Mesurer pour de vrai

CII Pop'Math

Des mathématiques dans notre environnement

Lyon - 21 juin 2018

1. Histoire et mesures

2. Instruments de mesures
   - Le bâton de Gerbert
   - La croix du bûcheron
   - L'équerre articulée
   - Le carré géométrique
   - L'arbalestrille

3. Comment ça marche ?

Bref survol

- Pas d'instruments scientifiques datant de la préhistoire ;
- À Babylone :
  - développement de l'astronomie ;
  - existence d'arpenteurs appartenant à l'administration royale est attestée aux environs de -2000.
- Les grecs abstraient les principes théoriques liés aux savoirs techniques ;

Mesurer la terre et le ciel

- Aristarque (-310,-210) estime les rapports diamètre lunaire/distance terre-lune, diamètre soleil/diamètre terre, diamètre terre/diamètre lune.
- Eratosthène (-274,-197) détermine relativement précisément le rayon de la terre(6266 km au lieu de 6378 km).

Réf. : Regards sur les mathématiques - itinéraires méditerranéens, exposition de l'IREM d'Aix-Marseille, 2013

http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013/

Mesurer des longueurs

- Par report successif d'une unité de longueur donnée et des sous-unités associées, on peut mesurer (ou encadrer) une longueur accessible.

- Mesurer les longueurs inaccessibles est un thème récurrent, fondamental d'un point de vue militaire.

- À partir du Moyen Âge, de nombreux instruments reposant sur des principes élémentaires ont été élaborés pour résoudre ce problème.

  Nous allons vous les présenter dans cet atelier.

Mesurer l'inaccessible

Nous allons examiner les instruments suivants :

- Bâton de Gerbert
- Croix du bûcheron
- Équerre articulée
- Carré géométrique
- Arbalestrille

Quelques animations sur :
`http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/`
(Trucs/Pratique/Arbre et rivière)

Le bâton de Gerbert

Gerbert d'Aurillac (env. 950 à Aurillac, 1003 à Rome), dit le *savant Gerbert*, pape sous le nom de Sylvestre II de 999 à 1003.

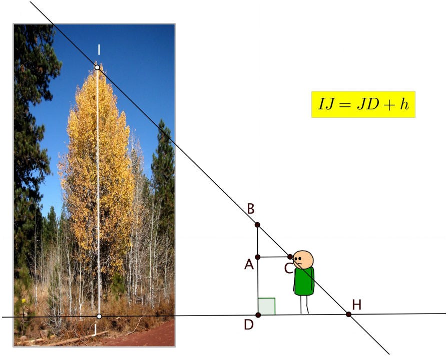
Philosophe, mathématicien et mécanicien.
Il contribua à l'introduction et
à l'essor en Occident de la numération de position, des tables d'opérations et des chiffres dits arabes. »

Gerbert d'Aurillac 950-1003
Philosophe et mathématicien

Dans sa Géométrie, parue vers 1000, Gerbert d'Aurillac explique comment mesurer à l'aide d'un bâton.

Le bâton de Gerbert est un système élémentaire de mesure qui ne nécessite que des connaissances sur le triangle rectangle isocèle (classe de cinquième).

Le bâton de Gerbert



$IJ = JD + h$

Pour mesurer la hauteur *IJ* d'un objet, avec un bâton de Gerbert de hauteur *BD=h* :

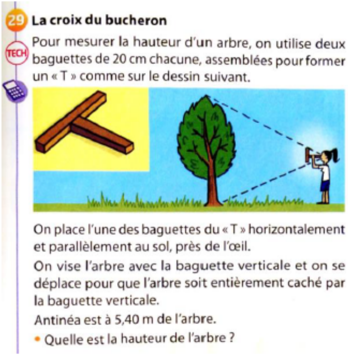
- Maintenir le bâton de Gerbert vertical ;
- Déplacer le bâton jusqu'à l'oeil de l'observateur, les points B, C et le sommet de l'objet à mesurer soient alignés;

La hauteur *IJ* cherchée est la distance entre le pied de l'objet à mesurer et le pied du bâton de Gerbert augmentée de la hauteur du bâton :

IJ=JD+h

Croix du bûcheron

Pas de référence historique, mais une utilisation attestée dans les manuels scolaires !



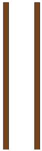
29 La croix du bucheron

Pour mesurer la hauteur d'un arbre, on utilise deux baguettes de 20 cm chacune, assemblées pour former un « T » comme sur le dessin suivant.

