Exemples d'usage de la notion de limite dans l'enseignement de la physique

Cécile de Hosson, Nicolas Décamp, Nathalie Lebrun *

L'idée de ce document est de présenter à travers quelques exemples, différents sens que peut prendre le terme "limite" lorsqu'il est utilisé par le physicien.

1 Limite d'un modèle

Dans les exemples qui suivent, la notion de "limite" est discutée au regard des modèles usuellement choisis dans le cadre de l'enseignement pour travailler telle ou telle situation du monde physique. On montre que dans les deux cas, les limites du modèle sont souvent implicites, ce qui n'est pas sans poser un certain nombre de difficultés (notamment lorsqu'un même système d'objets est examiné à des échelles différentes (cas de l'alternance des journées et des nuits, des éclipses, de la diffraction), ou lorsque le modèle "mathématique" porte l'évolution du système au-delà de son évolution effective dans le monde "physique" (cas du rebond des balles).

1.1 Le rebond (verticale) d'une balle : limite dans le comptage

La notion de "limite" est mobilisée dans un exemple classique de l'enseignement de la mécanique newtonienne (partie : conservation de l'énergie mécanique) : le rebond des balles

On fait rebondir une bille d'acier lâchée sans vitesse initiale depuis une hauteur h_0, sur une plaque d'acier. Les frottements sont négligés tout au long du mouvement de la bille. La bille subit un grand nombre de rebonds successifs jusqu'à ce qu'elle s'immobilise. L'objectif est de déterminer la distance totale verticale parcourue D et le temps T écoulé jusqu'à l'immobilisation. On peut faire le calcul pour le rebond d'une bille d'acier tombant de 1 mètre sur de l'acier ($k = 0,9$).

Pour répondre à cette question, il suffit de savoir que la grandeur k représente le coefficient de restitution de la bille d'acier, c'est à dire, la capacité de la bille à rebondir sur une surface dont le matériau est identique à celui de la bille. Mathématiquement, k est telle que $v_1 = kv_0$ avec v_0 vitesse de la bille juste avant le premier rebond et v_1 vitesse de la bille juste après le premier rebond. Ce rapport entre la vitesse avant le rebond et après le rebond est identique pendant toute la durée du mouvement de la bille, d'où $v_{n+1} = kv_n$, ce qui, du point de vue des distances d parcourues avant et après un rebond revient à écrire $d_1 = k^2 d_0$. En effet, d'après la loi de conservation de l'énergie mécanique appliquée pendant l'un des rebonds de la bille, E_c(au sommet)$+E_p$(au sommet) $= E_c$(au sol)$+E_p$(au sol) or E_c(au sommet) $= 0$ d'où E_p(au sommet) $- E_p$(au sol) $= E_c$(au sol) donc $mgd = \frac{1}{2}mv^2$ soit $d = \frac{v^2}{2g}$. Pour la distance $D(n)$ parcourue après n rebonds (précisément juste avant le $n+1$ème rebond) on a donc :

$$D(n) = d_0 + 2d_1 + 2d_2 + ... + 2d_n$$

d'où

$$D(n) = d_0 + \sum_{i=1}^{n} 2d_i = d_0 + 2d_1 \sum_{i=0}^{n-1} k^{2i}$$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison k^2 et de premier terme d_1 telle que

$$D(n) = d_0 + 2d_1 \frac{1-k^{2n}}{1-k^2} = d_0 + 2d_0 k^2 \frac{1-k^{2n}}{1-k^2}$$

*Laboratoire de didactique André Revuz (EA 4434)

Or, $0 < k < 1$ donc k^{2n} tend vers 0; d'où $D = 9,57m$

On peut procéder de la même manière pour la durée T totale parcourue par la bille pendant le mouvement, sachant que $t_1 = kt_0$ (puisque d'après le principe de conservation de l'énergie mécanique $v = gt$. On a donc

$$T = t_0 + 2t_1 + 2t_2 + ... + 2t_n$$

D'où

$$T = t_0 + \sum_{t=1}^{n} 2t_n$$

$$T = t_0 + 2t_1 \frac{1 - k^n}{1 - k} = 8,45s$$

Ce qui est remarquable ici, c'est que l'on fait tendre n vers l'infini et qu'on trouve une valeur finie de D et de T alors même que physiquement le nombre n de rebond est fini (à partir du moment où d_n devient du même ordre de grandeur que les déformations de la balle, parler de rebond n'a plus grand sens).

