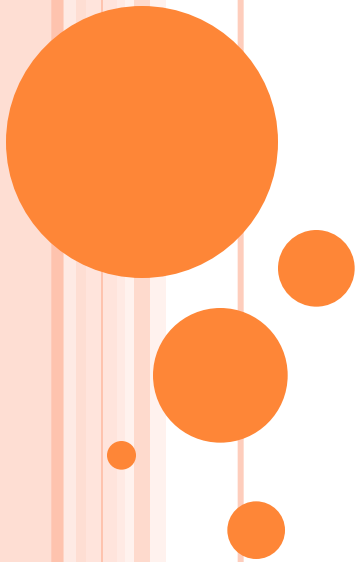
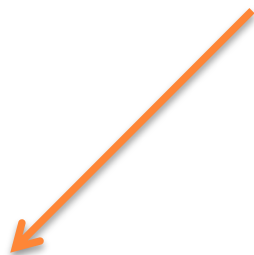


# LES PUISSANCES EN 4<sup>E</sup>

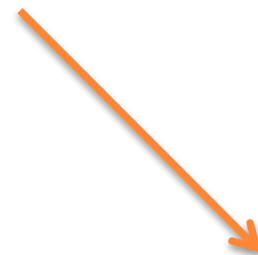
Parcours d'études et de  
recherche autour des puissances  
en classe de 4<sup>e</sup>



## PARCOURS SUR LES PUISSANCES : 2 ACTIVITÉS



Situation sur les bactéries  
issue de la **SVT**  
*Travail en 2 parties*



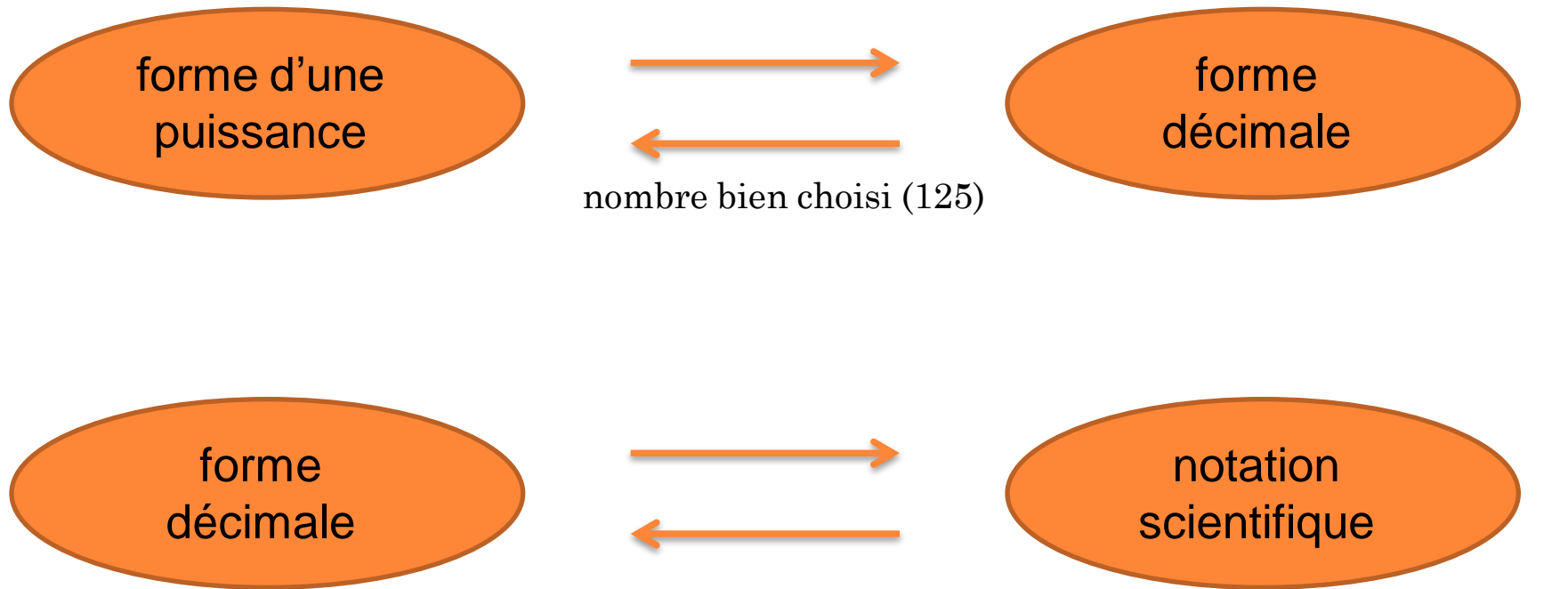
Situation sur « SOBIG »  
issue du domaine  
**informatique**  
*Travail en 2 parties*