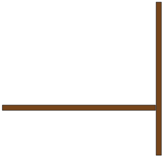
On place l'une des baguettes du « T » horizontalement et parallèlement au sol, près de l'œil.
On vise l'arbre avec la baguette verticale et on se déplace pour que l'arbre soit entièrement caché par la baguette verticale.
Antinéa est à 5,40 m de l'arbre.
• Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Mission Indigo, 2017, cycle 4, p 491

La croix du bûcheron



choisir deux baguettes,
ou deux crayons,
ou deux bouts de branches,
de même longueur.



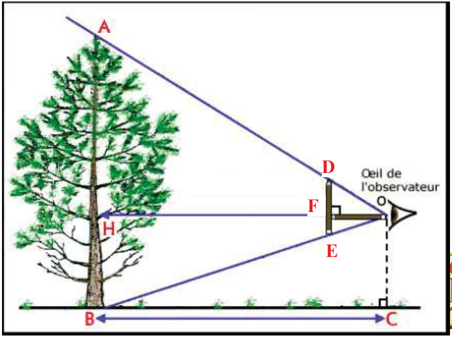
Les positionner perpendiculairement l'une à l'autre, avec l'une verticale, si l'on veut mesurer une hauteur.

Pour l'utiliser :

* positionner l'oeil à l'extrémité libre du bâton horizontal (O)

* viser pour faire coïncider le bas du bâton vertical avec le bas de l'arbre (E et B)

* en maintenant cette visée,
se déplacer pour faire coïncider aussi le haut du bâton vertical avec le haut de l'arbre (D et A)



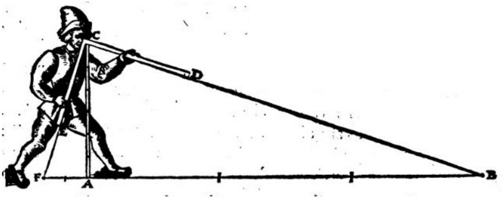
Oronce Fine

Oronce Fine (1494-1555) est un mathématicien, astronome et cartographe français, premier titulaire de la chaire de Mathématiques au Collège de France.

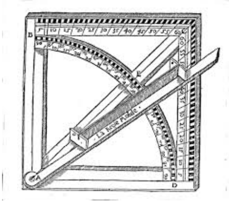
Dans sa *Protomathesis* de 1532, il présente plusieurs instruments de mesure :

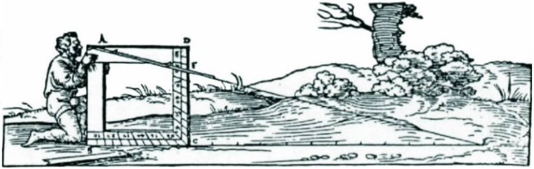
- équerre articulée ;

L'équerre articulée



Le carré géométrique





Le carré géométrique

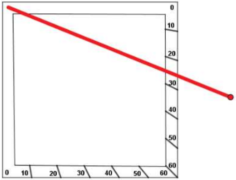
24 Le carré géométrique

Le carré géométrique est un instrument utilisé depuis le Moyen Âge. Il est constitué d'un carré en bois, dont la longueur du côté mesure 2 bras environ (1,1 m), les côtés étant gradués.

- Expliquer comment on peut mesurer une distance sur un sol plat.

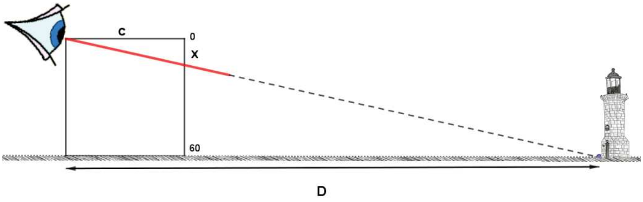
Mission Indigo, 2017, cycle 4, p 490

Le carré géométrique



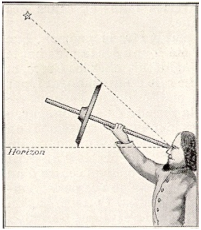
Le stylet pivote autour d'un axe fixé dans un coin du carré.
Les deux côtés opposés à ce coin sont gradués, historiquement de 0 à 60.
Le côté doit être assez grand pour utiliser le carré posé au sol, mais pas trop grand pour être soulevé au niveau des yeux. (Certains documents parlent de 4 pieds.)

