La notion de « limite de fonction » : quelques exemples d'évolution au cours des diverses réformes de l'enseignement secondaire

Nicolas Grenier-Boley, Université de Rouen et LDAR (Université Paris 7)

Le but de cette courte section est de comparer sur quelques points le traitement de la notion de limite de fonction en classe de Première par les différentes réformes qui ont marqué l'enseignement secondaire des mathématiques pendant la seconde moitié du XXè siècle : la réforme des mathématiques modernes des années 1970, la contre-réforme des années 1980, son ajustement au milieu des années 1980 et les réformes de 1990 et de 2001. Pour ce faire, nous avons consulté à ce sujet des manuels issus des diverses réformes (datant respectivement de 1971, 1982, 1988, 1990 et 2001). Nous ne visons pas à l'exhaustivité dans ce domaine mais souhaitons plutôt insister sur certains traits caractéristiques[1]. Pour éviter de trop nombreuses répétitions, nous réfèrerons à ces manuels en mentionnant leur année de publication.

De nombreuses recherches ont montré les difficultés profondes des élèves (puis des étudiants) relativement à la conceptualisation de la notion de limite. Certaines d'entre elles attribuent une part de ces difficultés à des obstacles épistémologiques (conception de la limite comme infranchissable et non-atteignable ou conception de la limite comme un processus algébrique « fini », par exemple), d'autres pointent le double statut opérationnel et structural de la notion ou encore les problèmes liés à sa formalisation progressive[2].

Historiquement, la notion de limite n'est pas apparue pour résoudre de nouveaux problèmes mais pour fonder l'analyse et l'enseigner (Cauchy, 1811) et il n'y a donc pas de situation fondamentale à son introduction. Plus précisément, la notion de limite est une notion FUG au sens d'Aline Robert, c'est à dire une notion formalisatrice, unicatrice et généralisatrice (elle unit et généralise des notions vues précédemment par le biais d'un nouveau formalisme). Les différents manuels consultés abordent le problème de l'introduction de cette notion différemment : par sa définition formelle (1971), en ayant recours à l'intuition (1982) ou par la pratique mais dans des situations plus resteintes qu'en 1982 (1990). En ce qui concerne la réforme de 2001, nous avons vu que la notion de limite n'est pas ou peu approchée. Le terme « limite » y est introduit pour pouvoir définir le nombre dérivé et comme synonyme de « assez proche de » : on espère peut-être ainsi naturaliser son emploi pour les situations ultérieures d'études de fonctions et de suites[3].

On peut également repérer une évolution du langage associé à la notion de limite dans ces manuels. Sans surprise, le langage des limites dans le manuel de 1971 est celui de la « logique formelle ». En 1982, les auteurs du manuel prônent un langage encore formel mais plus intuitif, c'est à dire selon eux « un langage parlé moins rigoureux et savant mais peut-être plus simple qu'une belle définition ». Avec les réformes de 1988 puis de 1990, le langage formel disparaît au profit d'un langage proche de la pratique avant de devenir, en 2001, un langage basé sur l'intuition.

Parallèlement les diverses réformes ont, à chaque fois, profondément modifié les types de limites abordés dans le programme : tous types de limites (1971), limites en zéro presqu'exclusivement (1982), à nouveau tous types de limites d'une manière plus opérationnelle et moins formelle qu'en 1971 (1990). En 2001, les types de limites abordés sont plus restreints mais des théorèmes admis portant sur « l'algèbre des limites » sont donnés aux élèves.

---

1 Le lecteur intéressé plus largement par l'évolution de l'enseignement de l'analyse pourra consulter l'article de Michèle Artigue (1996) « Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994) », eds. Bruno Belhoste et al., Les sciences au lycée: un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger (Paris: Vuibert), 195-217.
2 On pourra à ce niveau se référer à Michèle Artigue (1996) « L'enseignement des débuts de l'analyse, problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques », J.A Dorta, Diaz et alii (eds), La Universidad de la Laguna, Tenerife, 27-53.
3 Voir la contribution de Denise Grenier pour des précisions sur tous ces points.

L'ordre d'exposition des notions varie aussi. Malgré quelques différences, les manuels des réformes de 1971 à 1990 respectaient l'ordre d'introduction limite-continuité-nombre dérivé. Au contraire, le programme de 2001 choisit de présenter le nombre dérivé puis les limites en classe de Première avant d'aborder la continuité en classe de Terminale. Il nous semble que cette concession à la logique d'exposition des notions est susceptible de favoriser les difficultés liées aux conceptualisations de ces différentes notions et de contribuer à accentuer la rupture établie entre enseignement secondaire et enseignement supérieur du point de vue de l'analyse. Doit-on alors s'étonner de trouver tant de raisonnements « continu implique dérivable » chez nos étudiants ?

En réaction à la réforme des mathématiques modernes qui pensait les mathématiques (et donc l'analyse) comme la conjonction d'un univers de structures et d'un langage formel, la contre-réforme de 1980 place l'enseignement de l'analyse au sein du champ de l'approximation, réduisant au strict nécessaire la place du formalisme pour se concentrer de façon qualitative et quantitative sur la résolution de problèmes. Il semble que le champ de l'approximation soit quasiment déserté par la réforme de 2001 et/ou la traduction qu'en font les manuels.

Pour finir, signalons qu'une nouvelle réforme des programmes de mathématiques de Première et de Terminale est en train de se mettre en place. La manière d'introduire la notion de limite et sa place dans une progression pédagogique pourrait alors évoluer notamment en lien avec la nouvelle manière d'introduire la notion de fonction dans les nouveaux programmes de troisième et de seconde.