1.2 Optique géométrique : limite dans l'espace

Dans les exemples qui suivent, on examine deux explications schématiques permettant de rendre compte de:

- La raison pour laquelle il fait jour à Paris pendant qu'il fait nuit à Sydney;
- La raison pour laquelle en 1999 l'éclipse était totale à Strasbourg et partielle à Marseille.

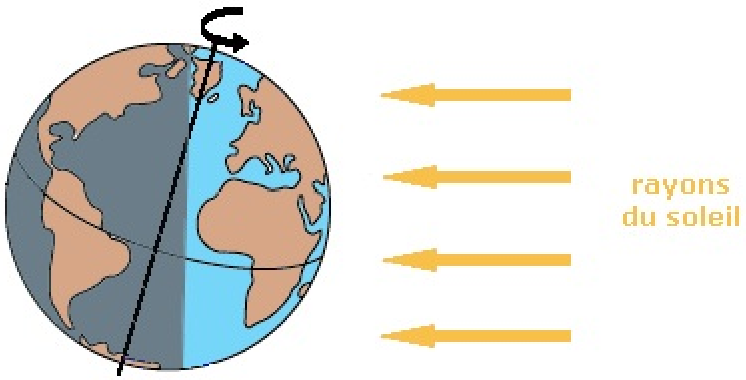

Figure 1: Explication schématique du phénomène d'alternance des journées et des nuits

Dans la plupart des illustrations scolaires, deux types de géométrisation de la propagation de la lumière du Soleil sont mobilisés. Le choix de représenter des rayons parallèles dans le premier cas (voir figure 1)[1] est justifié par le fait que le soleil est lointain, et que les rayons qui en proviennent peuvent être considérés comme quasi-parallèles. Cependant il n'est pas infiniment lointain. Représenter les rayons comme parfaitement parallèles est donc une approximation : on se place dans la situation limite alors qu'elle n'est pas réellement atteinte.

Ce choix est remis en cause dans la deuxième situation, où on fait apparaître un cône d'ombre, et des rayons qui ne sont plus parallèles car la modélisation proposée dans le cas 1 n'est plus suffisante pour rendre compte de la situation (voir figure 2)[2]. Le choix de considérer la limite comme atteinte dépend donc de la situation...

L'affaire se corse dans le cas représenté sur l'œil... Les points A et B sont tous les deux "à l'infini" Les rayons qu'ils envoient sont pour chacun d'entre-eux parallèles Mais les rayons provenant de A ne sont pas parallèles avec les rayons provenant de B, ce qui sous-entend que AB est non seulement à l'infini mais est également un objet infiniment grand... Ce cas des rayons "parallèles" provenant d'objets situés "à

[1] http://www.maxicours.com/se/fiche/1/2/119921.html/e2
[2] http://www.san.asso.fr/naguere/eclipse/ecl_meca.php

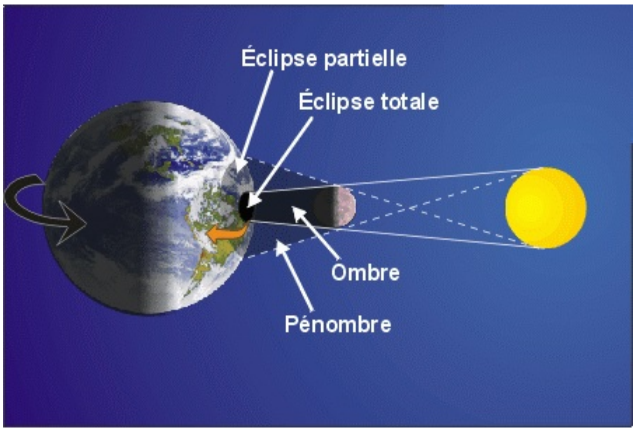

Figure 2: Explication schématique du phénomène d'éclipse totale et partielle

l'infini" se retrouve de manière récurrente en optique géométrique (voir figure 3)[3]. Bien sûr les objets ne sont jamais à l'infini et les rayons ne sont jamais strictement parallèles. Dans notre cas, il faut différencier le fait que la taille de la pupille est suffisamment petite par rapport à la distance entre l'œil et l'objet pour que les rayons provenant d'un point de l'objet soient tous considérés comme parallèle, alors que la taille de l'objet n'est pas négligeable devant la distance oeil objet ce qui justifie que différents points de l'objet envoient des rayons qu'on considère non-parallèles à leur arrivée dans l'œil.

