

# ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = y$ & FONCTION EXPONENTIELLE

## 1 Introduction

Les nouveaux programmes de terminales S conseillent d'introduire la fonction exponentielle avant la fonction logarithme.

Nous allons montrer que l'on peut *presque* construire cette fonction en utilisant les notions du programmes de cette classe.

On travaille évidemment sur des séries entières et il n'est pas question d'en faire la théorie en terminale. Cependant, admettre certains résultats peut permettre la compréhension globale de l'exponentielle.

Jean DIEUDONNÉ écrivait, dans la préface de son cours à l'usage des étudiants de faculté :

*..., les physiciens raillent souvent les mathématiciens pur de vouloir toujours tout démontrer et de "couper les cheveux en quatre" pour établir des résultats "évidents"; ils n'ont pas toujours tort, et un étudiant débutant a intérêt à admettre des résultats plausibles sans s'encombrer l'esprit de démonstrations subtiles, pour réserver ses efforts à l'assimilation de notions nouvelles et "non évidentes".*

C'est ce que j'ai essayé de faire avec ma classe de terminale S cette année.

## 2 Recherche de fonctions égales à leur dérivée

Rechercher une fonction égale à sa dérivée revient à résoudre l'**équation différentielle** :  $f' = f$ .

Une fonction vérifiant cette équation différentielle ne peut-être un polynôme, car le polynôme dérivé d'un polynôme de degré  $n$  est de degré  $n-1$ . Nous n'avons, jusque là rencontré aucune fonction rationnelle, ni fonction contenant des radicaux vérifiant  $f' = f$ . Aucune fonction trigonométrique ne convient non plus.

Il nous faut chercher ailleurs.

### 2.1 Famille de fonctions

On considère la famille de fonctions suivantes :

Pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$  et pour tout  $x \geq 0$ , on définit la fonction :  $x \rightarrow u_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

On rappelle que  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ .

### 2.2 Dérivée des fonctions $u_n$

$$\begin{aligned} u'_n(x) &= \sum_{p=1}^n \frac{p x^{p-1}}{p!} = 0 + 1 + \frac{2x}{1 \times 2} + \frac{3x^2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{4x^3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{n x^{n-1}}{n!} \\ &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \times 2} + \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{x^p}{p!} \\ &= u_{n-1}(x) \end{aligned}$$

L'idée est de considérer un polynôme *infini*. Dans ce cas, on obtiendra une *fonction égale à sa dérivée*.

Pour cela, il faut étudier la suite  $u_n$  afin de montrer qu'elle est convergente et donc trouver sa limite, pour tout  $x$ . Nous nous limiterons, dans un premier temps, aux  $x$  réels positifs strictement.

## 3 Étude de suites

Si  $x = 0$ , pour tout  $n$  naturel,  $u_n(0) = 0$ .

On considère maintenant les deux suites  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  définies, pour tout  $x$  réel positif strictement **fixé**, par :

$$u_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} \quad \text{et} \quad v_n(x) = u_n(x) + \frac{x^n}{n!}$$

**PROPOSITION 3.1.** Les suites  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes.

*Démonstration.*  $u_n(x) - v_n(x) = \frac{x^n}{n!} > 0$ , car  $x > 0$ , donc  $u_n(x) > v_n(x)$ .

- $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante, c'est-à-dire :  $\forall n, n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) - u_n(x) > 0$  :

$$\forall n, n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > 0$$

- $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante à partir de  $n > 2x - 1$ , c'est-à-dire :  $\forall n, n > 2x - 1, v_{n+1}(x) - v_n(x) < 0$  :

$$\begin{aligned} \forall n, n > 2x - 1, v_{n+1}(x) - v_n(x) &= u_{n+1}(x) - u_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{x^n(2x - (n+1))}{(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

- Leur différence tend vers 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n(x) - u_n(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

C.Q.F.D.

Ces deux suites possèdent donc une limite commune.

Ainsi, pour tout réel  $x$  positif, il existe un réel, que l'on notera  $\exp(x)$ , limite de la suite  $u_n(x)$ .