Mesure d'une distance



$$D = \frac{60\,c}{x}$$

Levi Ben Gerson



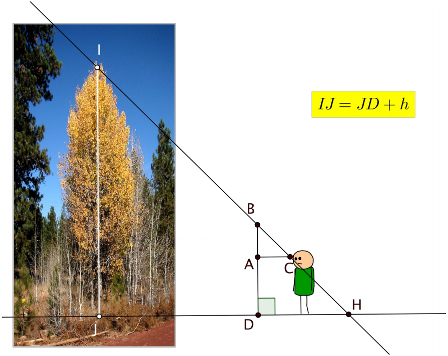
Rabbi Levi ben Gershom ou Gersonide (1288-1344)

Mathématicien, astronome, philosophe et médecin. Il est l'inventeur du *bâton de Jacob* appelé aussi *radius astronomicus*, ou *arbalestrille*, instrument permettant de mesurer la hauteur des astres qui s'est répandu pendant la Renaissance.

L'arbalestrille

À vous de jouer !

Le bâton de Gerbert



$IJ = JD + h$

Pour mesurer la hauteur *IJ* d'un objet, avec un bâton de Gerbert de hauteur *BD=h* :

- maintenir le bâton de Gerbert vertical ;
- déplacer le bâton jusqu'à l'oeil de l'observateur, les points B, C et le sommet de l'objet à mesurer soient alignés;

La hauteur *IJ* cherchée est la distance entre le pied de l'objet à mesurer et le pied du bâton de Gerbert augmentée de la hauteur du bâton :

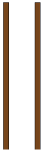
IJ=JD+h

- - - - - - - - - - -

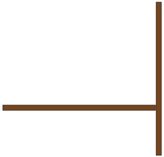
En effet, le triangle *ABC* est rectangle isocèle en *D*, son angle en *B* mesure donc 45°. Le triangle *BDH* qui est rectangle en *D* est également isocèle puisque son angle en *B* mesure 45°, d'où *DB=DH*.
L'angle en *H* du triangle *BDH* mesure donc aussi 45°. On en déduit que le triangle *IJH* qui est rectangle en *J* est également isocèle en *J*, soit :

IJ=JH=JD+DH=JD+DB=JD+h

La croix du bûcheron



choisir deux baguettes,
ou deux crayons,
ou deux bouts de branches,
de même longueur.



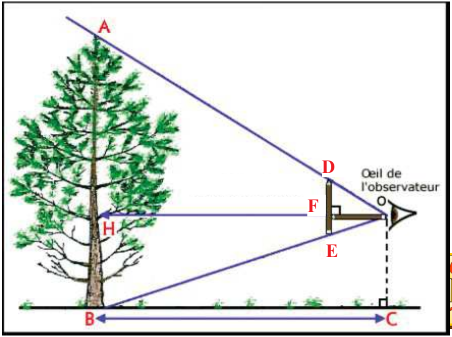
Les positionner perpendiculairement l'une à l'autre, avec l'une verticale, si l'on veut mesurer une hauteur.

Pour l'utiliser :

* positionner l'oeil à l'extrémité libre du bâton horizontal (O)

* viser pour faire coïncider le bas du bâton vertical avec le bas de l'arbre (E et B)

* en maintenant cette visée,
se déplacer pour faire coïncider aussi le haut du bâton vertical avec le haut de l'arbre (D et A)



Dans les triangles OFD et OHA, par exemple :

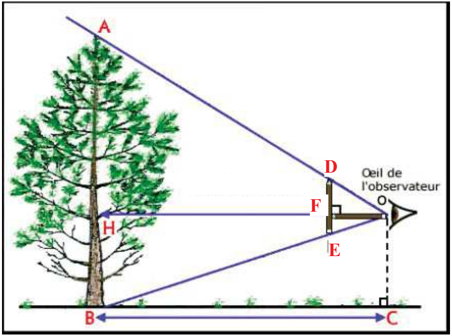
$$\frac{OF}{OH}=\frac{OD}{OA}$$

Dans les triangles ODE et OAB :

$$\frac{OD}{OA}=\frac{DE}{AB}$$

de ces deux égalités, on déduit :

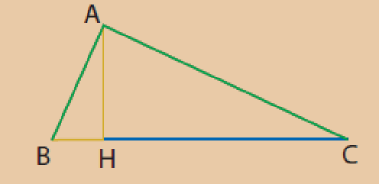
$$\frac{OF}{OH}=\frac{DE}{AB}$$



comme les deux bâtons ont la même longueur, on a $OF = DE$,
donc nécessairement aussi : $OH = AB$ (cqfd)