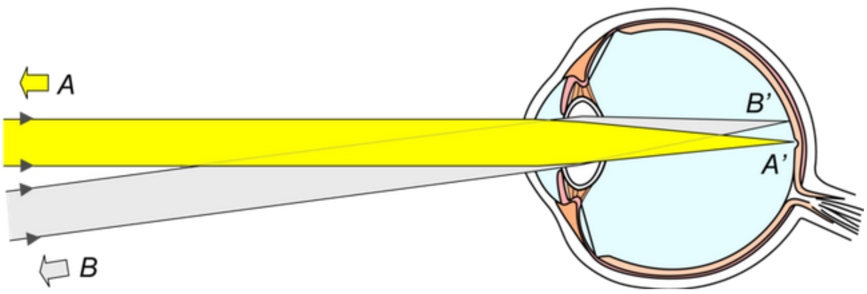

Figure 3: Exemple classique d'explication schématique de la formation d'un point image d'un objet situé "à l'infini"

Toujours dans le rapport entre limite et modèle, si l'on s'intéresse non plus à l'infiniment grand mais à l'infiniment petit, apparaît une autre limite, celle de l'optique géométrique elle-même. Par exemple, le modèle du "rayon lumineux" (ligne droite) n'est plus utilisé lorsque que l'on considère de la lumière passant à travers une fente ou un trou tel que $\sin\theta \simeq \frac{\lambda}{a}$ avec λ longueur de l'onde pour la lumière considérée (voir figure 4)[4].

[3] http://www.afblum.be/bioafb/oeil/oeil.htm
[4] http://www.assistancescolaire.com/eleve/TS/physique-chimie/reviser-le-cours/proprietes-des-ondes-t_pch04

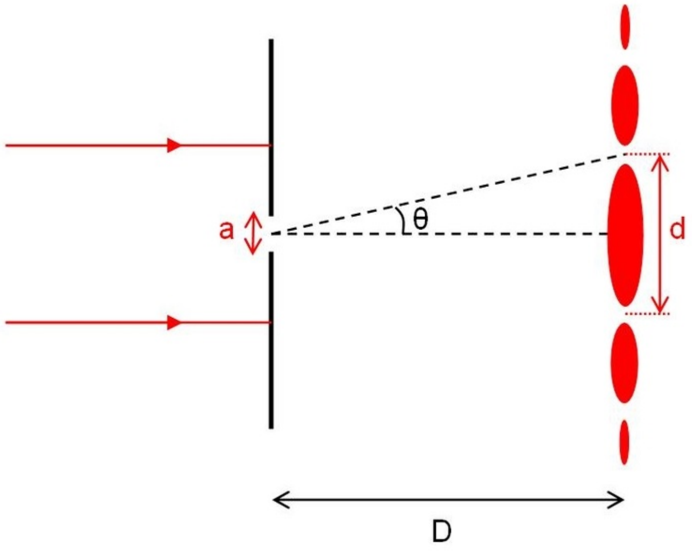

Figure 4: Diffraction par un trou

2 Limite : borne à ne pas dépasser

En physique, on mobilise également l'idée de limite en tant que borne à ne pas dépasser.

2.1 Réfraction : limite d'angle

Par exemple, d'après la seconde loi de Snell/Descartes, il existe un angle pour lequel lorsque la lumière atteint un dioptre (transparent) alors la lumière n'est plus réfractée mais totalement réfléchie (voir figure 5)[5].

