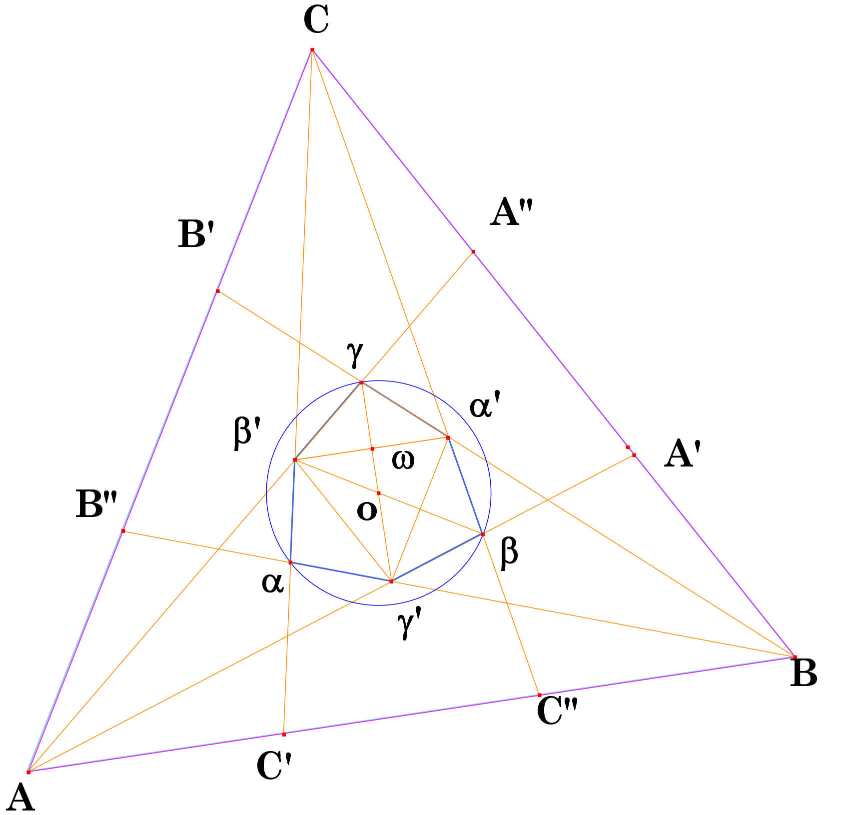
# Utiliser, en Terminale, les complexes pour eux-mêmes.

## Introduction

Le petit texte qui suit est une preuve par les nombres complexes d'un exercice qu'*Henry Plane* a proposé à la commission le 17 Octobre dernier.

> *On coupe les trois côtés d'un triangle en trois, et l'on relie les points obtenus au sommet opposé. On obtient ainsi un hexagone non régulier au centre du triangle. Montrer que l'aire de cet hexagone est le dixième de l'aire du triangle.*




La preuve qui suit se cantonne au cas d'un triangle équilatéral. En vérité, si on connaît l'affinité, on sait qu'on pourra ramener le problème général à ce cas particulier, et donc cette démonstration suffirait. Mais ce n'est pas ce sur ce point que nous voudrions insister ici.
La résolution de cet exercice, dans ce cas, est très accessible aux élèves de Terminale, et cet exercice est pourrait donc servir à d'autres collègues. Nous essaierons de poser quelques remarques en conclusion.

## Une solution

Pour tout point $M$ (resp. $\mu$) on note $m$ (resp. $\mu$) son affixe[1].

[1] La tradition veut que le langage distingue les points et les complexes. Il faudrait raconter une partie de l'histoire de ces nombres, et rappeler toutes les difficultés qu'on a eu à les accepter pour comprendre cette distinction. Dans

Ainsi par la définition du barycentre, on a $3a" = 2c + b$ et $3c' = 2a + b$ donc $3a" - 3c' = 2c - 2a$, en remarquant d'ailleurs que cette égalité pourrait être écrite directement en utilisant le théorème de Thalès.
On a donc[2]

$$\frac{1}{5}(3a" + 2a) = \frac{1}{5}(3c' + 2c).$$

Par la première égalité le point représenté appartient à la droite $(AA")$ par la seconde à $(CC')$; c'est donc le point $\beta'$

$$\beta' = \frac{1}{5}(3a" + 2a) = \frac{1}{5}(2c + b + 2a) = -\frac{b}{5} = -\frac{1}{5},$$

le résultat étant simplifié en prenant, ce qui ne change rien, $b = 1$; et en remarquant que $a+b+c = 0$.
Par une rotation facile à mettre en forme on a ainsi

$$\gamma' = -\frac{j}{5} \qquad \alpha' = -\frac{j^2}{5}.$$

Par homothétie le triangle équilatéral $\alpha', \beta', \gamma'$ a donc une aire qui vaut l'aire du triangle initial divisée par 25. La réflexion par rapport à la hauteur menée par $C$ envoie $(BB')$ (resp $(BB")$) sur $(AA")$ (resp $(AA')$) conclusion les intersections de ces droites appartiennent à l'axe de symétrie, donc $(\gamma\gamma')$ est la hauteur issue de $C$. Comme ceci est vrai par rotation pour les trois sommets, on déduit que $(\gamma\gamma')$, $(\beta\beta')$ , $(\alpha\alpha')$ concourrent au centre de gravité du triangle. Mais curieusement l'hexagone central n'est pas régulier, et l'on ne peut pas déduire les autres points à partir des trois premiers.
Utilisons cette fois Thalès,
$3a' - 3c" = c - a$ En retournant cette égalité, on obtient un point qui est à la fois sur $(AA')$ et sur $(CC")$ c'est-à-dire $\beta$:

$$\beta = \frac{1}{4}(3a' + a) = \frac{1}{4}(3c" + c) = \frac{1}{4}(a + 2b + c) = \frac{1}{4}.$$