# LES DIFFÉRENTS TYPES DE TÂCHES RENCONTRÉS

## LES TRANSFORMATIONS D'ÉCRITURES DES

### NOMBRES DÉCIMAUX NON NULS



# LES DIFFÉRENTS TYPES DE TÂCHES RENCONTRÉS

## LES CALCULS

- Calculer un produit de puissances
- Calculer un quotient de puissances
- Calculer une puissance de puissances



# LES DIFFÉRENTS TYPES DE TÂCHES RENCONTRÉS LES PROBLÈMES

**Reconnaître une situation qui relève d'un modèle multiplicatif répété, et l'interpréter grâce à une puissance**



# SITUATION DE DÉPART

## LES BACTÉRIES -PARTIE 1

Un laboratoire fait des recherches sur le développement d'une population de bactéries.

On observe que le nombre de bactéries est multiplié par 3 toutes les heures à partir du moment où l'étude a commencé.

Par combien le nombre initial de bactéries a-t-il été multiplié au bout de 24 heures ?



# OBJECTIFS DE LA SITUATION

- Introduire la notation puissance d'exposant entier positif comme écriture condensée d'une multiplication réitérée
- Introduire la multiplication d'un nombre décimal par une puissance de dix d'exposant entier positif
- Introduire les propriétés sur les puissances



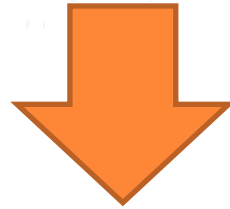
# LA RECHERCHE DES ÉLÈVES

- Travail individuel
- Travail en groupes ( 3 ou 4 )

Première réponse



Handwritten student work showing a multiplication problem:  $13 \times 24 = 78$ . A vertical line is drawn through the equation, possibly indicating a correction or a specific step in the student's reasoning.



Confusion entre modèle multiplicatif et modèle additif





# CONFUSION ENTRE $3^{24}$ ET $3 \times 24$

Il s'agit d'une erreur récurrente que l'on retrouve lors de la confusion entre :

- $2x$  et  $x^2$
- $\pi \times \text{diamètre}$  et  $\pi \times \text{rayon}^2$

Confusion entre multiplication et addition



Sens des opérations



# LES DIFFÉRENTES PISTES

## Utilisation de la calculette

$$\begin{array}{l} 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \\ 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \\ 2,82429 5365 \times 10^{11} \end{array}$$

Problème : que signifie  $10^{11}$  ?



# LES DIFFÉRENTES PISTES

## Écriture étape par étape en partant de 10 bactéries

	Bactéries	10
1)	$10 \times 3 = 30$	
2)	$30 \times 3 = 90$	
3)	$90 \times 3 = 270$	
4)	$270 \times 3 = 810$	
5)	$810 \times 3 = 2430$	
6)	$2430 \times 3 = 7290$	
7)	$7290 \times 3 = 21870$	
8)	$21870 \times 3 = 65610$	
9)	$65610 \times 3 = 196830$	
10)	$196830 \times 3 = 590490$	
11)	$590490 \times 3 = 1771470$	
12)	$1771470 \times 3 = 5314410$	
13)	$5314410 \times 3 = 15943230$	
14)	$15943230 \times 3 = 47829690$	
15)	$47829690 \times 3 = 143489070$	
16)	$143489070 \times 3 = 430467210$	
17)	$430467210 \times 3 = 1291401630$	
18)	$1291401630 \times 3 = 3874204890$	
19)	$3874204890 \times 3 = 11622614670$	
20)	$11622614670 \times 3 = 34867844010$	
21)	$34867844010 \times 3 = 104603532030$	
22)	$104603532030 \times 3 = 313810596290$	
23)	$313810596290 \times 3 = 941431788870$	
24)	$941431788870 \times 3 = 2824295366610$	
25)	$2824295366610 \times 3 = 8472886099830$	

Problème : que signifie  $10^{12}$  ?