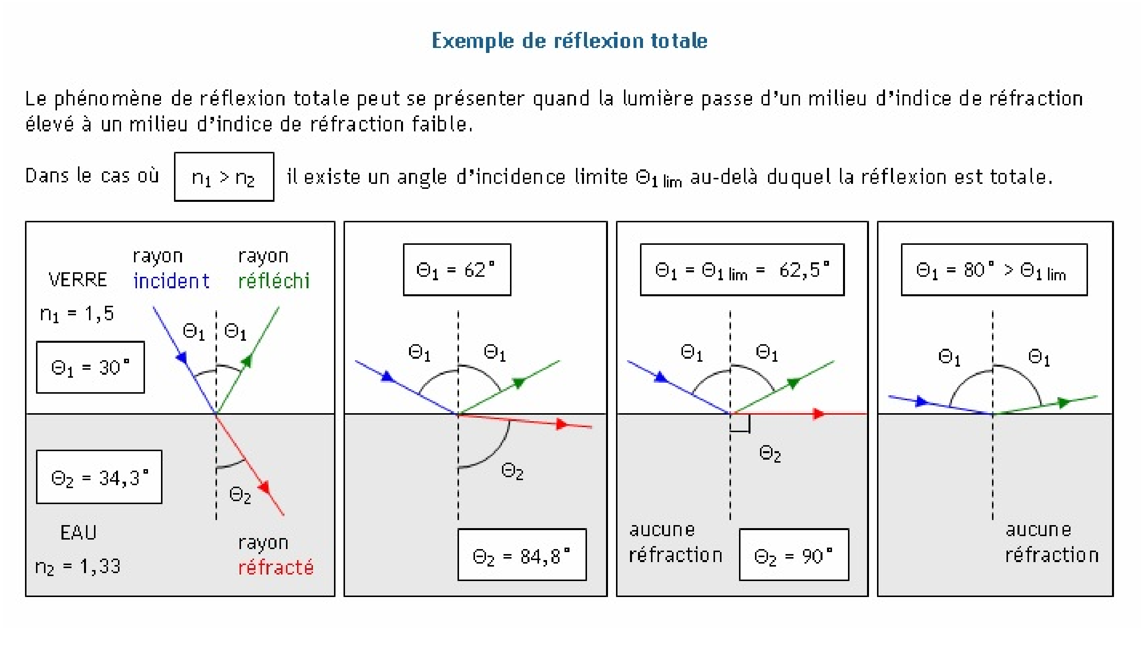

Figure 5: Illustration de la notion d'angle limite

[5]http://www.editions-petiteelisabeth.fr/calculs_optique_3.php

2.2 Chute avec frottements : limite dans le temps

La notion de limite est également mobilisée dans le cas de l'étude de la chute d'une bille dans un fluide (voir figure 6)[6]. Dans cette situation, les frottements ne sont plus négligés et un bilan des forces exercées sur la bille pendant sa chute conduit à l'expression (ie : 2e loi de Newton) :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

avec $\vec{P}$ vecteur poids (force de la Terre sur la bille), $\vec{F}$ vecteur poussée d'Archimède (résultante des forces de pression exercées par le fluide sur la bille), $\vec{f}$ vecteur force de frottement (exercée par le fluide sur la bille) et $\vec{a}$ vecteur accélération de la bille lors de sa chute dans le fluide tel que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

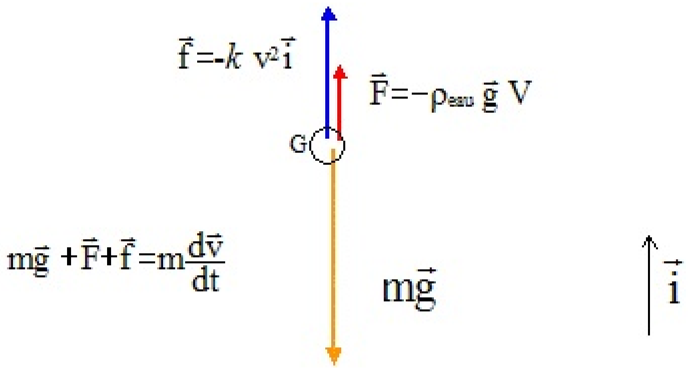

Figure 6: Chute d'une bille dans un fluide

En général, cette situation est utilisée pour faire calculer aux étudiants la vitesse dite "limite" de la bille, c'est à dire, la vitesse maximale atteinte (ie : la vitesse pour $\vec{a} = \vec{0}$ ou encore, la vitesse pour $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0}$). En remplaçant chaque force par son expression on trouve :

$$v_{limite} = \frac{m - \rho V}{k} g$$

Avec m masse de la bille, ρ masse volumique du fluide, V volume de la bille, k coefficient de frottement (lié notamment à la viscosité du fluide) et g constante de gravité.

