Le raisonnement mathématique

L'implication, une notion polysémique

Nous présentons des résultats à deux items d'un questionnaire que nous avons proposé à 68 étudiants de première année d'université de la filère mathématique de l'Université de Yaoundé 1 (Cameroun) et à 61 élève de la classe de Terminale C d'un lycée de la ville de Yaoundé.

1 Le traitement d'une implication ouverte

Déterminer l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 *vérifiant la propriété : « si* x *est pair, alors son successeur est premier ».*

Cet exercice est repris de Durand-Guerrier (2005, p.47).

1.1 Analyse a priori

Dans cet exercice, il s'agit de déterminer un ensemble défini par une propriété caractéristique, qui est un conditionnel, marqué par la présence de « si …, alors … », et donné en langage courant. Il s'agit de passer d'une définition en compréhension à une définition en extension.

Comme nous l'avons dit, cette propriété caractéristique est une implication ouverte ; la variable x n'est liée par aucun quantificateur. On peut la formaliser ainsi :

$$P(x) \Rightarrow Q(x) \text{ (1).}$$

Chaque instance de cette phrase pour une valeur de x contenue dans l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20, est une proposition, plus précisément une implication matérielle $P(a) \Rightarrow Q(a)$ qui est soit vraie, soit fausse. La résolution de cet exercice convoque la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un objet de l'univers du discours (Tarski, 1933), donc renvoie à l'aspect sémantique du traitement de l'implication. L'ensemble recherché est constitué des objets qui satisfont (1).

Nous rappelons qu'un entier naturel est dit *premier*, lorsqu'il possède deux diviseurs distincts, et deux seulement. Par conséquent, 1 n'est pas un nombre premier.

Plusieurs méthodes de résolution peuvent être envisagées :

1. La « méthode directe » qui consiste à remplacer *x* par chaque valeur de l'univers du discours et à donner la valeur de vérité de la proposition obtenue. A l'aide de ce mode opératoire, on pourrait avoir différents résultats :
   1.1. L'apprenant utilise l'implication courante[1] qui consiste à évaluer l'implication seulement dans les cas où l'antécédent est vrai. Ici, les nombres impairs sont rejetés systématiquement. On peut avoir les résultats suivants :
      1.1.1. L'ensemble des nombres pairs privés de 0, 8, 14 et 20 ;
      1.1.2. L'ensemble des nombres pairs privés de 8, 14 et 20, 1 étant pris comme un nombre premier.
      1.1.3. L'ensemble des nombres pairs privé de 20 dans la mesure où 1 est considéré comme un nombre premier ;
      1.1.4. L'ensemble des nombres pairs non nuls, privé de 20 ;

Ces deux réponses peuvent provenir de la confusion entre *nombres premiers* et *nombres impairs*.

Dans les deux premiers cas, l'étudiant fait bien la distinction entre *nombre premier* et *nombre impair*. Produire ces réponses revient à traiter l'implication comme une conjonction. Ce résultat peut également se justifier par la conception sous-jacente suivante : « l'énoncé ne concerne que les pairs » (Durand-Guerrier, 2003, 2005, p.47).

Il faut préciser que, du point de vue linguistique, la mise en œuvre de l'implication courante est congruente[2] à l'énoncé : elle consiste à prendre un nombre et voir s'il est pair :

- S'il est pair, je regarde son successeur, si son successeur est un nombre premier, je le retiens, sinon je le rejette.

Si ce nombre n'est pas pair, je le rejette.

   1.2. L'apprenant connait les règles de vérité d'une implication matérielle, à savoir qu'une implication est vraie lorsque l'antécédent est faux, ou alors antécédent et conséquent sont simultanément vrais. Elle est fausse dans le seul cas où l'antécédent est vrai et le conséquent faux. Ceci peut conduire aux deux résultats ci-dessous selon que 1 est considéré comme un nombre premier ou non :
      1.2.1. L'ensemble des entiers naturels plus petits que 20 privé de 0, 8, 14 qui est le résultat correct ;

[1] L'implication utilisée en dehors du cadre mathématique, dans des situations de la vie courante.
[2] Duval (1998)

1.2.2. L’ensemble des entiers plus petits que 20, privé de 8 et de 14. Il considère ici que 1 est un nombre premier.

2. La deuxième méthode consiste à utiliser la négation de la phrase, ce qui suppose que l’apprenant connaisse la signification de la négation d’une phrase, plus particulièrement d’une phrase ouverte, et sache construire la négation d’un énoncé conditionnel.

   En passant par la négation, il va rechercher les éléments de l’univers du discours qui rendent vraie cette négation, c’est-à-dire les contre-exemples, qu’il va retirer de la liste des valeurs considérées. Ces contre-exemples rendent la phrase initiale fausse.

   La négation de la phrase ouverte $\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ est $(P(x)\ et\ (non\ Q(x)))$ et s’interprète ici par « *x* est un nombre pair et son successeur n’est pas un nombre premier ».

Les entiers pour lesquels la négation est vraie sont 0, 8, 14 et 20. Il est possible que 0 ne figure pas dans cette liste, 1 étant considéré comme un nombre premier. L’ensemble donné sera alors l’univers privé de 8, 14 et 20.

Il faut noter que l’étudiant peut produire d’autres formes de la négation inappropriées. Elles conduiraient probablement à un résultat erroné. Par exemple si l’étudiant considère que la négation est $\big(non\ P(x) \Rightarrow non\ Q(x)\big)$ et utilise l’implication courante, il va retirer tous les nombres impairs dont le successeur n’est pas premier.

3. La troisième méthode met en œuvre la contraposition.

Pour cela, l’étudiant doit savoir qu’une implication matérielle et sa contraposée ont la même valeur de vérité. Comme pour l’énoncé direct, l’utilisation de la contraposée demande une bonne connaissance des conditions de vérité d’une implication, puisqu’en effet la contraposée est aussi une implication.

Nous rappelons que la contraposée de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est $(non\ Q(x)) \Rightarrow (non\ P(x))$. Il s’agit de travailler avec la phrase ouverte « *Si le successeur de x n’est pas premier, alors x n’est pas pair* », qui est plus complexe que la phrase initiale. La propriété « ne pas être premier » s’applique au successeur de x et non à x. L’évaluation de la valeur de vérité d’une instance de cette phrase pour un entier inférieur à 20 *a* donné consiste à x regarder si le successeur de ce nombre est premier :

a) S’il est premier, je rejette *a* ;
b) S’il n’est pas premier, je regarde si *a* est pair ou non ;
   - si a n’est pas pair, je le retiens,

- si a est pair, je le rejette ;

Il faut remarquer que, du point de vue de la logique naturelle, en utilisant la contraposée, tous les nombres passent au crible, contrairement à l'utilisation de l'énoncé initial où on ne considère systématiquement que les nombres pairs.

L'utilisation de la contraposée permet de faire émerger les nombres impairs sauf 1. Les nombres pairs ne sont pas retenus, sauf dans le cas d'un usage incorrect de la contraposée.

Il est possible de voir apparaître en réponse, un ensemble de successeurs plutôt que les nombres dont il est question.

Catégorisation des réponses :

Cet exercice appartient au domaine de l'arithmétique ; la manière de présenter la propriété caractérisant les éléments de l'ensemble est inhabituelle. Il vise à évaluer si les étudiants connaissent les conditions de vérité d'une implication, ou s'ils savent utiliser la négation d'une implication, les deux aspects étant étroitement liés. Notre hypothèse, fondée sur les résultats de recherche et les observations naturalistes, est qu'une majorité d'étudiants ne considérera pas les nombres impairs (Durand-Guerrier, 2003).

Nous indiquons ci-dessous les réponses que l'on peut trouver selon les modalités d'évaluation des implications matérielles mise en œuvre :

A1 : $\{1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19\}$ qui est la bonne réponse, celle qu'obtiendraient ceux qui connaissent les règles de vérité de l'implication matérielle et qui ont utilisé la phrase donnée en énoncé ou sa contraposée, ou encore ceux qui sont passé par la négation de la phrase en identifiant les contre-exemples. L'utilisation correcte de la contraposée permet aussi d'obtenir ce résultat.

A1* : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19\}$ qui est la réponse de ceux qui connaissent les règles de vérité de l'implication matérielle, qui ont utilisé la phrase donnée en énoncé ou sa contraposée et qui ont compté 1 comme un nombre premier.

A2 : $\{2, 4, 6, 10, 12, 16, 18\}$ qui est la réponse de ceux qui ont mis en œuvre l'implication courante ou la conception selon laquelle l'énoncé ne concerne que les nombres pairs (Deloustal-Jorrand (2000-2001), Rogalski & Rogalski (2004)).

A2* : $\{0, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18\}$ qui provient de la même conception que la réponse **A2,** les étudiants ayant considéré 1 comme un nombre premier.

A3 : Un sous-ensemble de l'ensemble des entiers compris entre 0 et 20 qui contient toutes les valeurs qui rendent l'énoncé faux (0, 8, 14, 20). On peut faire l'hypothèse que l'étudiant ne les a pas identifiées, ou fait une confusion entre impair et premier.

A3* : Un sous-ensemble de l'ensemble des entiers compris entre 0 et 20 qui contient deux ou trois valeurs rendant faux l'énoncé.

A4 : $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ qui est la réponse de ceux qui ont utilisé la contraposée de l'énoncé et l'implication courante. Celui qui aurait utilisé en guise de contraposé l'énoncé $non\ P(x) \Rightarrow non\ Q(x)$, et l'implication courante produit également cette réponse.