# LES DIFFÉRENTES PISTES

## Introduction d'une lettre

Calcul :  $1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

Calcul pour 2 bactéries :  $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

Quand on connaît pas le nombre de bactéries :  $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$



# LES DIFFÉRENTES PISTES

**Avec des multiplications posées à la main  
avec des regroupements**

Three different ways to calculate  $3^8$  using regrouping:

Method 1:  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$  is grouped into  $(3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$ , which are  $9 \times 9 \times 9 \times 9$ , and finally  $81 \times 81$ .

Method 2:  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$  is grouped into  $(3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$ , which are  $27 \times 27 \times 27$ , and finally  $81 \times 81$ .

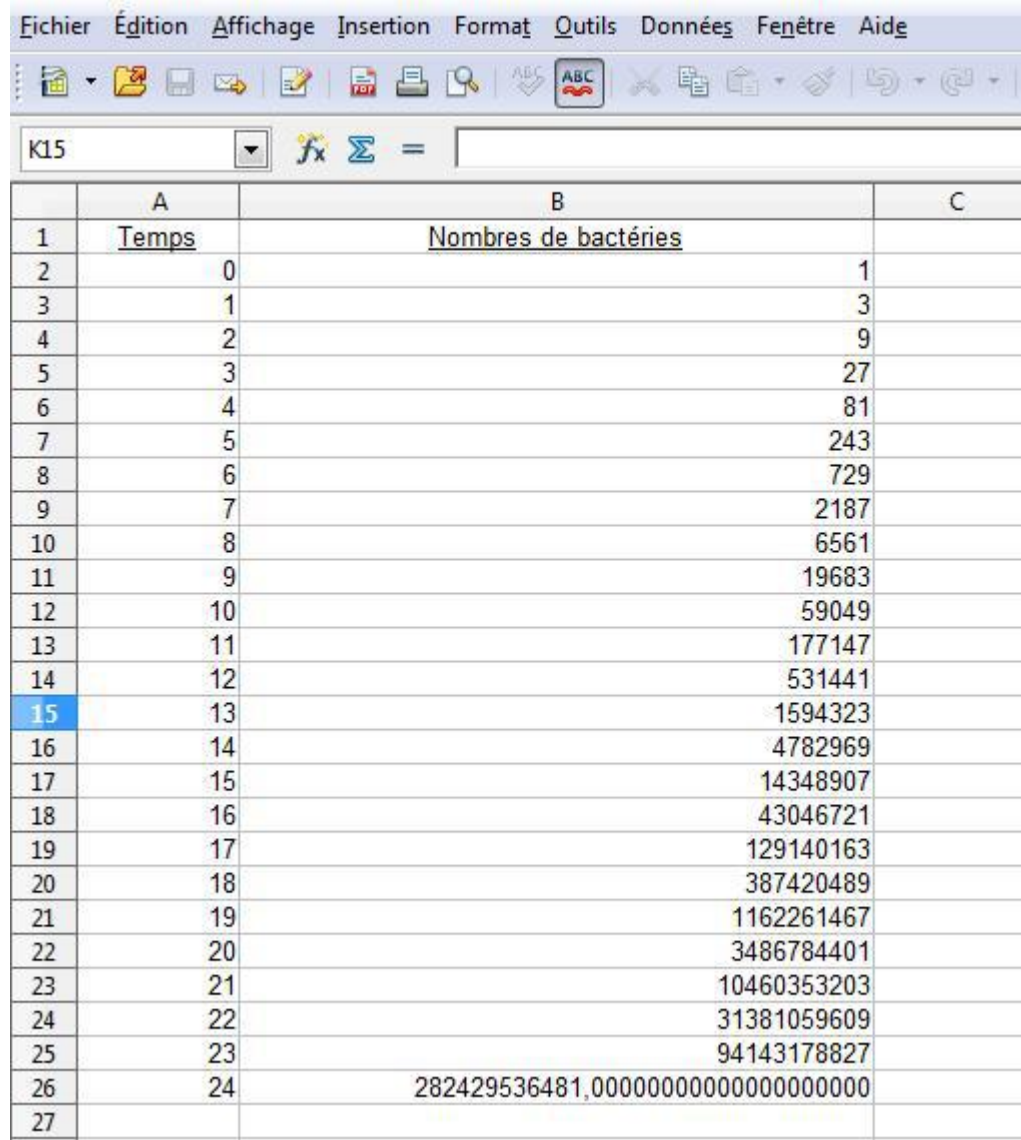
Method 3:  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$  is grouped into  $(3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$ , which are  $9 \times 9 \times 9 \times 9$ , and finally  $81 \times 81$ .