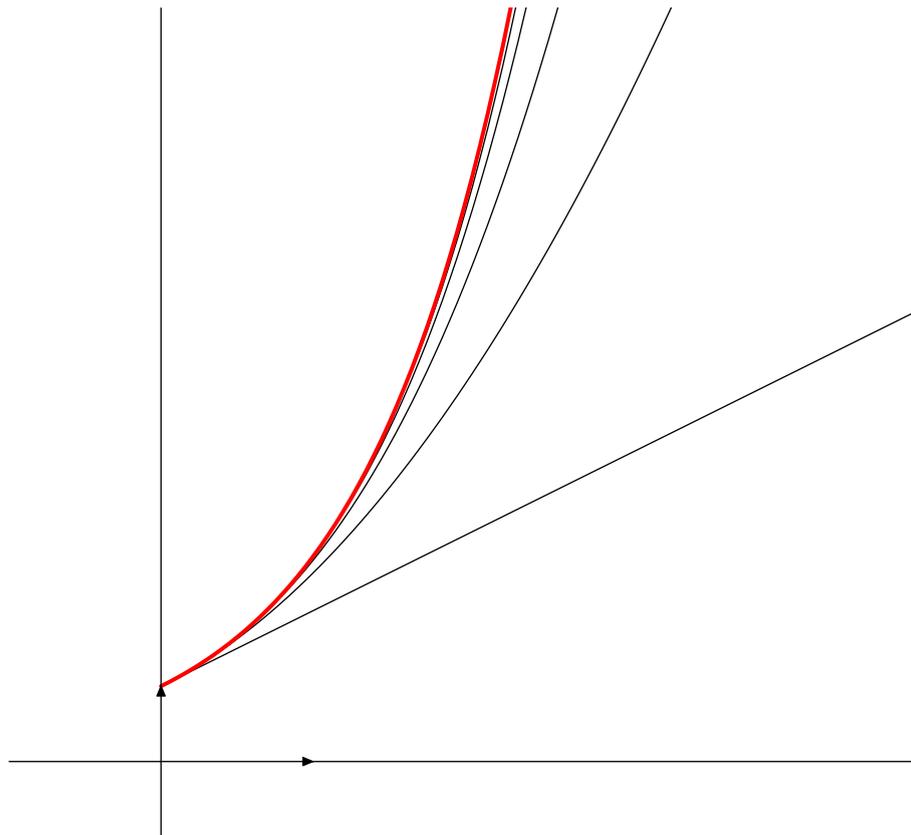
On peut donc considérer la fonction :  $x \rightarrow \exp(x)$ .

Nous pouvons ainsi écrire :

$$\exp(0) = 0 \quad \text{et} \quad \exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

**ON ADMET QUE TOUTES LES PROPRIÉTÉS VRAIES POUR LES SOMMES FINIES SONT VALABLES SUR LES SOMMES INFINIES RENCONTRÉES DANS CE CHAPITRE. CE QUI EST LOIN D'ÊTRE VRAIE DANS LE CAS GÉNÉRAL !**

## 4 Construction de la représentation de la fonction $\exp$ par approximation sur $\mathbb{R}^+$



Constructions successives des courbes de  $u_1(x) = 1 + x$ , de  $u_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ , de  $u_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$ , de  $u_4(x)$  et de  $u_5(x)$

## 5 Dérivée de $\exp$

**PROPOSITION 5.1.** La fonction  $\exp$  est égale à sa dérivée sur  $\mathbb{R}^+$ .

*Démonstration.* Les suites  $u_n(x)$  et  $u_{n-1}(x)$  ont même limite. Nous admettrons donc que, comme  $u'_n(x) = u_{n-1}(x)$ , le passage à la limite permet de dire que  $\exp'(x) = \exp(x)$ .

C.Q.F.D.

## 6 Prolongement sur $\mathbb{R}^{-*}$

**DÉFINITION.** Pour tout  $x < 0$ , on définit  $\exp(x)$  par :

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$$

**THÉORÈME 6.1.** Pour tout  $x$  strictement négatif :  $(\exp(x))' = \exp(x)$

*Démonstration.*

$$(\exp(x))' = \left( \frac{1}{\exp(-x)} \right)' = - \frac{(\exp(-x))'}{(\exp(-x))^2} = - \frac{-\exp(-x)}{(\exp(-x))^2} = \frac{1}{\exp(-x)} = \exp(x)$$

*Remarque :* On utilise la dérivée de fonctions composées.

C.Q.F.D.

## 7 Propriétés de la fonction exp

**PROPOSITION 7.1.**  $\forall a, a \in \mathbb{R}, \forall b, b \in \mathbb{R}, \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ .

*Démonstration.* Pour tout  $b$  réel, on dérive, sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f'(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp(x) \times \exp(b)}$

$$\left( \frac{\exp(x+b)}{\exp(x) \times \exp(b)} \right)' = \frac{\exp(x+b) \times \exp(x) \cdot \exp(b) - \exp(x+b) \times \exp(x) \cdot \exp(b)}{(\exp(x) \cdot \exp(b))^2} = 0$$

La fonction  $f$  est donc constante, pour tout  $x$  réel, en particulier, pour  $x = 0$ . Or  $f(0) = 1$ , donc, pour tout  $x$  réel,

$$\frac{\exp(x+b)}{\exp(x) \times \exp(b)} = 1 \iff \exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b)$$

On fait  $x = a$  et on obtient le résultat.