A5 : L'ensemble de tous les nombres premiers. On mettra également dans cette catégorie l'ensemble des nombres premiers où figure 1, du fait que certains pensent que 1 est premier.

A6 : Toute réponse autre que celles qui ont été énumérées ci-dessus

A7 : pas de réponse

1.2 Analyses a posteriori

1.2.1 Analyse des réponses des étudiants et du module de suivi

Tableau T1(1) : Classement des réponses des étudiants

A1	**A1***	**A2** Implication courante	**A2***	**A3**	**A3***	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**
6 E36/E37/ E46/E54/ E55/E60	4 E22/E44/ E45/E49	27 E02/E03/E08/E09/E10/ E15/E20/E21/E25/E27/ E28/E29/E30/E33/E40/ E42/E43/E47/E51/E52/ E53/E58/E59/E61/E63/ E65/E67/	2 E13/E19	3 E16/E18/ E62	4 E14/E24/ E38/E57	0	2 E01/E64	12 E05/E06/E12/ E17/E23/E26/ E35/E39/E50/ E56/E66/E68	8 E04/E07/ E31/E32/ E34/E41/ E48/E11

Dans la catégorie **A6**, les réponses sont assez disparates :

E23 a donné tous les nombres impairs et aucun nombre pair ; c'est le phénomène que nous avons prévu dans la 3ème méthode de notre analyse a priori.

E56 a donné tous les nombres premiers auxquels il a adjoint 9 et 15. Il est possible que ce dernier fasse une confusion entre nombre premier et nombre impair. En dehors de 2, les nombres qu'il donne sont les successeurs respectifs des valeurs qui rendent l'antécédent vrai : cet étudiant a considéré les successeurs des nombres pairs.

E66 a donné les nombres pairs et premiers : dans sa copie, il donne l'ensemble des nombres pairs, puis l'ensemble des nombres premiers. Il traite cette implication comme s'il s'agissait de $P(x) \vee Q(x)$.

Les étudiants **E05**, **E06**, **E12**, **E17**, **E50** et **E68** ont donné des ensembles constitués essentiellement de nombres pairs. Par exemple :

E05, E12 : $\{2, 4, 6, 12, 16, 18\}$

E50 : $\{2, 4, 6, 10, 12, 16\}$

Ces réponses sont proches de celles de la catégorie **A2**. Nous faisons l'hypothèse que ces étudiants utilisent l'implication courante en faisant des erreurs sur la reconnaissance des nombres premiers.

Les réponses de la catégorie A1 et A1*

Nous faisons l'hypothèse que les étudiants qui ont donné les réponses dans ces catégories, connaissent les règles de vérité d'une implication. Dix réponses se retrouvent dans ces deux catégories soit moins de 15% de l'effectif total.

Les réponses de catégorie A2

Elles représentent 41,2% de la population. Les étudiants mettent en œuvre le conditionnel courant, et ceci montre une persistance l'usage courant de l'implication, même en contexte mathématique : la règle-en-acte selon laquelle on évalue seulement les cas où l'antécédent est vraie, est utilisée. Ce résultat est conforme aux observations naturalistes déjà réalisées (Durand-Guerrier, 2003).

Lors des échanges qui ont eu lieu autour de cet exercice pendant le module de suivi, des désaccords entre les étudiants sont apparus pendant la phase de travail en groupe. Cette conception a été explicitée par certains d'entre eux[3].

> **4 E1** : Nous sommes à la première question. On dit « déterminer l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 vérifiant la propriété : « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier » ». […] Moi, je pense que puisque la propriété s'intéresse aux nombres inférieurs ou égaux à 20 qui vérifient une certaine propriété, il fallait essayer de considérer le fait que le successeur du nombre est premier dans le cas où le nombre lui-même est pair. Ça ne veut pas forcément dire que tous les nombres qu'on doit proposer sont les nombres pairs. Pour cela, je propose que dans l'ensemble qu'on doit donner pour réponse, tous les nombres impairs doivent y figurer.

E1 propose la réponse correcte et donne un argument de type pragmatique pour son choix ; il manifeste une connaissance-en-acte : « considérer le successeur qui est premier dans le cas où le nombre est pair, et prendre les impairs ». Il prend en compte la possibilité pour l'antécédent d'être faux, mais n'explicite pas les raisons du choix des nombres impairs. Ceci pourrait être dû à l'indisponibilité des règles de vérité de l'implication qui renvoie à l'aspect prédicatif de la connaissance. Cette réponse n'est pas partagée par ses camarades qui ne prennent ne compte que les nombres pairs.

> **22 E1** : Deux est pair, donc son successeur doit être 3. On prend 4. Comme 4 est pair, son successeur va être 5 qui est premier. On prend 6. 6 est pair, son successeur est 7 qui est premier. On va prendre maintenant 8, 8 est pair, mais 9 ne peut pas être son successeur parce que 9 n'est pas premier.
>
> **23 E2** : Non, 9 est son successeur, mais n'est pas premier. 8 ne doit pas être pris.
>
> **24 E3** : 8 doit être pris, c'est 9 qui ne doit pas être pris.
>
> **25 E2** : On doit prendre les nombres dont les successeurs sont premiers.
>
> **26 E3** : Même 9.
>
> **27 E2** : Pourquoi 9 ? Comprends bien. Si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier. On prend les nombres qui sont tels que, lorsque ce nombre est pair, son successeur doit être premier

La reformulation proposée par **E2** à la réplique 27 rend explicite le fait qu'il met en œuvre l'implication courante qui consiste à ne considérer que les nombres pairs ; il rejette

[3] On la retrouve dans des interviews que nous avons eues avec eux

automatiquement les nombres impairs : on retrouve le phénomène qui consiste à ne prendre en compte l'implication que lorsque l'antécédent est vrai :

64 E3 : Si x est pair

65 E1 : Et sinon ?

66 E2 : Si x est pair et que son successeur est premier

67 E1 : Si x n'est pas pair, qu'est ce qu'on fait ?

68 E2 : Maintenant…, C'est justement.. ;

69 E3 : On ne le prend pas

E3 à la ligne 69 a une réplique qui renvoie au traitement de l'implication comme une équivalence :

« si P, alors Q, et si non P, alors non Q »

Dans son souci de convaincre ses camarades sur la nécessité de retenir les nombres impairs, **E1** change de stratégie :

72 E1 : je vais vous proposer un énoncé, vous allez me répondre. […] Si on me dit maintenant *Déterminer l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à 20 tels qu'ils soient pairs et que leur successeur soit premier*. Vous allez proposer quoi ?

78 E1 : J'ai changé le fait que le *si*, la place du *si*. J'ai imposé une condition pour les nombres qui sont pairs

E1 change la formulation de l'énoncé. Il propose de déterminer un ensemble dont la propriété caractéristique est une conjonction, $P(x) \wedge Q(x)$, et qui est celle de l'ensemble donné par ses camarades (catégorie **A2**).

Cet étudiant met en évidence deux propriétés qui ne sont pas équivalentes, et qui caractériseraient deux ensembles. En effet, les phrases ouvertes $P(x) \wedge Q(x)$ et $P(x) \Rightarrow Q(x)$ ne sont pas équivalentes ; interprétées dans l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20, elles ne peuvent caractériser un même ensemble.

Deux théorèmes-en-acte se dégagent de ces échanges :

- une implication ouverte est satisfaite par un élément de l'univers du discours lorsque cet élément satisfait l'antécédent et le conséquent (**E2**) ;

- les éléments qui satisfont une implication ouverte sont ceux qui satisfont l'antécédent et le conséquent, et ceux qui ne satisfont pas l'antécédent (**E1**).

À la fin des débats en groupe, nous avons fait une mise en commun des résultats, et avons obtenu des résultats différents dans chaque groupe : le premier groupe a produit la réponse correcte, et le second, l'ensemble de nombres pairs dont le successeur est premier. Nous avons demandé à l'étudiant **E3** du premier groupe de justifier leur résultat. Nous présentons sa justification :

> **5 E7** : […]. Notre ensemble est comme ça du fait qu'on a demandé les nombres entiers inférieurs ou égaux à 20. On se place d'abord dans l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à 20. Maintenant dans ces nombres entiers-là, on dit maintenant que certains vérifient une certaine propriété qu'on nous a donnée. C'est-à-dire que si x est un nombre pair, c'est-à-dire que la propriété qu'on nous a donnée concerne seulement les nombres pairs. C'est-à-dire que les impairs d'office on doit les prendre. alors son
>
> **6 P** : vous devez les prendre pourquoi ?
>
> **7 E3** : on doit les prendre parce qu'ils sont dans l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à 20.
>
> **8 P** : ce que tu dis, c'est que la propriété ne concerne que les nombres pairs.
>
> **9 E3** : Oui, madame, la condition est fixée pour les nombres pairs, maintenant les impairs n'ont aucune condition, et ils sont inférieurs ou égaux à 20. On doit les prendre, parce qu'ils sont inférieurs ou égaux à 20. Maintenant on doit prendre maintenant les pairs sous la condition qu'on nous a donnée aussi.
>
> **10 P** : Oui, …
>
> **11 E3** : et la condition qu'on nous a donnée c'est *si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier*. Sous cette condition on prend le reste des nombres impairs.

Il y a chez **E3**, la manifestation d'une connaissance-en-acte, elle n'est pas prédicative.

