
- produire des modules (prévoir le nombre de modules nécessaires) ;
- assembler les modules de façon à assembler une puis plusieurs pyramides (chaque pyramide correspondant à une face du polyèdre choisi).

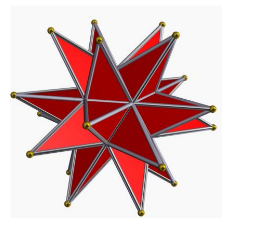
Les solides réguliers

1) Voici les cinq solides réguliers « convexes » :

a) b) c) d) e)

Voici un polyèdre régulier non convexe :

(si on se déplace en ligne droite d'un point du solide à un autre point, on peut sortir de la figure)



Pourquoi dit-on que les cinq premiers solides sont réguliers ?

2) Attribue à chaque nom, le numéro du solide qui lui correspond :

Cube ……, Tétraèdre ……., Octaèdre ……., Icosaèdre …….., Dodécaèdre ……

3) Complète au maximum le tableau suivant :

Nom	**Forme des faces**	**Nombre de faces (F)**	**Nombre de sommets (S)**	**Nombre d'arêtes (A)**	**Nombre d'arêtes se rejoignant en un sommet**
Tétraèdre					
Octaèdre					
Icosaèdre					
Cube					
Dodécaèdre					

4) Dans chaque cas, calcule **S+F-A** . Qu'observe-t-on ?

5) Dans le polyèdre étoilé, quel polyèdre régulier retrouve-t-on si on « scie » les pyramides ?

Étude des solides

Voici les résultats concernant les cinq polyèdre réguliers convexes :

Nom du solide initial	**Nombre de faces**	**Nombres de côtés d'une face**	**Nombre d'arêtes**	**Degré d'un sommet**
Tétraèdre	4	3	6	3
Cube	6	4	12	3
Octaèdre	8	3	12	4
Dodécaèdre	12	5	30	3
Icosaèdre	20	3	30	5

Assemblage

Nom du solide initial	Nombre de modules	Nombre de pyramides autour d'un sommet
Tétraèdre	6	3
Cube	12	3
Octaèdre	12	4
Dodécaèdre	30	3
Icosaèdre	30	5

Tutoriel Module 1

Tutoriel – Module 1

Fig. 1 et 2

Partager une feuille carrée en 4. Puis rabattre les côtés extérieurs sur la médiane.

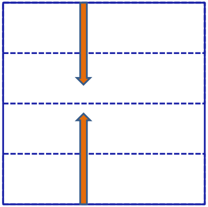


Fig. 3. Replier à l'intérieur les coins supérieur gauche et inférieur droit de la feuille extérieure selon la bissectrice.

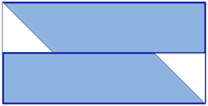
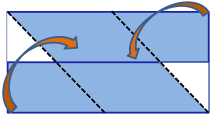
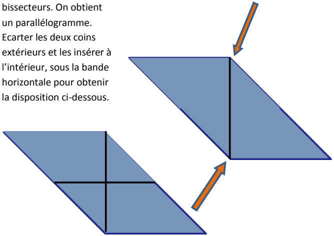


Fig. 3, 4 et 5.

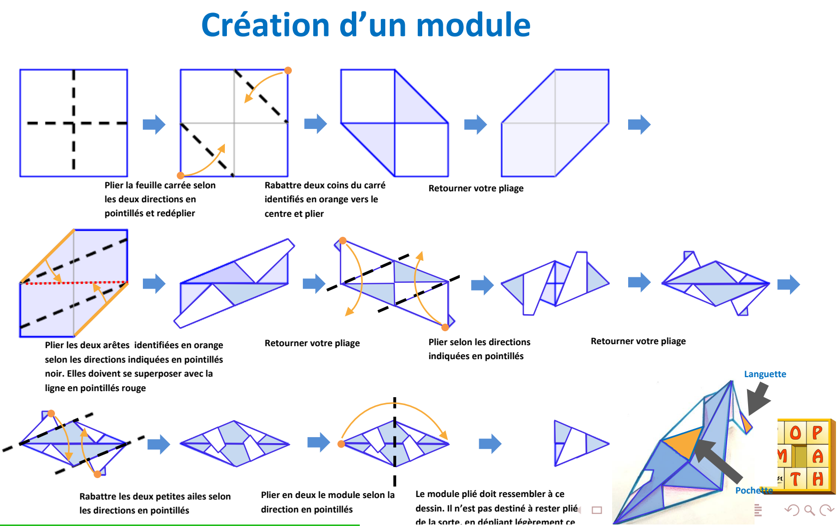
. Plier le long des plis bissecteurs. On obtient un parallélogramme. Ecarter les deux coins extérieurs et les insérer à l'intérieur, sous la bande horizontale pour obtenir la disposition ci-dessous.