Long multiplication of  $81 \times 81 \times 81 \times 81 \times 81 \times 81$  resulting in  $6561 \times 6561 \times 6561$ , and finally  $43046721$ .



# LES DIFFÉRENTES PISTES

## Avec le tableur



The screenshot shows a spreadsheet application window with a menu bar (Fichier, Édition, Affichage, Insertion, Format, Outils, Données, Fenêtre, Aide) and a toolbar. The active cell is K15. The spreadsheet contains the following data:

	A	B	C
1	<u>Temps</u>	<u>Nombres de bactéries</u>	
2	0	1	
3	1	3	
4	2	9	
5	3	27	
6	4	81	
7	5	243	
8	6	729	
9	7	2187	
10	8	6561	
11	9	19683	
12	10	59049	
13	11	177147	
14	12	531441	
15	13	1594323	
16	14	4782969	
17	15	14348907	
18	16	43046721	
19	17	129140163	
20	18	387420489	
21	19	1162261467	
22	20	3486784401	
23	21	10460353203	
24	22	31381059609	
25	23	94143178827	
26	24	282429536481,00000000000000000000	
27			



## BILAN ORAL DES PISTES ET DES SOLUTIONS

- Le groupe ayant fait des regroupements n'a pas réussi à conclure.
- La plupart des groupes ont utilisé la calculette et sont restés bloqués à l'étape 21.
- Certains ont inventé un nombre de bactéries au départ.(10)
- D'autres ont utilisé une lettre pour désigner le nombre initial de bactéries.( $x$ )

Deux groupes seulement ont abouti à un résultat, qui doit être vérifié par le groupe classe.



# SYNTHÈSE ORALE

Le groupe tableur trouve : 282 429 536 481

Le groupe calculette trouve : 282 429 536 500



Les résultats sont différents !  
Qui a tort ? Qui a raison?



Explication et exploration des deux solutions





# EXPLORATION DE LA PISTE « CALCULETTE »

Au bout de...	Calcul du nombre de bactéries	Notation	Nombre de bactéries
0 h	$x$	$x$	$x$
1 h	$x \times 3$	$x \times 3^1$	$3x$
2 h	$x \times 3 \times 3$	$x \times 3^2$	$9x$
3 h	$x \times 3 \times 3 \times 3$	$x \times 3^3$	$27x$
...			
20h		$x \times 3^{20}$	$3486784401x$
21 h		$x \times 3^{21}$	$1,04603532 \times 10^{10}x$

Résultat calculette



## EXPLORATION DE LA PISTE « CALCULETTE »

- Travail de la notation  $a^n$  où  $n$  est un nombre entier positif.
- Exercices et automatismes sur la notation puissance.
- Travail sur la compréhension de l'écriture de la calculette :

$$1,04603532 \times 10^{10}$$

- Travail et exercices sur les puissances de dix  
→ Multiplication par une puissance de dix
- Reprise de l'activité des bactéries en séance plénière et vérification du résultat trouvé par le groupe au bout de 24 heures.