Pour les amener à expliquer leur résultat, nous avons commencé par identifier la structure de l'énoncé :

> **13 P** : quelle est la forme de l'énoncé que vous avez, sa structure ?
>
> **14 E5** : je pense qu'on a un énoncé de la forme $P \Rightarrow Q$
>
> **16 E3** : $P \Rightarrow Q$
>
> **18 E2** : $P \Rightarrow Q$

Les étudiants donnent une proposition, et ce qui donne une occasion idoine pour préciser la différence entre une proposition et une phrase ouverte. Nous avons rectifié la forme de l'énoncé formalisé en précisant qu'il s'écrivait $P(x) \Rightarrow Q(x)$, puis nous avons demandé de trouver la valeur de vérité de l'implication $P(0) \Rightarrow Q(0)$:

20 E2 : C'est faux madame, la proposition sera fausse.

21 P : Si 0 est pair, alors 1 est premier. Pourquoi c'est faux ?

22 E3 : C'est faux parce que 1 n'est pas premier et 0 est pair. L'implication sera fausse parce qu'on a Q qui est fausse et P qui est vraie. Ça donne l'implication fausse.

Cette réponse de **E3** montre qu'il sait que l'implication est fausse lorsque l'antécédent est vrai et le conséquent est faux, ce qui est conforme à la logique naturelle.

Nous sommes revenus sur la table de vérité de l'implication que nous avons explicitée. D'où la question de **E3** :

33 E3 : Je voudrais savoir, est ce qu'on devait prendre les trois cas qui sont là ?

34 P : lesquels ?

35 E3 : Faux-vrai ; faux-faux et vrai-vrai ?

Nous nous sommes appuyée sur la phrase ouverte et quelques éléments du domaine pour répondre : nous avons proposé aux étudiants de déterminer la valeur de vérité des implications matérielles obtenues pas instantiation de x par des valeurs du domaine. Toutes les distributions des valeurs de vérité sur l'antécédent et sur le conséquent ont émergé. Cela a permis de mettre en lumière un exemple d'usage des tables de vérité.

1.2.2 Analyse des réponses des élèves

Tableau T1(2) : Classement des réponses élèves

A1	**A1***	**A2**	**A2***	**A3**	**A3***	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**
0	**0**	**18** L07, L11, L12, L18, L28, L35, L36, L40, L42, L45, L47, L48, L52, L55, L57, L59, L60	**4** L01, L06, L44, L61	**0**	**1** L29	**0**	**3** L16, L27, L31	**16** L02, L04, L08, L09, L10, L13, L30, L32, L33, L34, L39, L46, L49, L51, L53, L54, L58	**19** L03, L05, L14, L15, L17, L19, L20, L21, L22, L23, L24, L25, L26, L37, L38, L41, L43, L50, L56

Deux différences significatives apparaissent dans les réponses des élèves : tout d'abord aucun d'entre eux ne propose les impairs parmi les nombres retenus ; d'autre part, le nombre de non réponses et de réponses « autres » est beaucoup plus important (près des deux tiers contre moins d'un tiers pour les étudiants).

<u>Dans la catégorie A6</u>

Nous avons distingué les réponses du type :

- $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19\}$ constituées des nombres pairs dont le successeur est premier, et le successeur de ces nombres pairs. Il y a des variantes de cet ensemble composées de tous les nombres ci-dessus avec en plus les nombres 0, 1, ou 20. 6 élèves ont produit ce type de réponse. On lit dans la copie de **L49** :

  « *pour les pairs,*$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, *et les premiers* $\{1, 3, 7, 11, 13, 17, 19\}$, donc ils sont au nombre de $\{16\}$ ».

  Cet élève fait la réunion des nombres pairs, et des nombres premiers. On peut faire l'hypothèse que les autres ont utilisé le même schème, à la différence qu'ils n'ont considéré que les pairs à successeur premier (pour certains 1 est un nombre premier). Ce traitement de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ renvoie au traitement de $P(x) \vee Q(x)$.
- Les autres réponses que nous n'arrivons pas à caractériser (voir tableau T1(3) en annexe 6)

Nous présentons ci-dessous le tableau comparatif des réponses des élèves et des étudiants que nous avons interrogés :

Tableau comparatif des réponses

	A1	A1*	A2	A2*	A3	A3*	A4	A5	A6	A7
Les étudiants	8,8%	5,9%	39,7%	2,9%	4,4%	5,9%	0%	2,9%	17,7%	11,8%
Les élèves	0%	0%	29,6%	6,6%	0%	1,6%	0%	4,9%	26,2%	31,1%

L'absence des réponses des catégories **A1** et **A1*** pourrait provenir du fait que les notions de logique qui sont généralement dispensées au lycée ne portent que sur les techniques de démonstration (démonstration par l'absurde, démonstration par récurrence, démonstration par la méthode « directe »[4]…). Les notions de logique propositionnelle, en l'occurrence les tables de vérité, ne rentrent pas dans ces notions. Nous faisons l'hypothèse que la pratique de la

[4] C'est la démonstration des énoncés de la forme $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$, où on démontre $Q(x)$ sous l'hypothèse $P(x)$.

démonstration des énoncés conditionnels sous hypothèse est une cause de ces réponses. Cette hypothèse est corroborée par les prévisions des enseignants **En1** et **En2** concernant les réponses probables de leurs élèves à cet exercice :

D'après **En1** :

> **(113) En1** : et là, celui qui va essayer de faire, se dire bon, x et on va dire qu'il y a beaucoup qui vont raisonner en disant *supposons x est pair,* il dit x est égal à $2k$. Alors, $x+1$ est premier, $x+1=2k+1$. Là il se met à rechercher qu'est ce qu'un nombre premier en voyant comment il peut, s'il peut prouver ça.

D'après **En2** :

> **(102) En2** : […] Je pense que, par rapport à moi, sur dix élèves que j'ai encadrés, la moitié peut répondre, la moitié pas. Pas parce que les autres, les autres, ils n'auront pas… Les autres je précise vous donnerons la solution uniquement dans l'ensemble des nombres pairs inférieurs à vingt, c'est-à-dire, ils iront chercher les solutions dans les nombres pairs.

Conclusion

Les résultats à l'issue de l'analyse de cet exercice vont dans le même sens que ceux de Durand-Guerrier (2003) et de Rogalski & Rogalski (2004) : pour un certain nombre d'étudiants (40% pour ce qui nous concerne), ils ne considèrent que les éléments qui vérifient l'antécédent ;

Plusieurs réponses des élèves dans la catégorie **A6** renvoient au traitement de la disjonction. Chez les étudiants, les réponses renvoient plutôt au traitement de la conjonction, avec quelques « oublis ».

Cet exercice pourrait permettre :

- de travailler sur les règles de vérité de l'implication ;
- de mettre en valeur l'utilisation des tables de vérité ;
- de mettre en défaut la règle-en-acte qui consiste, pour évaluer une implication, à évaluer d'abord l'antécédent de cette implication, et de ce fait, faire un traitement de l'implication comme une conjonction ou une disjonction ;
- de préciser, du point de vue du langage, la différence entre les deux énonciations suivantes qu'on retrouve dans les débats des étudiants : « si … alors… », et « lorsque …, alors … ».

2 Implication et règles d'inférence

Dans ce qui suit, (u_n) *désigne une suite définie par récurrence sous la forme «* $u_{n+1} = f(u_n)$ *», où* f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*. On a alors le résultat suivant :*

(P) « Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation *f(x)=x* »

Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) *si :*

6.1 *L'équation « f(x)=x » n'a pas de solution*

6.2 *L'équation « f(x)=x » a au moins une solution.*

Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « f(x)=x » si :

6.3 *La suite* (u_n) *est convergente*

6.4 *La suite* (u_n) *n'est pas convergente*

2.1 Analyse a priori

L'exercice que nous proposons est tiré de (Durand-Guerrier, 1996, p.151). Il figure dans le questionnaire qui a été proposé à la rentrée universitaire 1992 à 273 étudiants arrivant en Deug A première année au centre Scientifique Joseph Fourier de Valence (Drôme)[5].

Dans son questionnaire, l'énoncé de (P) est :

(P') Si la suite $(\mathrm{u_n})$ converge vers le réel *L*, alors *L* est solution de l'équation
(E) : « $f(x) = x$ ».

Notre motivation pour le choix de cet exercice vient de ce que l'implication est au centre de son traitement, mais elle est mise en œuvre de façon différente des exercices 1 et 7. Dans l'exercice 1, il s'agit de déterminer un ensemble défini à l'aide d'une propriété qui est une implication ouverte. L'ensemble cherché est constitué des entiers naturels qui satisfont cette propriété. Dans l'exercice 7, les étudiants doivent évaluer une implication dont l'antécédent est faux. L'exercice 6 porte sur les règles d'inférence : on s'intéresse à la question de la reconnaissance des situations qui permettent ou ne permettent pas de faire des déductions. Sans méconnaitre l'importance des formulations langagières, nous ne les avons pas prises en compte dans nos analyses.

Pour notre analyse a priori, nous commençons par une étude de la structure logique de l'énoncé :

[5] En France

(P) ***« Si la suite*** (u_n) ***est convergente, alors sa limite est solution de l'équation f(x)=x ».***

Cette étude prend appui sur les analyses de V. Durand-Guerrier (1996), contenues en pages 151-153. Sa formulation de départ n'est pas la même, mais les transformations qu'elle effectue l'amènent à la même formulation que celle qui est la nôtre.