Donc, par rotation

$$\beta = \frac{1}{4}$$

$$\gamma = \frac{j}{4} \qquad \alpha = \frac{j^2}{4}.$$

Le triangle $\alpha'\gamma\beta'$ a la même base que le triangle $\alpha'\gamma'\beta'$. Le pied de leur hauteur commune est le point de $\omega$. L'une des hauteurs vaut donc $\frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$, alors que l'autre vaut $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$. Le rapport de leurs aires est donc de 2.
Autrement dit les trois triangles oubliés sont chacun deux fois plus petit que le triangle de base.
En tout on a donc, par rapport au triangle de base

$$\frac{1}{25} + 3/50 = 1/10.$$

## Commentaires

Depuis au moins dix ans, sans doute pour simplifier les exercices de Bac, on a pris l'habitude d'enseigner les complexes comme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et non plus comme $\mathbb{C}$.

l'article nous avons adopté une règle bâtarde puisque les lettres du grand triangle sont bien posées, mais pas celles de l'hexagone car le rédacteur a craqué quand il a fallu le nommer.

[2] On va le voir dans les commentaires c'est l'interprétation de cette relation qui est intéressante...

Il n'est pas rare de rencontrer une première question de Baccalauréat (on trouve également ce travers sur des activités qui figurent sur le site des Irem) qui commence ainsi *En calculant la partie réelle et la partie imaginaire de z, montrer que ...*. Cette pratique empêche les élèves de comprendre l'essentiel, $\mathbb{C}$ est un corps. On peut donc calculer directement sur les complexes, travailler sur la somme, le produit et le quotient, avec l'aisance que nous a donnée l'entraînement dans $\mathbb{R}$, et apprendre un nouvel outil, l'outil de la conjugaison[3].
De la même façon *l'interprétation géométrique des nombres complexes* ne doit pas nous conduire dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mais directement dans le plan complexe.
L'exercice qui précède est un pur exercice de géométrie affine. On peut le traiter, dans le cas général, par le calcul barycentrique. Comme celui-ci ne fait plus partie des compétences requises, l'introduction des complexes, permet d'y suppléer[4].
Le point délicat de l'exercice consiste à interpréter une somme de deux complexes (grâce au barycentre), ce qui permettra de repérer (directement dans $\mathbb{C}$ disions nous) les points de la figure.
L'usage des complexes permet aussi de calculer des aires, puisque deux fois l'aire du triangle déterminé par les complexes $u$ et $v$ images de $\vec{u}\ \vec{v}$ vaut $\Im(\overline{u}v)$. Dans la solution que nous venons de donner, nous n'avons pas eu besoin de ce calcul puisque seuls les rapports importaient. Dans la solution générale que nous donnons à la fin de cet article, la formule sert.
En revanche, la configuration du triangle équilatéral, image des racines troisièmes de l'unité fut bien utile.

## Note sur le cas général

Si l'on se place dans le cas général, on peut reproduire le même raisonnement, puisque la relation $a+b+c=0$ reste vraie (en prenant le centre du repère au centre de gravité du triangle).
On a donc de la même façon

$$\beta' = -\frac{b}{5} \text{ et } \quad \gamma' = -\frac{c}{5} \quad \alpha' = -\frac{a}{5}.$$

La permutation sur les lettres prenant alors la place de la rotation de 120 degrés. Pour l'autre série

$$\beta = \frac{b}{4} \text{ et } \quad \gamma = \frac{c}{4} \quad \alpha = \frac{a}{4}.$$

L'aire du triangle $ABC$ est nous l'avons dit, la moitié de

$$\Im((\overline{b-a})(c-a)) = \frac{1}{2i}\left(\overline{b}c - \overline{b}a - c\overline{a} - b\overline{c} + b\overline{a} + \overline{c}a\right).$$

Comme $a+b+c=0$, le premier petit triangle équilatéral $\alpha', \beta', \gamma'$ a encore une aire égale à celle du triangle initial divisé par 25.