Ce qui est intéressant ici c'est que cette grandeur v_{limite} peut être obtenue en résolvant l'équation différentielle en $v(t)$ que l'on obtient en appliquant la 2e loi de Newton. On a alors :

$$v(t) = v_{limite}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

où τ est appelé temps caractéristique : il s'agit de l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que la vitesse limite soit atteinte (voir figure 7)[7]. Ce temps est obtenu en regardant l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à l'origine à $v = f(t)$ et l'asymptote $v = v_{limite}$

Dans ce cas, la vitesse limite est à la fois la vitesse qu'on ne dépasse pas en chute libre (sauf si on part avec une vitesse initiale supérieure à limite) et la vitesse vers laquelle on tend quand on fait une chute infiniment longue... Ces deux aspects se retrouvent dans la manière de résoudre le problème :

- soit on se place comme si on était à l'équilibre
- soit on résout l'équation différentielle et on tombe sur une exponentielle

Bien sûr, mathématiquement, encore une fois ces deux solutions sont théoriquement "disjointes" : soit on est à v_{limite} et on n'en bouge pas, soit on ne l'atteint jamais. Le physicien se satisfait d'une solution approximative, il parle de régime transitoire puis de régime permanent, fixe même très arbitrairement un moment au passage de l'un à l'autre (au bout de quelques temps caractéristiques).

[6] http://www.chimix.com/an7/prem/euler1.htm
[7] http://thierry.col2.free.fr/restreint/exovideo_lycee/resum/10_chute_verticale.html

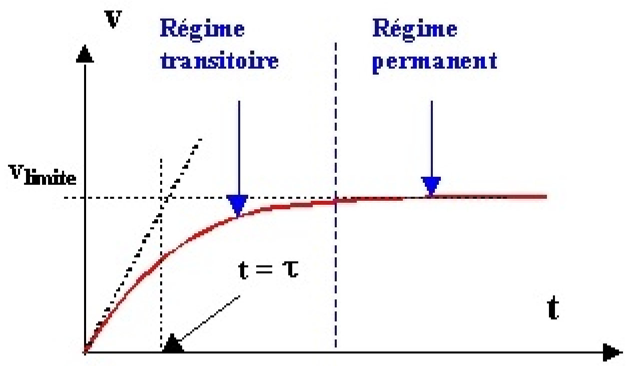

Figure 7: Graphique représentant $v = f(t)$ lors de la chute d'une bille dans un fluide

2.3 Charge d'un condensateur : limite dans le temps

Il s'agit d'un autre exemple classique d'équation différentielle linéaire du premier ordre, avec régime transitoire et régime permanent (à noter : il n'y a plus d'électrocinétique au lycée à l'heure actuelle).

Comme dans l'exemple précédent (chute libre), il y a ambiguïté sur le terme "limite". En mathématique, la limite n'est jamais atteinte, tandis qu'en physique la limite est une borne teinte et qui ne peut être dépassée. La limite en physique est donc considérée comme réellement atteinte et dépend du modèle et de la situation. En revanche en mathématiques, on parlera d'asymptote.

3 Implicites et confusion

Qu'il s'agisse des limites d'un modèle, d'une limite au sens de borne ou du sens classique de limite en mathématiques (suites ou fonctions), le physicien est rarement explicite dans ses expressions ou notations. Ainsi, en ce qui concerne les limites d'un modèle, une fois le modèle défini, on travaille dans le cadre de ce modèle et on passe souvent sous silence les approximations faites au préalable. On ainsi aussi facilement tendance à dire que des rayons provenant de l'infini sont parallèles (plutôt que quasi-parallèle) ou qu'un référentiel est galiléen (plutôt que pouvant être considéré galiléen) par raccourci.
Les notations des physiciens entretiennent ce caractère implicite du passage à la limite: on remarquera que l'expression lim(au sens classique des mathématiciens) apparaît bien peu :

- vitesse instantanée $\frac{dx}{dt}$ au lien de $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$
- variation de charge $\frac{dq}{dt}$ au lien de $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$
- énergie potentielle $E_p(\infty) = 0$ au lieu de $\lim\limits_{x \to +\infty} E_p(x) = 0$
- vitesse limite $v_{limite} = \frac{m-\rho V}{k} g$ ou $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = v_{limite}$

Enfin, les différentes acceptions du terme se recouvrent parfois partiellement (comme dans le cas du rebond ou dans celui de la chute avec frottement) ce qui contribue à la confusion autour de ce terme.