Nous précisons que le théorème général qui est énoncé, est connu dès la classe de terminale. On le rencontre dans le manuel de mathématiques, terminale C au programme, au Cameroun[6], mais il ne figure pas dans le cours d'analyse de première année de licence de mathématiques contenu dans le polycopié que nous avons analysé ; il est toutefois utilisé au cours des séances de travaux dirigés. La manière d'en faire usage ici n'est pas habituelle.

Structure logique de (P) :

On est en présence d'un énoncé conditionnel dont la structure logique est complexe. Il fait intervenir trois objets mathématiques distincts : la suite (u_n), une équation, et la fonction numérique f qui relie les deux premiers objets. La limite qui est évoquée dans le conséquent, est implicite dans l'antécédent. En effet, dire que la suite converge signifie qu'elle admet une limite.

(P) peut se ramener à l'énoncé minimal, où l'équation n'est plus explicite :

« Si la suite (u_n) ***converge, alors sa limite est un point fixe de la fonction*** f ***»***

D'après Durand-Guerrier,

> « La simplicité apparente de cet énoncé cache en fait une structure complexe qui apparait lorsqu'on cherche à le formaliser, même partiellement. L'énoncé donné est d'ailleurs un intermédiaire nécessaire ; en effet, pour formaliser l'énoncé, la présence d'un pronom nous oblige à introduire l'objet « limite ». » (op. cit. p.151).

En effet, comme nous le disions plus haut, dire que la fonction converge revient à affirmer l'existence d'un nombre réel l tel que $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

[6] Dans le manuel de la collection CIAM Terminale S, on le rencontre au chapitre 13 (Suites numériques), paragraphe 3 (Compléments sur les suites), page 286).

Pour formaliser cet énoncé, V. Durand-Guerrier prend comme univers du discours la réunion des ensembles suivants : l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble des suites numériques.

Elle choisit également :

- un symbole de relation à deux places R, exprimant qu'une suite converge vers un réel donné ;
- un prédicat à deux places noté S, qui exprime la relation entre une telle suite et la fonction associée ;
- un prédicat T à deux places exprimant la relation entre une fonction et son point fixe.

À l'énoncé (P), on peut associer la formule :

$$\mathrm{S}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{z}) \Rightarrow \mathrm{T}(\mathrm{y},\mathrm{z}) \text{ (1)}$$

L'interprétation de la clôture universelle de (1) dans l'univers considéré est un théorème, donc un énoncé vrai.

Lorsqu'on se place dans l'univers du discours, par instanciation des variables x, y et z respectivement par u qui désigne une suite, f qui désigne une fonction continue et l un réel, le théorème se formalise par :

$$\forall u, \forall f, \forall l, S(u,f) \wedge R(u,l) \Rightarrow T(f,l) \text{ (2)}$$

Étant donné que $S(u,f)$ qui s'interprète dans le domaine considéré par $\mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} = f(u_n)$ est vrai, l'énoncé (P) va alors s'écrire :

$$\mathrm{R}(\mathrm{u},\mathrm{l}) \Rightarrow \mathrm{T}(\mathrm{f},\mathrm{l}) \text{ (3)}$$

qui s'interprète par « Si la suite (u_n) converge vers l, alors l est un point fixe de f ». Cet énoncé est en fait implicitement quantifié. Son écriture est :

$$\forall \mathrm{l}, \mathrm{R}(\mathrm{u},\mathrm{l}) \Rightarrow \mathrm{T}(\mathrm{f},\mathrm{l}) \text{ (4)}$$

Et s'interprète par :

$$\forall l, \lim_{n \to +\infty} u_n = l \Rightarrow f(l) = l \text{ (5)}$$

Le réel l est un objet intermédiaire, nécessaire au traitement de cette situation, où les objets en jeu sont la suite (u_n) et l'équation $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$.

Contrairement à ce qu'on peut penser, la lettre l est liée par le quantificateur universel qui porte sur toute la phrase. Si on l'introduit à l'aide du quantificateur existentiel qui porte sur l'antécédent pour traduire la convergence de la suite on obtient l'énoncé ouvert en l :

$$\forall f, \forall (u_n), (\exists l, \lim_{n \to +\infty} u_n = l) \Rightarrow f(l) = l \ (6)$$

ce qui est en contradiction avec le fait qu'un théorème est un énoncé clos. Par ailleurs, cette formulation produit une contraposée qui n'a plus sa signification originale, à savoir, « si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, alors la suite (u_n) ne converge pas ».

Des résultats antérieurs

Nous présentons les résultats obtenus par Durand-Guerrier pour cet exercice, qu'elle a appelé « énoncé A4 » dans sa thèse. Nous rappelons au préalable la catégorisation qu'elle a choisie pour les réponses :

- le codage 0 correspond à un cas de non réponse ;
- la réponse de type 1 correspond à une réponse positive que l'on obtient en appliquant la règle du Modus Ponens, y compris lorsque cette application n'est pas légitime parce que la réponse donnée correspond à ce que l'on obtiendrait en appliquant cette règle à la réciproque de l'énoncé qui n'est pas un théorème ;
- la réponse de type 2 correspond à une réponse négative, que l'on obtient en appliquant la règle du Modus Tollens, y compris de manière illégitime, ou en transformant la question posée ;
- la réponse de type 3 correspond à une réponse du type « on ne peut pas savoir », « pas forcément », « pas toujours », …
- la réponse de type 9 correspond à une réponse qui ne rentre pas explicitement dans l'un des quatre cas précédents.

La répartition des résultats est contenue dans le tableau ci-dessous :

Tableau T6(1)

	Question a	**Question b**	**Question c**	**Question d**
Réponse de type 1	0%	52%	**<u>79,1%</u>**	0,4%
Réponse de type 2	**<u>81,3%</u>**	2,9%	0,4%	53,4%
Réponse de type 3	5,9%	**<u>19,8%</u>**	2,2%	**<u>18,7%</u>**
Réponse de type 9	10,6%	21,6%	15,8%	22%
Non réponses (type 0)	2,1%	3,7%	2,6%	5,5%

Les pourcentages pour les réponses exactes sont en gras et soulignées.

Une analyse plus affinée fait ressortir le fait que certains sujets traitent l'implication comme s'ils étaient en face d'une équivalence, c'est-à-dire que leurs réponses sont celles qui seraient correctes si l'énoncé biconditionnel correspondant était un théorème.

Les réponses aux quatre items satisfont le codage 2112 et concerne 71 copies. Les réponses toutes correctes donnent le codage 2313, et concerne 19 copies seulement.

Analyse a priori :

Nous rappelons que les règles d'inférence du Modus Ponens et du Modus Tollens permettent de faire des déductions lorsqu'on se trouve en présence d'un énoncé conditionnel vrai dont l'antécédent est vrai ou dont le conséquent est faux. Lorsque la réciproque de l'énoncé n'est pas un énoncé vrai, on ne peut faire les déductions que dans ces deux cas.

Dans le cas ou l'antécédent est faux, le conséquent peut être soit vrai, soit faux ; dans le cas où le conséquent est vrai, l'antécédent peut également être soit vrai, soit faux.

Dans le traitement des suites récurrentes définies par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, dans l'enseignement secondaire ou en début d'université on rencontre très peu de cas où la suite n'est pas convergente lorsque l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution. Dans la quasi totalité des exercices que le manuel de terminale C propose, il est demandé de déterminer les points fixes de la suite, puis d'étudier dans le cas où au moins un point fixe existe, la convergence de la suite. Ceci favorise le développement de connaissances-en-acte qui sont susceptibles de pousser les élèves ou les étudiants à faire des inférences non valides, par exemple lorsqu'on a établi que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution et qu'il faut se prononcer sur la convergence de la suite (u_n). Cependant, dans le manuel ci-dessus cité, dans la partie consacrée au cours, sur les trois exemples de suites définies par récurrence, il y en a un (le troisième) qui présente une suite non convergente dont la fonction associée a un point fixe.

Pour les propositions de réponses, nous n'allons pas conserver la même catégorisation que celle de V. Durand-Guerrier présentée ci-dessus, du fait que nous nous intéressons non seulement aux conduites inférentielles, mais au contenu des réponses des étudiants. Toutefois, nous en tiendrons compte dans l'exploitation globale des réponses.

Énoncé 6.1 : *Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite* (u_n) *si l'équation « f(x)=x » n'a pas de solution*

Les réponses attendues sont :

1. la suite (u_n) ne converge pas (**R1_1**). Cette réponse résulte de l'application du Modus Tollens. Ceci est conforme à la logique naturelle. Elle peut également provenir du cours de mathématiques. A l'université, l'accent est mis sur l'étude de la convergence des suites, et lorsqu'elle est avérée, on résout l'équation $f(x) = x$;
2. on ne peut rien dire (**R1_2**), pour celui qui ne connait pas ou ne sait pas utiliser la règle du Modus Tollens ;
3. d'autres réponses peuvent être proposées (**R1_3**), mais il est très peu probable que la réponse « la suite converge » apparaisse dans cet item ;
4. l'étudiant ne donne aucune réponse (**R1_4**).