## EXPLORATION DE LA PISTE «TABLEUR »

- Séance informatique
- Travail sur l'utilisation d'une formule avec le tableur
- Vérification du résultat trouvé par le groupe.



## DÉBAT : 282 429 536 481 OU 282 429 536 500 ?

- Un élève : «L'ordinateur est plus puissant ! »
- Un élève : «Le résultat doit être un multiple de 3 ! »
- Le professeur : « Comment reconnaître un multiple de 3 ? »
- Yann : « Les deux derniers chiffres doivent être dans la table de 3 ! »
- Le professeur : « 112 est alors un multiple de 3 selon la règle de Yann. Est-ce vrai ? »
- « Comment reconnaître les multiples de 2 ? de 5 ? et de 9 ? de 3 ? »



## CONCLUSION DU DÉBAT

Le résultat trouvé grâce à la calculette :

282 429 536 500

$$2+8+2+4+2+9+5+3+6+5+0+0 = 46$$

Conclusion :

- Ce résultat n'est pas un multiple de 3.
- Réponse fausse de la calculette.
- Mise en évidence des limites de la calculette.



# REPRISE DE L'ACTIVITÉ DES BACTÉRIES

**Oui mais sans calculette et sans ordinateur !**

**Reprise de la piste du groupe ayant utilisé des regroupements !**



# PRODUCTION D'UN GROUPE

Utilisation de  $3^{24} = 3^{20} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$3 \times 3 \times 3 \times 3$

3686784401  
x 3  
-----  
104603653203  
3  
-----  
13810959609  
3  
-----  
30632868827  
3  
-----  
91298506481

1  
2  
2  
2  
1  
2  
2  
2  
2  
2



# PRODUCTION D'UN AUTRE GROUPE

Utilisation de  $3^{24} = 3^{20} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{20} \times 81$

$$\begin{array}{r} 3486784407 \\ \times \qquad \qquad \qquad 81 \\ \hline 3486784407 \\ 27894275208. \\ \hline 282429536481 \end{array}$$





# PRODUCTION D'UN AUTRE GROUPE

Utilisation de  $3^{24} = 3^{16} \times 3^8 = 43046721 \times 6561$

$$\begin{array}{r} 43046721 \\ \times 6561 \\ \hline 43046721 \\ + 2582803260 \\ + 21523360500 \\ + 258280326000 \\ \hline 282429539481 \end{array}$$

282 429 539 481 00



# CONCLUSION

Cette situation de recherche a permis l'introduction de la propriété :

$$a^{n+m} = a^n \times a^m$$

où  $m$  et  $n$  sont des nombres entiers positifs et  $a$  un nombre décimal non nul.



# SOBIG-PARTIE 1

## Recherche documentaire sur Sobig

Qui est-ce que Sobig ?

Sobig est un virus informatique qui a infecté en août 2003 des millions d'ordinateurs. Il utilisait une faille présente dans tous les systèmes d'exploitation Windows ultérieurs à Windows 95 de Microsoft.

Il est apparu sous 6 noms différents : Sobig.A, Sobig.B, Sobig.C, Sobig.D, Sobig.E, Sobig.F.



# SOBIG-PARTIE 1

## Situation

Le virus « SOBIG.F » est un ver informatique qui se propage par e-mail. Il se présente sous la forme d'un message dont le titre est aléatoire et d'un fichier joint.

Même situation, mais avec une multiplication par 20 à chaque étape.

Combien d'ordinateurs sont infectés par SOBIG.F à la contamination n°24 ?



# SOBIG-PARTIE 1

Calculettes et ordinateurs interdits !  
Mais avec des indices !

**Indice groupe 1** : Au bout de la contamination n°6  
SOBIG infecte 64 000 000 ordinateurs.

→ proposé à un groupe de bon niveau...

**Indice groupe 2** : Au bout de la contamination  
n°8 SOBIG infecte 25 600 000 000 ordinateurs.

→ proposé à un groupe de bon niveau

**Indice groupe 3** : Au bout de la contamination n°19  
SOBIG infecte  $524288 \times 10^{19}$  ordinateurs.

Au bout de la contamination n°5 SOBIG infecte  
3 200 000 ordinateurs.