C.Q.F.D.

**PROPOSITION 7.2.**  $\exp(1)$  n'est pas un nombre rationnel.

*Démonstration par l'absurde.*  $\exp(1)$  est la limite commune aux deux suites adjacentes  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ .

Supposons que **la limite**  $\exp(1)$  **soit un nombre rationnel**, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres entiers positifs  $p$  et  $q$  tels que  $\exp(1) = \frac{p}{q}$  :

On pose  $N$  le numérateur de  $u_q$  ; c'est un nombre entier car somme et produit de nombres entiers.

$$u_q = \frac{N}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{N}{q!} + \frac{1}{q!} = \frac{N+1}{q!} = v_q$$

On multiplie ces inégalités par  $q!$  et on obtient :

$$N < q! \times \frac{p}{q} = (q-1)! \times p < N+1$$

Les inégalités sont au sens strict.  $(q-1)! \times p$  est donc un nombre entier compris strictement entre deux entiers consécutifs, ce qui est impossible. Donc l'hypothèse **la limite**  $\exp(1)$  **est un nombre rationnel** est fautive. Le contraire est donc correct : **la limite**  $\exp(1)$  **n'est pas un nombre rationnel**.

C.Q.F.D.

**ON NOTE  $e$  LE NOMBRE  $\exp(1)$  EN SOUVENIR DU MATHÉMATICIEN SUISSE EULER**

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \approx 2.718281828459045$$

**PROPOSITION 7.3.** Pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ ,  $\exp(n) = e^n$

*Démonstration par récurrence.* :

♣  $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \times \exp(1) = e \times e = e^2$

♡ Supposons que  $\exp(n) = e^n$  ; calculons  $\exp(n+1)$  :  $\exp(n+1) = \exp(n) \times \exp(1) = e^n \times e = e^{n+1}$ .

C.Q.F.D.

**PROPOSITION 7.4.**  $\exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

*Démonstration.*

$$\exp\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \exp(1) = e = \exp\left(\frac{1}{2}\right) \times \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \implies \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$$

C.Q.F.D.

**DÉFINITION (NOTATIONS).** Pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , on notera  $\exp(x) = e^x$ . Par construction de chaque terme,  $e^x > 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

## 8 Étude de la fonction exponentielle

### Domaine de définition

La fonction est définie pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .  
De plus,  $\forall x, x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ .

### Dérivée

$$\forall x, x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x > 0$$

### Sens de variations

La fonction est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x, x \in \mathbb{R}, \forall x', x' \in \mathbb{R} \quad x < x' \iff e^x < e^{x'}$$

### Limites

#### PROPOSITION 8.1.

$$\forall x, x \in \mathbb{R}, e^x > x$$

*Démonstration.* La suite  $u_n(x)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , sa limite est donc strictement supérieure à  $u_1(x) = 1 + x$ .

$$\forall x, x \in \mathbb{R}^{+*}, e^x > 1 + x > x$$

C.Q.F.D.

#### PROPOSITION 8.2.

 La fonction exp tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

*Démonstration.* On a  $x < e^x$  et lorsque que  $x \rightarrow +\infty$ ,  $e^x \rightarrow +\infty$ , d'après un corollaire du théorème des gendarmes. C.Q.F.D.

#### PROPOSITION 8.3.

 La fonction exp tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ .

*Démonstration.* Par définition,  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$  ;  
ainsi lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $-x \rightarrow -\infty$  et  $\frac{1}{e^x} \rightarrow 0$ .

C.Q.F.D.

La droite d'équation  $y = 0$  est asymptote horizontale à la représentation graphique de la fonction exponentielle en  $-\infty$ .

#### PROPOSITION 8.4.

 La fonction exponentielle est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

$$\forall a, a \in \mathbb{R}, \forall b, b \in \mathbb{R}, e^a = e^b \iff a = b$$

*Démonstration.* La fonction est continue et strictement croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

C.Q.F.D.

### Équation de la tangente en $x = 0$

Comme  $e^0 = 1$ , l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :

$$y = x + 1$$

### Croissance comparée

#### PROPOSITION 8.5.

$$\forall n, n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

*Démonstration.*

$$\forall n, n \in \mathbb{N}, e^x > u_{n+1}(x) \implies \frac{e^x}{x^n} > \frac{u_{n+1}(x)}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{2x^{n-1}} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!} > \frac{x}{(n+1)!} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

C.Q.F.D.

## Représentation graphique de la fonction exponentielle