Pour finir : rabattre finalement l'extrémité en bas à droite au centre de la croix. Faire de même avec l'extrémité en haut à gauche. (non représenté)

Tutoriel Module 2 (auteur S. Enocq)



Conclusion

Parole d'enseignante :

« *Un constat très net : Au fil de l'atelier [Origami], les élèves se repèrent mieux dans l'espace ou le plan, apprennent à repérer les propriétés des points reliés ou des plis (parallélisme .....) même lorsque l'on se contente de montrer sans explication orale.* »

Les pliages permettent d'apprivoiser la géométrie plane par l'espace. La notion de réflexion y prend tout son sens. C'est une pratique indispensable pour fixer des définitions ou des propriétés de base en géométrie.

Merci de votre attention !

- BOURSIN Didier, LAROSE Valérie, Mathémagie des pliages, ACL - Les éditions du Kangourou Paris, 2000.
- BOURSIN Didier, LAROSE Valérie, Pliages et mathématiques, Maths pour Tous. T . 7, ACL - Les éditions du Kangourou Paris, 1997.
- DELAHAYE Jean-Paul, Les mathématiques de l'origami, Pour la science Hors série n° 97, Oct. Nov. 2017.
- IREM de Rouen, Groupe école élémentaire, Boîte du pâtissier : former des professeurs d'école en mathématiques, Collection : IREM de Rouen Num. R 082, 1993.
- JUSTIN Jacques, Aspects mathématiques du pliage de papier, L'Ouvert. Num. 47. p. 1-14.
  Disponible en ligne sur le site de l'IREM de Strasbourg ou dans la bibliothèque numérique des IREM et de l'APMEP.
- JUSTIN Jacques, Résolution par le pliage de l'équation du 3e degré et applications géométriques, L'Ouvert. Num. 42. p. 9-19.
  Disponible en ligne sur le site de l'IREM de Strasbourg ou dans la bibliothèque numérique des IREM et de l'APMEP.

- JUSTIN Jacques, Trisection d'angles et pliages, PLOT. Num. 28. p. 28.
- LAFOND Michel, Mieux que la règle et le compas : l'origami, Bulletin de l'APMEP. Num. 502. p. 67-78.
- PELTIER Marie-Lise ; HOUDEMENT Catherine ; BUTLEN Denis, Carnets de route de la COPIRELEM. T. 3. La boîte du pâtissier. p. 47-55, Association pour l'élaboration et la diffusion de ressources pédagogiques sur l'enseignement des mathématiques à l'école (ARPEME) Paris, 2003.
- CHAPPAZ Jacques, MICHON Florence, Il était une fois... la boîte du pâtissier, Grand N. Num. 72. p. 19-32, IREM de Grenoble, Grenoble, 2003.
  Disponible en ligne sur le site de l'IREM de Grenoble.

- Sur le portail des IREM, rubrique CII Pop'math, construction de solides pop'up.
  http ://www.univ-irem.fr/spip.php ?rubrique480
- Autour de la boîte du pâtissier
  - maths.ac-creteil.fr/IMG/pdf/boite(soustiret)patissier.pdf
  - https ://www.apmep.fr/IMG/pdf/Atelier(soustiret)L02.pdf
- Diaporama de Christiane Rousseau, Université de Montréal
  http ://www.dms.umontreal.ca/ rousseac/Origami.pdf
- Laboratoire de mathématiques de Rouen
  http ://lmrs.univ-rouen.fr/Vulgarisation/Origami/origami.html

Références

[1] A.S.Conrad. *The theory of the flexagon*.
http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/oldweb/pflexagon.html, 1962.

[2] Jean-Paul Delahaye. *Mathématiques pour le plaisir*. Belin-Pour la science, 2010.

[3] Arthur Engel. *Processus aléatoires pour les débutants*. Cassini, 2011.

[4] Mickaël Launay. *Hexaflexagones : la multiplication des faces*.
https://www.youtube.com/watch?v=aQo8tYQuWQw, 2015.
Youtube, chaîne Micmaths.

L'article de Jean-Paul Delahaye :
http://www.lifl.fr/~jdelahay/pls/2005/131.pdf

L'article de Martin Gardner (en anglais) :
http ://assets.cambridge.org/97805217/56150/excerpt/9780521756150_excerpt.pdf

Vidéos déjanteés de Vi Hart : (mots clés sur un moteur de recherche : Vi Hart flexagon)
https ://www.youtube.com/watch ?feature=player_embedded&v=VIVIegSt81k
https ://www.youtube.com/watch ?feature=player_embedded&v=paQ10POrZh8
https ://www.youtube.com/watch ?v=AmN0YyaTD60

Un logiciel qui permet de créer des trihexaflexagones à partir de photos :
http ://britton.disted.camosun.bc.ca/fotothf/fotothf.htm

Un site très bien fait :
http :/www.flexagon.net

Pour une étude sérieuse des flexagones (en anglais) :

http ://delta.cs.cinvestav.mx/∼mcintosh/oldweb/pflexagon.html
http ://www.drking.org.uk/hexagons/flexagons/theory1.html