→ proposé à un groupe de niveau faible.



# SOBIG-PARTIE 1

Calculatrices et ordinateurs interdits !  
Mais avec des indices !

**Indice groupe 4** : Au bout de la contamination n°20 SOBIG infecte  $1\,048\,576 \times 10^{20}$  ordinateurs.  
Au bout de la contamination n°4 SOBIG infecte 160 000 ordinateurs.

➡ proposé à un groupe de niveau très faible.

**Indice groupe 5** : Au bout de la contamination n°10 SOBIG infecte  $1024 \times 10^{10}$  ordinateurs.

➡ proposé à un groupe de niveau moyen

**Indice groupe 6** : Au bout de la contamination n°26 SOBIG infecte  $67108864 \times 10^{26}$  ordinateurs. Au bout de la contamination n°2 SOBIG infecte 400 ordinateurs.

➡ proposé à un groupe contenant une très bonne élève et une élève moyenne.

# SOBIG-PARTIE 1

## Exemple de production

$$20^{24} = 20^{\overset{\vee}{20}} \times 20^4$$

$$20^{24} = 1048576 \times 10^{20} \times 160000$$

$$20^{24} = 1048576 \times 10^{20} \times 16 \times \underbrace{10000}_{10^4}$$

$$20^{24} = 1048576 \times 16 \times 10^{20} \times 10^4$$

$$= 1048576 \times 16 \times 10^{24}$$



# SOBIG-PARTIE 1

$$\begin{array}{r}
 1048576 \\
 \times 16 \\
 \hline
 6291456 \\
 + 10485760 \\
 \hline
 16777216
 \end{array}$$

$$16777216 \times 10^{24}$$

Le nombre <sup>L'ordinateurs</sup> contaminés à la contamination n°24 est de  $16777216 \times 10^{24}$  ou 1677721600000000000000000000000000.





# SOBIG-PARTIE 1

## **Conclusion**

Cette situation a permis de travailler les propriétés des puissances et les faire fonctionner sur des exemples.



# LES BACTÉRIES -PARTIE 2

## Objectif

### Introduire les puissances d'exposant entier négatif

Un antibiotique bactéricide est une molécule qui détruit la croissance des bactéries.

On appelle CMB la Concentration Minimale Bactéricide.

Dans certaines conditions (notamment à 37°C), si on injecte cette quantité minimale bactéricide dans une souche infectée la population de bactéries est divisée à chaque heure par 1,67.

Expliquer pourquoi au bout de 18h de culture, l'antibiotique laisse moins de 0,01% de survivants de la population microbienne. On dit que cette valeur caractérise l'effet bactéricide d'un antibiotique.



# LES BACTÉRIES -PARTIE 2

## Production d'un groupe

	Temps au bout de...	Nombre de bactéries	Notation
$\times 1,67$	0 h	$\infty$	$\infty$
$\times 1,67$	1 h	$\infty : 1,67$	$\infty : 1,67^1$
$\times 1,67$	2 h	$\infty : 1,67 : 1,67$	$\infty : 1,67^2$
$\times 1,67$	3 h		$\infty : 1,67^3$
$\times 1,67$	4		$\infty : 1,67^4$
$\times 1,67$	5		$\infty : 1,67^5$
$\times 1,67$	6		$\infty : 1,67^6$
$\times 1,67$	7		$\infty : 1,67^7$
	...		...
$\times 1,67$	15		$\infty : 1,67^{15}$
$\times 1,67$	16		$\infty : 1,67^{16}$
$\times 1,67$	17		$\infty : 1,67^{17}$
$\times 1,67$	18		$\infty : 1,67^{18}$