L'équerre articulée d'Oronce Fine

Mesure de la longueur HC



Les dimensions du triangle ABH sont connues, on utilise la similitude des triangles rectangles ABH et CAH :

$$HC = \frac{AH^2}{HB}$$

Le carré géométrique

Mesure d'une distance

On applique deux fois le théorème de Thalès :

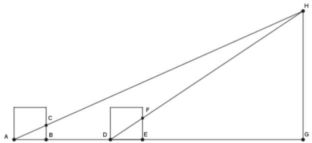
Les droites (AF) et (DC) sécantes en E coupent les droites parallèles (AD) et (BF), donc : $\frac{AD}{DE}=\frac{CF}{EC}$.

Les droites (FA) et (FB) sécantes en F coupent les droites parallèles (AB) et (CD), donc : $\frac{CF}{CE}=\frac{BF}{AB}$.

On en déduit alors que $\frac{BF}{AB}=\frac{AD}{DE}$ ou encore : $BF=\frac{AB}{DE}\times AD$

DE et AB sont exprimés en graduations du côté du carré, AD est la longueur du carré exprimée dans l'unité de longueur choisie.

Le carré géométrique



On applique deux fois le théorème de Thalès :

Les droites (AG) et (AH) coupent les droites parallèles (BC) et (GH), puis les droites (DG) et (DH) coupent les droites parallèles (EF) et (GH). Alors :

$\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{GH}$ et $\frac{DE}{EF}=\frac{DG}{GH}$ ce qui donne $AG=\frac{AB\times GH}{BC}$ et $DG=\frac{DE\times GH}{EF}$.

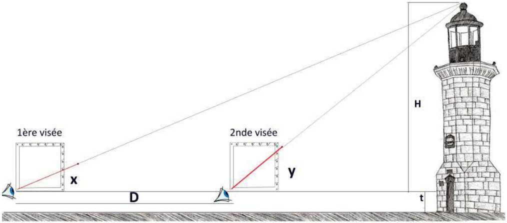
Alors $AD=AG-DE=GH\left(\frac{AB}{BC}-\frac{DE}{EF}\right)$. D'où la formule :

$$GH=AD\times\left(\frac{1}{\frac{AB}{BC}-\frac{DE}{EF}}\right)$$

AD est exprimé dans l'unité de longueur choisie.
AB, BC, DE, EF sont exprimés en graduations du côté du carré.

Le carré géométrique

Mesure d'une hauteur par double visée



$$H = \frac{D}{60}\left(\frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}\right)$$

Le carré est porté au niveau de l'œil. Les côtés sont bien calés sur la verticale et l'horizontale.
Le terrain est supposé horizontal, et il faut être assez éloigné pour que le stylet coupe le côté vertical du carré.
A la première visée, on lit la graduation x. On avance de D. A la seconde visée, on lit la graduation y. H et D sont dans la même unité.
Ne pas oublier d'ajouter t, la hauteur des yeux, pour obtenir la hauteur totale.

Bilan

Instruments	Connaissances	Niveaux
Bâton de Gerbert	triangle rectangle isocèle	$5^{\text{ème}}$
Croix du bûcheron	Triangles semblables	$4^{\text{ème}}$
Équerre articulée	Triangles semblables	$4^{\text{ème}}$
Carré géométrique	Triangles semblables	$4^{\text{ème}}$

Construction

- Relativement facile,
- peu onéreuse,
- peut être l'objet d'une collaboration avec la Technologie.

Une fiche disponible sur le site de la CII pour l'équerre articulée : `http://www.univ-irem.fr/` (CII Pop'math, Diffusion et initiatives de popularisation)

Pour l'arbalestrille :
`http://www.meridienne.org/index.php`page=jacob.construction ?

Bibliographie

- Mesurer des distances inaccessibles avec des bâtons, Thérèse Eveilleau, Bulletin vert de l'APMEP, n° 510 ;
- Instruments scientifiques à travers l'histoire, Élisabeth Hébert, février 2004, Ellipses ;
- Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes, Evelyne Barbin, Nov. 2014, Ellipses ;
- Les instruments de visée « connaissance-en-action », Evelyne Barbin, Juin 2016, Tangente Éducation n°36 ;
- un article de Michel Fréchet.