Énoncé 6.2 : *Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite* (u_n) *si l'équation «* $f(x) = x$ *» a au moins une solution.*

1. On ne peut rien dire ou on ne peut pas conclure (**R2_1**). C'est la réponse correcte. L'étudiant reconnait ici un cas où on ne peut pas faire une déduction. Cette réponse peut aussi provenir d'une situation vécue par l'étudiant, où des exemples et des contre-exemples sont disponibles chez ce dernier.
2. La suite converge (**R2_2**). On peut supposer ici qu'il y a utilisation de l'équivalence en lieu et place de l'implication. On peut également mettre en cause une mauvaise compréhension de la pratique mathématique : les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont généralement déterminées lorsqu'on a l'assurance que la suite converge. Or dans la plupart des exercices où l'on est amené à résoudre cette équation, la première question est de résoudre l'équation en question, puis de montrer que la suite est convergente. Ne considérer que les fonctions convergentes va dans le sens des objectifs de l'enseignement sur les suites ; nous lisons

dans le livre des programmes de l'enseignement des mathématiques de l'enseignement secondaire général au Cameroun[7] :

> « Un des objectifs de cette partie est l'étude sur quelques exemples simples des méthodes d'approximation d'un nombre réel au moyen d'une suite »

Pour remplir cet objectif, les enseignants sont amenés à faire travailler leurs élèves prioritairement sur des suites convergentes.

3. La suite converge si la solution de l'équation f(x) = x est unique (**R2_2***), pour ceux qui ont fait le transfert de l'unicité de la limite aux solutions de l'équation ;
4. Des réponses autres que celles qui sont proposées ci-dessus (**R2_3**). Il est peu probable que la réponse « la suite ne converge pas » soit donnée ;
5. Pas de réponse (**R2_4)**

Énoncé 6.3 : *Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation «$f(x) = x$» si la suite (u_n) est convergente*

1. L'équation f(x) = x admet au moins une solution (**R3_1**), qui est une réponse incomplète. Nous pensons qu'elle sera donnée par une majorité d'étudiants ; c'est une situation ordinaire qu'ils rencontrent assez souvent dans l'étude des suites numériques. En effet, dans la pratique, ils montrent que la suite est convergente, puis déterminent la limite en résolvant cette équation.

   Il faut toutefois noter que le passage de « la suite (u_n) est convergente » à « $f(x) = x$ admet une solution » n'est pas une inférence immédiate : de « la suite (u_n) est convergente », on déduit via la définition d'une suite convergente l'existence d'un réel l qui est la limite de la suite. En effet, la convergence de la suite assure l'existence du réel l comme nous le disions ci-dessus. D'après le théorème, l satisfait l'équation $f(x) = x$, ce qui permet de déduire par la règle du Modus Ponens que cette équation admet au moins une solution.
2. Il est possible que les étudiants imposent à l'équation d'avoir une solution unique pour les raisons que nous avons évoquées ci-dessus. La réponse est alors, « l'équation f(x) = x admet une unique solution » (**R3_1***).
3. L'équation f(x) = x admet au moins une solution, dont une est la limite de la suite. Cette réponse est correcte (**R3_2**) ;
4. Des réponses autres que les précédentes (**R3_3**) ;
5. L'étudiant ne donne aucune réponse (**R3_4)**.

[7] Programmes en vigueur depuis le 18 août 1998.

Enoncé 6.4 : *Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation* « $f(x) = x$» *si la suite* (u_n) *n'est pas convergente*

1. On ne peut rien dire, ou on ne peut pas conclure (**R4_1**) : c'est la bonne réponse. On peut supposer que l'étudiant reconnait là un cas où on ne peut pas faire une déduction. Cette réponse peut également venir des habitudes scolaires : le fait qu'il n'ait pas à résoudre l'équation en dehors de la situation où la suite est convergente peut laisser l'étudiant indécis.
   Les étudiants peuvent passer par la contraposée de **6.2** pour faire cette déduction. En effet, dire que « si *la suite* (u_n) *n'est pas convergente, alors* $f(x) = x$ *n'admet pas de solution* », est équivalent à sa contraposée qui est « si $f(x) = x$ *admet au moins une solution*, alors *la suite* (u_n) *est convergente* ». Or si pour le second on ne peut rien dire de la vérité, il en sera de même pour le premier du fait de l'équivalence des énoncés.
2. L'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution (**R4_2**). L'étudiant répond comme s'il est en face d'une équivalence.
3. L'équation $f(x) = x$ admet plus d'une solution ou pas de solution (**R4_3**). Certains étudiants pensent que si la suite (u_n) est convergente, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution. Le traitement de l'implication comme une équivalence va donc susciter cette réponse chez l'étudiant, et qui correspond à la négation de « l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution » ;
4. Toute autre réponse différente des précédentes (**R4_4**) ;

Pas de réponse (**R4_5**).

2.2 Analyses a posteriori

Dans ce qui suit, (u_n) *désigne une suite définie par récurrence sous la forme «* $u_{n+1} = f(u_n)$ *», où* f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$. *On a alors le résultat suivant :*

(P) « Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation *f(x)=x* »

Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) *si :*

6.1 *L'équation « f(x)=x » n'a pas de solution*

6.2 *L'équation « f(x)=x » a au moins une solution.*

Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « f(x)=x » si :

6.3 *La suite* (u_n) *est convergente*

6.4 *La suite* (u_n) *n'est pas convergente*

Nous dissocions le traitement des questions. Nous commençons par les questions **6.1** et **6.2**, puis nous terminons avec les questions **6.3** et **6.4**.

<u>Item 6.1</u> : *Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite* (u_n) *si l'équation « f(x)=x » n'a pas de solution ?*

Les réponses détaillées de cet item sont contenues dans le Tableau T6(6) de l'annexe 6.

Tableau T6(2) : répartitions des réponses de l'item 6.1

	R1_1 La suite ne converge pas	**R1_2** On ne peut rien dire	**R1_3** Autre réponse	**R1_4** Pas de réponse
CODES ETUDIANTS	E02, E06, E07, E10, E12, E15, E17, E19, E22, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E33, E34, E37, E38, E39, E42, E43, E44, E45, E49, E52, E53, E55, E56, E57, E58, E61, E62, E63, E65, E66, E67, E68	**E21, E40, E59**	**E14, E41, E46, E48, E50**	E01, E03, E04, E05, E08, E09, E11, E13, E16, E18, E20, E23, E24, E35, E36, E41, E47, E51, E54, E60, E64
EFFECTIFS	**39**	**3**	**5**	**21**

21 étudiants n'ont pas répondu à la question. Des 47 qui ont proposé une réponse, 39 ont donné la bonne réponse. Cet effectif relativement élevé (représente <u>83% de ceux qui ont répondu</u>) était à prévoir, car la règle d'inférence utilisée qui est le Modus Tollens, vaut aussi bien en logique mathématique qu'en logique naturelle (Deloustal-Jorrand, 2004). De plus ce résultat est connu des étudiants. Le pourcentage de réussite à cet item est proche de celui de Durand-Guerrier (1996).

La proportion de bonnes réponses ne garantit pas toutefois la disponibilité de la règle du Modus Tollens chez certains étudiants comme le montre ces échanges entre les étudiants du groupe 2. Leurs réponses sont des manifestations des connaissances-en-acte, avec des tentatives de justifications :

> **1 E6** : **si l'équation** $f(x) = x$ **n'a pas de solution**, on déduit de manière immédiate que f n'est pas convergente. Parce que si l'on essaie de regarder la … la réciproque … la contraposée de si f est convergente, sa limite est solution de $f(x) = x$, heuuu, non, attendez un peu
>
> **5 E5** : $f(x) = x$. Elle est fausse. Tu vois un peu, donc cela me parait un peu clair dans ma tête que si, que la position 6.1, donc, si $f(x) = x$ n'a pas de solution, alors u_n n'est pas convergente. Moi, ça me parait très clair.
>
> **16[8] E5** : et par conséquent $f(x) = x$ n'est pas convergente

[8] Une erreur s'est glissée au cours de la numérotation, 16 vient immédiatement après 5.

17 E7 : par conséquent u_n n'est pas convergente.

18 E5 : u_n n'est pas convergente

Les étudiants utilisent à la règle du Modus Tollens en acte. Le fait que pour **E5** « ça parait très clair » et que chez **E6** « c'est immédiat » montre que cette règle est naturalisée. Le passage à la contraposée pour justifier la réponse met en évidence l'indisponibilité de l'aspect prédicatif de cette règle d'action chez ces étudiants. Ils ont des connaissances prédicatives sur la contraposée, mais pas sur le Modus Tollens qui apparait ici comme un invariant opératoire.

25 E5 : et la contraposée est très claire ! La contraposée dit « si la limite de la suite u_n

26 E7 : n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$

27 E6 : Il y a un problème, parce que, quand il a dit « si la limite »

Le passage à la contraposée va faire émerger les difficultés liées à la quantification implicite. Dans le langage courant, l'expression littérale de la contraposée met en évidence une contradiction entre la négation du conséquent « si la limite de la suite ne satisfait pas l'équation » et la négation de l'antécédent « la suite n'est pas convergente » qui signifie que la suite n'a pas de limite finie. Cela est dû au phénomène d'anaphore.

L'écriture formelle permet d'expliciter la quantification implicite sur l'objet *limite* dans l'expression de la convergence de la suite (u_n) ; il est introduit par le quantificateur universel. Cette écriture permet de construire la contraposée car elle lève l'ambiguïté sur le statut de la limite. Les difficultés dues au passage à la contraposition font l'objet des débats qui suivent :

28 E7 : Oui, c'est ça que je dis !

29 E6 : ça veut dire que la limite existe mais elle n'est pas solution. Mais la contraposition sera donnée, parce que dès que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution

30 E5 : Non, non, non …

31 E7 : Dès que l'équation $f(x) = x$

32 E5 : il y a un problème, il y a un problème. Non, dans la contraposée, je ne pense pas qu'on ait utilisé le mot *limite*.