# LES BACTÉRIES - PARTIE 2

## Production d'un autre groupe

On prend  $x$  bactéries au départ.  
Au bout d'une heure =  $x \cdot 1,67$   
Au bout de deux heures =  $x \cdot 1,67 = 1,67$  ou  $x \cdot 1,67^2$   
Au bout de dix-huit heures =  $x \cdot 1,67^{18}$   
 $(x \cdot 1,67) : 1,67 = (x \cdot 1,67) \times \frac{x}{1,67} = \left(\frac{x}{1,67} \times \frac{1}{1,67}\right) \times \frac{1}{1,67} = \frac{x}{1,67^2}$   
Au bout d'une heure =  $\frac{x}{1,67}$

Au bout de deux heures =  $\frac{x}{1,67^2}$

Au bout de dix-huit heures =  $\frac{x}{1,67^{18}}$

$$\frac{1}{1,67^{18}} \approx 0,000097972$$

$$0,01\% = 0,0001$$

$$0,0001 > 0,00009$$

Donc notre résultat est plus petit que  
0,01%.



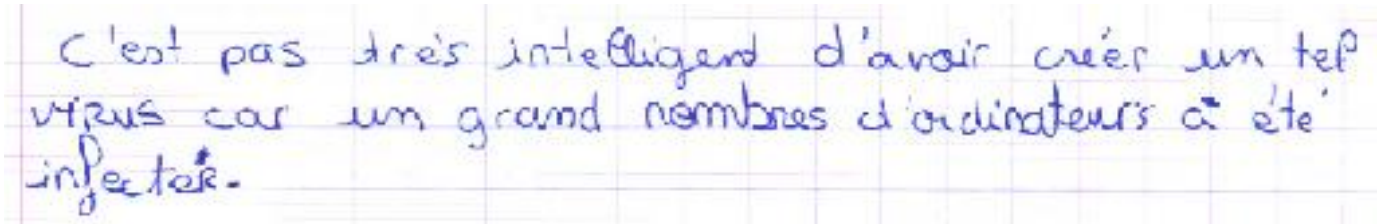
## SOBIG -PARTIE 2

Dans l'activité SOBIG, on trouve qu'au bout de la contamination n°24, ordinateurs sont infectés. Qu'en pensez vous ? Appuyez votre raisonnement par des nombres précis (cherchés sur internet par exemple). Vous ferez preuve d'esprit critique. »



# SOBIG -PARTIE 2

## Les premières réponses des élèves



C'est pas très intelligent d'avoir créer un tel virus car un grand nombres d'ordinateurs a été infecter.

« SOBIG se diffuse très rapidement »

« C'est une virus très costo »

« SOBIG se situe à la première place des virus »

« C'est une virus énorme et qui fait beaucoup de dégâts »

« SOBIG se développe très rapidement »

« Je pense que cela fait beaucoup d'ordinateurs contaminés »...



## SOBIG -PARTIE 2

Mais après ...

Je pense que ça fait beaucoup car nous sommes environ 7 milliard sur Terre et le nombre connu est  $16777216 \times 10^{24}$ .

$$16777216 \times 10^{24} \div 700\,000\,000\,000 \approx 23\,967\,451\,428\,571$$

Il faut dire que nous avons 23 967 451 428 571 ordinateurs par personne.

Le nombre est incroyablement.

## SOBIG -PARTIE 2

Conclusion : toutes les informations trouvées sur internet  
ne sont pas toujours fiables.

Enquête et proposition de solutions  
Au-delà des mathématiques...

Revenons aux mathématiques

« SOBIG est un virus informatique énorme et  
dévastateur. Il se situe à la première place.»

Vrai ou faux ?

Comment pourrait on prouver cette affirmation ?





# SOBIG -PARTIE 2

## Les différentes idées : comparaison avec les autres virus

- le nombre d'ordinateurs infectés
- la vitesse à laquelle le virus s'est propagé
- le pourcentage d'ordinateurs infectés
- les dégâts en terme d'utilisation : certains virus bloquent uniquement internet d'autres bloquent tout
- les dégâts en termes d'argent perdu. (millions de dollars ...)



# CONCLUSION

- Ce parcours a permis de mettre les élèves en situation de recherche et d'enquête.
- Les puissances sont apparues comme une écriture « utile » pour condenser des calculs et pour comparer des nombres.