Restent à calculer les aires des derniers triangles.
Le triangle $\alpha'\gamma\beta'$ a pour aire la moitié de

$$\sigma_\gamma = \Im\left((\overline{\beta'-\gamma})(\alpha'-\gamma)\right) = \Im\left(\overline{(-\frac{1}{5}\,b - \frac{1}{4}\,c)}\left(-\frac{1}{5}\,a - \frac{1}{4}\,c\right)\right) = \Im\left(\frac{1}{400}\ \left(4\,\overline{b} + 5\,\overline{c}\right)(4\,a + 5\,c)\right)$$

soit la moitié de

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{25}\,\overline{b}a + \frac{1}{20}\,\overline{b}c + \frac{1}{20}\,\overline{c}a - \frac{1}{25}\,b\overline{a} - \frac{1}{20}\,b\overline{c} - \frac{1}{20}\,c\overline{a}\right) = -\frac{3}{50}\,b\overline{c} + \frac{3}{50}\,\overline{b}c.$$

[3] Qu'on ne voyait pas dans $\mathbb{R}$ et pour cause...
[4] Dans le fichier joint, **Frédéric Vivien** (irem de Rouen) formateur d'enseignants, en a rédigé une démonstration élémentaire (*cf* demonstration par les aires.pdf). La commission de géométrie l'en remercie.

En sommant les aires des trois triangles extérieurs on trouve donc 3/50 de la surface et de nouveau

$$\frac{1}{25}+\frac{3}{50}=\frac{1}{10}.$$

## La magie des notations offre une généralisation

Si l'on prend la peine de poser des notations harmonieuses, en *faisant tourner les lettres* on obtient souvent des rédactions simplifiées. D'ailleurs c'est l'occasion pour le professeur de définir avec précision les permutations qu'il utilise, et donc d'initier au travail dans le groupe symétrique.
Ici, le problème est un peu différent, et nous nous contenterons de vérifier que la preuve que nous avons écrite supporte une généralisation.
Ainsi par la définition du barycentre, on a $(n+1)a" = nc+b$ et $(n+1)c' = na+b$ donc $(n+1)(a" - c') = n(c-a)$.

$$\frac{1}{2n+1}((n+1)a" + na) = \frac{1}{2n+1}((n+1)c' + nc).$$

Par la première égalité le point représenté appartient à la droite $(AA")$ par la seconde à $(CC')$; c'est donc le point $\beta'$

$$\beta' = \frac{1}{2n+1}((n+1)a" + na) = \frac{1}{2n+1}(nc+b+na) = -\frac{n-1}{2n+1}.$$

Le résultat étant simplifié en prenant, comme précédemment, $b=1$; et en remarquant que $a+b+c=0$.
Par une rotation facile à mettre en forme on a ainsi

$$\gamma' = -\frac{n-1}{2n+1}\,j \qquad \alpha' = -\frac{n-1}{2n+1}\,j^2.$$

Par homothétie le triangle équilatéral $\alpha', \beta', \gamma'$ a donc une aire qui vaut l'aire du triangle initial divisée par $\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2$.
Comme précédemment,
$(n+1)(a' - c") = c - a$ En retournant cette égalité, on obtient un point qui est à la fois sur $(AA')$ et sur $(CC")$ c'est-à-dire $\beta$:

$$\beta = \frac{1}{n+2}((n+1)a' + a) = \frac{1}{n+2}((n+1)c" + c) = \frac{1}{n+2}(a+nb+c) = \frac{n-1}{n+2}.$$

Donc, par rotation

$$\beta = \frac{n-1}{n+2}$$

$$\gamma = j\,\frac{n-1}{n+2} \qquad \alpha = j^2\,\frac{n-1}{n+2}.$$

Le triangle $\alpha'\gamma\beta'$ a la même base que le triangle $\alpha'\gamma'\beta'$. Le pied de leur hauteur commune est le point de $\omega$. L'une des hauteurs vaut donc $\frac{n-1}{n+2} - \frac{n-1}{2(2n+1)} = \frac{3}{2}\,\frac{(n-1)}{(n+2)(2n+1)}$, alors que l'autre vaut $\frac{3(n-1)}{2(2n+1)}$. Le rapport de leurs aires est donc de $\frac{n+2}{n}$.
Autrement dit les trois triangles oubliés sont chacun $\frac{n+2}{n}$ fois plus petit que le triangle de base.
En tout on a donc, par rapport au triangle de base

$$\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^2\left(1+3\frac{n}{n+2}\right) = 2\,\frac{(n-1)^2}{(n+2)\,(2\,n+1)}.$$

Le résultat en dixième est plutôt fortuit, voici la table des premières valeurs :

| $n+1$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\,\frac{(n-1)^2}{(n+2)(2\,n+1)}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{8}{35}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{32}{77}$ | $\frac{25}{52}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{49}{85}$ | $\frac{128}{209}$ | $\frac{9}{14}$ | $\frac{200}{299}$ | $\frac{121}{175}$ | $\frac{32}{45}$ | $\frac{169}{232}$ | $\frac{392}{527}$ | $\frac{25}{33}$ | $\frac{512}{665}$ | $\frac{289}{370}$ | $\frac{72}{91}$ | $\frac{361}{451}$ | $\frac{800}{989}$ |

Si l'on coupe le côté en 8 parts égales, on trouve un hexagone dont l'aire vaut les 8/15 de l'aire de départ. Evidemment l'aire de l'hexagone tend asymptotiquement vers celle du triangle de départ.