33 E7 : Attend, on dit, la contraposée c'est

34 E5 : Je ne pense pas que le mot *limite* puisse être dedans

35 E7 : la contraposée sera quoi ?

36 E6 : parce que la limite doit d'abord exister. Elle doit d'abord exister. Parce que si on dit la limite, si tu dis maintenant que

37 E5 : Heuu, si la limite, si la limite de la suite (u_n) est solution de, c'est-à-dire que,

38 E6 : si la limite, elle existe déjà, tu vois un peu, elle existe déjà

39 E5 : et dire après que la suite (u_n) est non convergente, ça n'a pas de sens. Tu me suis, donc moi je me dis maintenant que comme contraposée on doit dire que, si l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, alors la suite n'est pas convergente. Moi je me dis que c'est ça la contraposée. Parce que dès lors que l'on met le mot *limite*, ça crée comme une sorte de quiproquo, on ne comprend plus rien.

Ces échanges mettent en évidence les difficultés liées aux relations entre les différents objets introduits. **E5** doit évacuer (ligne 39) le mot *limite* par transformation de la phrase, pour pouvoir énoncer la contraposée. Il obtient la contraposée correcte qui correspond à celle qui est obtenue à partir de la formalisation de l'énoncé de départ en quantifiant universellement la lettre de variable qui désigne la limite. En effet, la contraposée de (4) est :

$$\forall \mathrm{l}, \mathrm{nonT}(\mathrm{f}, \mathrm{l}) \Rightarrow \mathrm{non}\ \mathrm{R}(\mathrm{u}, \mathrm{l})\ (7)$$

Qui s'interprète par :

$$\forall l, f(l) \neq l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \neq l\ (8)$$

C'est-à-dire que si l'équation $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$ n'a pas de solution, alors, la suite (u_n) ne converge pas. C'est la formulation de **E5**. Ce dernier souligne la difficulté créée par la présence de *limite*.

Dans la catégorie **R1_3**, l'étudiant **E50** a répondu :

E50: « la suite n'existe pas »

On peut lier cette réponse au fait que les suites qui sont données en exercice sont telles que cette équation a généralement au moins une solution. L'étudiant ne concevrait donc pas qu'il puisse exister une suite telle que la fonction f associée n'ait pas de point fixe.

Item 6.2 : *Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite* $(\mathrm{u_n})$ *si l'équation « $f(x) = x$ » a au moins une solution ?*

Les réponses détaillées de cet item sont contenues dans le Tableau T6(7) de l'annexe 6.

Tableau T6(3) : répartitions des réponses de l'item 6.2

	R2_1 On ne peut rien dire	**R2_2** La suite cv	**R2_2*** La suite cv si sol unique	**R2_3** Autre réponse	**R2_4** Pas de réponse
CODES ETUDIANTS	E10, E15, E19, E22, E30, E37, E46, E63	E02, E06, E07, E12, E17, E21, E24, E26, E28, E29, E31, E32, E33, E38, E39, E43, E44, E45, E53, E57, E58, E59, E61	E49, E25, E62, E65, E68,	E14, E27, E34, E40, E42, E48, E50, E52, E55, E56, E66, E67	E01, E03, E04, E05, E08, E09, E11, E13, E16, E18, E20, E23, E35, E36, E41, E47, E51, E54, E60, E64
EFFECTIFS	**8**	**23**	**5**	**12**	**20**

48 étudiants ont donné une réponse à cet item, et parmi eux, 8 ont donné une réponse correcte.
E10 et **E30** ont donné les réponses respectives :

> **E10** : la suite peut être convergente
>
> **E30** : u_n n'est pas forcément convergente. L'une de ces solutions peut être la limite de u_n.

Les 6 autres ont répondu « on ne peut rien dire ».
Elles rejoignent la réponse « on ne peut rien dire », qui sous-entend que la suite peut être convergente comme elle peut être divergente. Par ailleurs, **E30** apporte une précision quant à la limite éventuelle de la suite.

Analyse des réponses de la catégorie R2_2*

Les étudiants qui ont donné les réponses dans cette catégorie ont subordonné la convergente de la suite à l'unicité des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = x$; **E49**, **E68**, **E65** sont explicites dans leur réponse :

> « Si l'équation a une unique solution, la suite converge, sinon elle diverge. »

E25 l'exprime de façon plutôt implicite :

> « La suite n'admet pas de limite car la limite de u_n est unique. »

Pour placer **E25** l'étudiant dans la catégorie **R2_2***, nous avons regardé ses réponses aux autres items, et il en ressort que l'unicité de la limite est mise en avant.
E62 interprète « l'équation admet au moins une solution » comme « l'équation a plusieurs solutions », d'où sa réponse :

> **E62** : La suite a plusieurs limites, ce qui contredit l'unicité de la limite, la suite diverge

On pourrait rapprocher les réponses de **E24**, **E33**, **E38** et **E45** à celles de cette catégorie. En effet, leur réponse, « la suite converge vers **cette** solution » laisse entendre que cette équation n'admet qu'une seule solution. Cette réponse pourrait également provenir d'une mauvaise compréhension de l'expression « au moins une solution », et c'est la raison pour laquelle nous l'avons rangée dans la catégorie **R2_2**. Nous pouvons dire que pour les étudiants ayant produit les réponses **R2_2***, l'énoncé « la suite (u_n) est convergente si et seulement si l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution » est vrai.

Analyse des réponses de la catégorie R2_2 (23 réponses)

En dehors des étudiants **E21**, **E24** et **E59**, tous ont répondu à l'item **6.1** que la suite ne convergeait pas. On pourrait penser que ces étudiants considèrent qu'ils sont en présence d'une équivalence. Cela découle, comme nous l'avons présenté dans l'analyse a priori, des habitudes scolaires. Les réponses aux deux items suivants pourront éventuellement nous éclairer davantage.

Nous retrouvons les conséquences de cette pratique de classe derrière les réponses des étudiants **E02**, **E26**, **E27**, **E34**, et **E56** :

E02 : La suite converge et la limite en cas de solution multiple aura le signe des termes de la suite

E26 : u_n converge vers la solution qui vérifie les conditions de f

Au cours du module de suivi, nous avons eu les mêmes réponses qui ont déclenché une longue discussion entre les étudiants du groupe 1 pendant la phase de recherche par groupe. Ceux qui soutenaient que la suite était convergente prenaient en exemple un exercice qu'ils ont résolu en cours : la suite (u_n) était à termes positifs et l'équation $f(x) = x$ avait deux solutions, une positive et la deuxième négative. « Les conditions de la suite », « les propriétés de (u_n) », d'après les débats, c'est que la suite est à termes positifs, donc la limite doit être positive ; c'est aussi la conception de **E56** :

E56 : La suite converge vers cette solution à condition qu'elle soit positive

Nous présentons un extrait de ces débats :

Nous rappelons la question :

Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) *si l'équation «* $f(x) = x$ *» a au moins une solution ?*

13 E1 : **Deuxième**, l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution, a au moins une solution.

21 E2 : Que peut-on dire au sujet de … l'équation *f(x)* a au moins une solution.

22 E4 : Il y a une condition, si la solution est négative ?

23 E3 : Non, là n'est pas le problème !

24 E2 : La limite d'une fonction peut être négative

28 E4 : tel que c'est, ça converge.

29 E2 : Vous racontez quoi-là ?

30 E4 : ça converge

L'étudiant **E4** soutient la convergence de la suite à partir du moment où l équation $f(x) = x$ admet au moins une solution, ce qui n'est pas l'avis des autres. Par ailleurs, il évoque la condition sur la limite.

38 E4 : Il y a une condition maintenant sur la limite, deux solutions distinctes

40 E2 : Non, il y a parfois que cette équation a deux solutions, une négative et une positive, et la limite est la solution positive.

42 E4 : c'est pourquoi je demandais si l'unique solution est négative ?

44 E3 : ça peut être une suite à termes positifs

45 E1 : Non, là se sont déjà des résultats de cours, on va commencer

56 E4 : Oui, je sais. Si et seulement si il n'y a qu'une seule solution qui vérifie la définition de la limite.

…

62 E4 : là alors tu dis déjà autre chose parce qu'on a une solution ; on a travaillé déjà … on dit sur la fiche de TD, on a trouvé deux solutions, il y avait une qui était négative, une qui était positive, on a éliminé celle qui était négative parce que la suite était à termes positifs.

Ce résultat provient des pratiques scolaires (62). Ils ont recours aux connaissances mathématiques pour répondre du fait de l'indisponibilité des connaissances logiques.

63 E1 : On résout l'équation-là lorsqu'on sait déjà que la suite converge non ?

Cette intervention renvoie au mode de traitement des suites récurrentes à l'université.

64 E2 : On peut aussi résoudre pour vérifier si la suite converge !

65 E1 : Comment-ça ?

66 E4 : Parce que si ça n'admet pas de solution, on saura que ça ne converge pas.

Cette réplique de **E4** montre qu'il mobilise le Modus Tollens en acte.

67 E1 : Si ça admet des solutions, tu conclus que ça converge ?

68 E4 : Oui

La réponse de **E4** renvoie au traitement de l'énoncé comme une équivalence :

À la ligne 64, il admet que $\neg Q \Rightarrow \neg P$, puis en (68), il répond que $Q \Rightarrow P$. Or $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est logiquement équivalent à $P \Rightarrow Q$. On a au total $P \Leftrightarrow Q$.

69 E1 : Ah bon ?

70 E4 : Si ça admet une solution qui définit les conditions de définition de la suite,

71 E1 : Quelles conditions de définition ?

72 E4 : La suite peut être à termes positifs, ça admet

73 E1 : deux solutions positives, tu fais comment ?

74 E4 : deux solutions positives, tu ne peux pas conclure.

En ligne 73, **E1** propose une situation qui met à défaut les connaissances sur lesquelles **E4** s'appuie pour répondre.

75 E1 : c'est justement pourquoi je dis que, est ce que quand il y a les solutions tu conclus ?

76 E4 : mais si ça admet une solution et que cette solution vérifie les conditions, elle converge. Et si elle admet deux solutions qui ne vérifient pas, qui vérifient les conditions et qui sont distinctes, tu conclus que la suite ne converge pas.

E4 essaie de catégoriser les situations dans lesquelles la suite converge afin de ne pas rester sur la réponse « on ne peut pas savoir » il reste sur les arguments mathématiques.

Dans cette séquence, le traitement d'un exercice dans le cadre des enseignements a permis d'installer le théorème-en-acte que nous avons énoncé ci-dessus et qu'on retrouve chez l'étudiant **E4**, ce qui l'amène à faire un traitement de l'énoncé (P) comme s'il avait affaire à une équivalence. On peut faire l'hypothèse que c'est le cas de plusieurs étudiants ayant adopté la réponse de la catégorie **R2_2**.

Dans le cas du groupe 2 la question de la convergence de la suite a été également l'objet de débats. L'étudiant **E5** affirme, qu'on ne peut rien dire de la convergence, mais a du mal à justifier cette affirmation. Il essaie de le faire à l'aide des outils logiques, en vain :

> 58 E5 : […] moi je me dis qu'on ne peut absolument rien dire par rapport à la fonction. Parce qu'on dit.
>
> 59 E6 : par rapport à la
>
> 60 E5 : par rapport à la nature de la convergence de la suite. […] Essayons un peu voir de prendre la négation de la contraposée.

E5 a répondu qu'on ne peut **absolument** rien dire au sujet de la convergence de la suite si l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution et propose pour justifier sa réponse, d'utiliser la négation de la contraposée.

À partir de cette séquence, on peut faire l'hypothèse que l'étudiant sait que dans cette situation on ne peut pas faire de déduction. Mais le lien entre cette connaissance et la règle du Modus Ponens n'est pas disponible. C'est pourquoi il a recours à la négation de la contraposée.

Il propose à ses camarades :

> **81 E5** : […] Essayons de trouver une suite qui soit non convergente, une suite récurrente, non convergente telle que l'équation-ci admette des solutions.

Il s'agit de trouver un contre-exemple à l'énoncé :

« Si l'équation f(x) = x a au moins une solution, alors, la suite (u_n) est convergente »

implicitement quantifié sur la suite et sur la fonction. Le groupe arrive à produire ce contre-exemple : ils trouvent une suite dont la fonction associée admet un point fixe, et qui n'est pas convergente, comme le montrent ces échanges :

> **87 E7** : essayons de construire une suite
>
> **88 E5** : Le problème qui est là, c'est que pour être clair, trouvons une suite, qui est récurrente et non convergente, mais pourtant, l'équation f(x) = x admet au moins une solution. C'est tout ! Si on réussit à trouver pareille suite …

Pour arriver à conclure qu'on ne peut rien dire au sujet de la convergence de la suite (u_n), les étudiants doivent produire un exemple et un contre-exemple à l'énoncé :

« si l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution, alors la suite (u_n) converge »

Nous faisons l'hypothèse que c'est parce que les exemples sont disponibles chez les étudiants qu'ils ne cherchent qu'à exhiber un contre-exemple.

> **89 E6** : c'est fini.
>
> **90 E5** : Donc en fait, moi je pense qu'on ne peut absolument rien dire.

93 E7 : Si on prend même la fonction, la suite définie par $u_{0=1}$ et peut-être $u_{n+1} = u_n^2$

94 E5 : On a une suite constante, mon garçon, change le 1 là !

95 E6 : mets 2. C'est une suite croissante

96 E5 : elle est croissante, mais elle n'est pas majorée. Est-ce que l'équation…

97 E7 : on veut seulement regarder les solutions de l'équation $f(x) = x$

98 E5 : ça c'est une suite croissante et non majorée, cela veut dire qu'elle n'est pas convergente. Et maintenant, résolvons maintenant l'équation $x = x^2$

100 E5 : on a quoi, 0 et 1, n'est ce pas ? Voilà par exemple un cas particulier que tu as pu construire qui justifie que l'on ne peut rien dire à propos de la convergence de la suite. Cette suite est une suite qui est non convergente

Les séquences des deux groupes présentent deux manières distinctes de justifier la même réponse :

- le premier groupe explicite le fait que dans certains cas ils peuvent conclure et dans d'autres ils ne le peuvent pas. Pour cela, ils s'appuient sur un exemple rencontré en cours. L'argument mathématique qu'ils produisent n'est pas correct ;
- Dans le deuxième groupe, les étudiants vont développer une succession de schèmes (utilisation de la contraposée, de la négation de la contraposée, et enfin production d'un contre-exemple) pour aboutir à une conclusion. Ils déterminent un contre-exemple et concluent « on ne peut rien dire » ; ils ne reviennent pas sur le fait qu'il y a de nombreux exemples.

Ces deux séquences nous permettent de dire, en accord avec Durand-Guerrier (1996), que « ce sont les connaissances mathématiques qui permettent de répondre dans les cas où les règles classiques d'inférence ne s'appliquent pas » (op. cit, p. 202).

Item 6.3 : *Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « f(x)=x » si la suite* (u_n) *est convergente ?*

Tableau T6(4) : répartitions des réponses à l'item 6.3

	R3_1 L'équation a une solution	**R3_1*** L'équation a une seule solution	**R3_2** Sol dont une est limite	**R3_3** autres	**R3_4** Pas de réponse
CODES ETUDIANTS	E15, E24, E26, E29, E38, E46, E53, E32	E14, E31, E33, E34, E39, E42, E44, E49, E50, E55, E62, E63, E65, E66, E67, E68 E06, E43, E48 E37	E17, E19, E22, E28, E30, E35, E40, E59,	E02, E07, E21, E25, E41, E52, E56, E58, E61	E01, E03, E04, E05, E08, E09, E10, E11, E12, E13, E16, E18, E20, E23, E27, E36, E45, E47, E51, E54, E57, E60, E64
EFFECTIFS	**8**	**20**	**8**	**9**	**23**

23 étudiants n'ont pas répondu à cet item qui nous semblait pourtant leur être familier. Sur les 45 qui ont répondu, 36 admettent clairement l'existence d'une solution (qu'elle soit unique ou non).

Analyse des réponses de la catégorie R3_2 :

Nous avons fait figurer la réponse de **E30** dans cette catégorie :

> **E30** : $f(x) = x$ admet une seule solution vérifiant les conditions de u_n

Nous référant au débat du groupe 1 ci-dessus, cette réponse pourrait se traduire par :

> « l'équation admet au moins une solution, et parmi ces solutions, il n'y en a qu'une seule qui satisfasse les contraintes imposées par la suite ».

Il est sous-entendu que cette solution est la limite de la suite. Cet implicite peut renvoyer cette réponse dans la catégorie **R3_3.**

Analyse des réponses de la catégorie R3_1* :

Comme nous l'avons dit dans notre analyse a priori, on pourrait penser que les étudiants transfèrent l'unicité de la limite à celle des solutions de l'équation, du fait que cette équation permet de déterminer la limite de la suite lorsqu'elle est convergente. La conception d'une solution unique pourrait également provenir des habitudes scolaires : très souvent dans les exercices (au lycée), le point fixe de la fonction est unique[9].

[9] Voir analyse du manuel CIAM, « Mathématiques, terminale S » au chapitre 4.

La réponse de l'étudiant **E37** renvoie à l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = x$.

E37 : f(x) = x a pour solution la limite de la suite

En effet, d'après cette réponse, si cette équation admet une solution, elle est nécessairement limite de la suite, et l'unicité de la limite contraint à l'unicité de la solution.

Une des raisons évoquées précédemment pourrait motiver les réponses de **E07** et **E25** qui se situent dans la catégorie **R3_3** :

E07, **E25** : Elles sont égales

On retrouve ce glissement de l'unicité de la limite aux solutions de l'équation dans les débats des étudiants.

E3 énonce la question :

82 E3 : C'est possible. Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = x$ si 6.3, la suite u_n est convergente ?

83 E2 : elle admet une unique solution

84 E1 : Non, au moins

85 E2 : Une unique gars, une unique solution ;

E2 reste dans cette posture, rejoint par **E4**, malgré les arguments de E1 allant contre cette réponse.

94 E4 : je suis entrain de voir dans mon cahier, que c'est l'unique solution

E4 se réfère à son cahier, et probablement à un exercice qui a été résolu en classe : il faut noter la différence entre « une unique solution » et « l'unique solution » en référence à un exercice qui aurait été traité en classe.

125 E2 : Moi j'insiste là-bas. Quand la suite converge, la limite $f(x) = x$ est unique. Admet une unique solution ;

128 E2 : On peut avoir ça dans CIAM ?

130 E1 : Il y a des exercices comme ça dans le CIAM, partout !

131 E2 : Je dis une propriété du genre ?

132 E1 : Non, on ne précise pas. On dit seulement que ça doit être solution de l'équation $f(x) = x$. ça doit être solution de l'équation $f(x) = x$. ça ne veut pas dire que l'équation $f(x) = x$ a une seule solution.

133 E2 : ça doit être **une solution**, alors que **la limite est unique**. Si ça doit être solution, qu'est ce que tu dis alors ?

134 E1 : Est-ce que je dis que toutes les solutions sont limites. **Je n'ai pas dit que toutes les solutions sont limites**. Il y a d'abord plusieurs solutions, mais **une des solutions est limite**. Ça ne contredit pas le fait que la limite existe

Cette observation de **E2** rejoint la réponse de l'étudiant **E37** ($f(x) = x$ a pour solution la limite de la suite).

Cette séquence montre que conformément à notre analyse a priori, la pratique de classe contribue fortement à installer des connaissances-en-acte chez les étudiants, et qu'elles sont réutilisées dans des situations où elles sont mises en défaut : le fait de souvent trouver une seule solution à l'équation $f(x) = x$ peut conforter les étudiants dans l'idée d'une solution unique pour l'équation.

<u>Analyse des réponses de la catégorie R3_3 :</u>

E02, **E52** et **E56** imposent des conditions à la solution de l'équation :

> **E02** : Ces solutions pourront être soit majorant, soit minorant de la suite
> **E52 :** $f(x) = x$ a une seule solution positive
> **E56** : $f(x) = x$ admet au moins une solution positive

Les trois admettent l'existence d'une solution de l'équation, et la condition imposée provient comme le montre la séquence ci-dessus du groupe 1, de la pratique enseignante.

Nous avons eu des réponses contingentes dans cette catégorie :

> **E21** : L'équation peut soit avoir des solutions, soit ne pas avoir de solution
> **E61** : On ne peut se prononcer car ce n'est pas une équivalence

<u>Item 6.4</u> : *Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « f(x)=x » si la suite (u_n) n'est pas convergente*

Tableau T6(5) : récapitulatif des réponses à l'item 6.4

	R4_1 On ne peut savoir	**R4_2** L'équation n'a pas de solution	**R4_3** Plus d'une sol ou rien	**R4_3***	**R4_3****	**R4_4** autres	**R4_5** Pas de réponse
CODES ETUDIANTS	E15, E37, E40, E46, E48	E06, E17, E21, E27, E28, E29, E32, E33, E35, E38, E39, E41, E56, E59, E61 E19, E30	E43, E44, E49, E50, E55, E62, E63, E65, E66, E68	E26, E34, E53	E14, E25, E42	E02, E31, E58, E67,	E01, E03, E04, E05, E07, E08, E09, E10, E11, E12, E13, E16, E18, E20, E22, E23, E24, E36, E45, E47, E51, E52, E54, E57, E60, E64
EFFECTIFS	**5**	**17**	**10**	**3**	**3**	**4**	**26**

Au cours du dépouillement de cet item, nous avons ajouté les catégories **R4_3*** et **R4_3**** :

R4_3* correspond à la réponse « l'ensemble des solutions est vide ou la solution ne respecte pas les contraintes sur la suite » ;

R4_3** correspond à « l'équation a plus d'une solution »

Analyse des réponses de la catégorie R4_1

Les étudiants **E15**, **E37**, **E40**, **E46** et **E48** ont des réponses de cette catégorie. Lorsque nous rapprochons cette catégorie de **R2_1** (on ne peut rien dire) à l'item **6.2**, nous retrouvons les étudiants **E15**, **E37** et **E46**. Mais de ces trois, le seul qui ait répondu correctement aux quatre items est **E15 :** ses quatre réponses correspondent au codage **2313** adopté par V. Durand-Guerrier.

Cet étudiant utilise correctement les règles du Modus Ponens et du Modus Tollens, et sait à quel moment on ne peut pas les utiliser.

Analyse des réponses de la catégorie R4_2

17 répondent que l'équation n'admet pas de solution. Nous retenons la formulation de **E19**, **E30 :** « $f(x) \neq x$ ». Nous faisons l'hypothèse qu'elle sert d'abréviation pour signifier que l'équation n'admet pas de solution. Mais cette abréviation a la particularité de faire disparaitre l'équation.

La réponse « l'équation n'admet pas de solution » pourrait provenir de ce que les étudiants traitent l'implication comme une équivalence, tout comme celle de la catégorie **R2_2** de l'item **6.2**. Nous avons rapproché ces deux catégories :

11 étudiants se retrouvent dans les deux catégories. Pour affiner notre analyse, nous avons recherché les réponses de ces étudiants dans les catégories **R1_1**[10] et **R3_1**[11] ou **R3_2**[12] des items **6.1** et **6.3** respectivement.

Nous obtenons le résultat suivant :

E06, **E17**, **E28**, **E29, E38** et **E56** considèrent qu'ils sont en présence d'une équivalence. Leurs quatre réponses correspondent au codage **2112** adopté par V. Durand-Guerrier.

Ils utilisent correctement le Modus Ponens et le Modus Tollens, et utilisent la règle invalide « ($P \Rightarrow Q$ vrai, et $non\, P$ vrai), alors $non\, Q$ vrai ». Cette règle n'est valide que si on a l'équivalence.

Les quatre autres de cette catégorie :

E27 : ses réponses correspondent au codage **2902**

E35 : ses réponses correspondent au codage **0012**

E41 : ses réponses correspondent au codage **9092**

Analyse des réponses des catégories R4_3, R4_3* et R4_3**

[10] La suite ne converge pas

[11] L'équation $f(x) = x$ admet une solution

[12] L'équation admet une solution dont une est la limite de la suite

Nous avons réuni ces trois catégories à cause de leur proximité. Les réponses à l'item **6.3** des étudiants correspondant prennent en compte l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = x$:
9 étudiants sur les 10[13] de la catégorie **R4_3** ont répondu :

f(x) = x a une seule et unique solution

Il en est de même pour **E34** dans la catégorie **R4_3***et de tous les étudiants de la catégorie **R4_3**.**

En dehors de **E14** et de **E50**, tous les étudiants des trois catégories ont répondu à l'item **6.1** que la suite divergeait.

C'est dans l'item **6.2** que ces étudiants sont partagés. 6 étudiants posent comme condition de convergence de la suite, l'unicité de la solution de l'équation.

Nous récapitulons cette analyse dans le tableau T6(9) en annexe 6.

Du tableau il ressort que **E25**, **E49**, **E62**, **E65** et **E68** traitent l'implication comme s'ils étaient en face d'une équivalence. On peut faire l'hypothèse qu'il en est de même de **E42**, au vu de sa réponse en **6.2,** et de **E50** et **E66 :** le fait que l'équation admette au moins une solution pourrait avoir motivé leur réponse qui est « la suite ne converge pas ».

Dans les débats au cours du module de suivi, une autre réponse émerge :

« la solution de l'équation n'appartient pas au support de la suite »

Ceci renvoie aux exemples qu'ils ont rencontrés en cours.

Conclusion

L'analyse des résultats de cet exercice montre que :

1- l'énoncé en jeu est complexe et peut faire l'objet d'une analyse logique au cours d'une séance de travail avec les étudiants. On pourrait également leur proposer la construction de sa contraposée dans la langue naturelle et dans le langage formel, cela permet de mettre en lumière les implicites de la langue ;
2- les étudiants lient l'existence des solutions de l'équation $f(x) = x$ à la convergence de la suite ; un phénomène ne peut se produire sans l'autre. En outre, pour certains, la solution doit être unique, et c'est même une condition nécessaire à la convergence de la suite. Chez ces étudiants, il y a identification de l'existence d'une solution de l'équation à la limite de la suite ;
3- certaines abréviations utilisées par les étudiants, et même par les enseignants peuvent modifier la structure d'un énoncé, et de ce fait, transformer le problème. Nous avons repéré une écriture qui a priori est compréhensible par les étudiants, mais qui est

[13] E43 n'a pas donné cette réponse en 6.3

problématique : $f(x) \neq x$ Elle est utilisée par l'étudiant pour traduire le fait que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution. Cette écriture, d'une part, a fait disparaitre l'équation, et d'autre part, cache la quantification ;

4- les étudiants justifient leurs réponses surtout avec des arguments mathématiques. Des arguments logiques sont utilisés mais, ils sont complétés par les connaissances mathématiques ; les inférences établies se font en acte et on constate qu'il y a chez eux une indisponibilité des connaissances prédicatives en logique qui leur permettrait de soutenir leur raisonnement. Cet exercice pourrait permettre d'expliciter certaines règles d'inférence qui contribueraient à alléger certains raisonnements, préciser les situations dans lesquelles ces règles ne peuvent pas être utilisées ;

5- certains étudiants ont des conduites inférentielles qui renvoient à celles de l'équivalence. Pour ces étudiants, des constructions de contre-exemples comme celui des étudiants du second groupe à l'exercice **6.2**, peuvent être des exercices qui leur permettent de réviser leur position ;

6- les échanges relatifs à l'item **6.1** montrent que l'énoncé (P) est bien approprié pour travailler sur le choix des quantificateurs dans des activités de formalisation d'une part et, d'autre part, sur l'importance de l'explicitation des quantificateurs pour prendre la contraposée d'un énoncé.