Poser la modélisation comme question épistémologique pour l'introduction des propriétés des exponentielles dans les classes

Jean Dhombres

Trois**ième partie**

La construction de l'exponentielle eulérienne

Le *modèle* qui sert à Euler pour sa construction de l'‘*exponentielle eulérienne* en 1748 consiste en une interprétation d'un nombre réel comme une limite, mais une limite très particulière. C'est celle d'un produit d'un infiniment grand par un infiniment petit. On peut en effet écrire tout réel x sous la forme $n\frac{x}{n}$, en faisant tendre n vers l'infini, sans d'ailleurs avoir à spécifier que n soit un nombre entier. A ce *modèle* est ainsi associée l'équation fonctionnelle de l'exponentielle : $(a^{\frac{x}{n}})^n=a^x$. La *modélisation* associée à ce modèle par Euler est un traitement algébrique des expressions polynomiales contenant un infiniment grand n. Il suffit pour comprendre d'écrire avec un coefficient d non nul.

$$\frac{an^2+bn+c}{dn^2+en+f}=\frac{a}{d},$$

l'égalité étant entendue au sens de la limite du premier membre lorsque n tend vers l'infini. Comme est associé un calcul qui, pour les petites valeurs de x, fait de l'exponentielle a^x le binôme $1+kx$, où k est une constante dépendant de a. Le choix de e est directement lié à la constante k, lorsqu'elle est prise égale à 1. De sorte que l'on ait

$$e^x=(1+\frac{x}{n})^n,$$

l'expression étant entendue par passage à la limite sur n. Euler ne donne aucune autre justification sur ce passage à la limite, que nous avons aussi rencontré pour la méthode d'approximation d'une solution de l'équation différentielle (2). En fait, Euler va utiliser la formule du binôme de Newton pour expliciter la puissance n-ème du second membre, et disposer du développement en série entière de l'exponentielle eulérienne. J'écris directement des égalités, comme Euler, là où il faudrait prendre des limites et utiliser cette autre *modélisation*.

$$e^x = (1+\frac{x}{n})^n = 1 + n\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\frac{x^k}{n^k} + ...$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + ... \frac{x^k}{k!} + ...$$

Dans cette voie, l'établissement de l'équation fonctionnelle de l'exponentielle requiert, comme Cauchy encore l'a montré en 1821, une théorie des séries entières, notamment du produit de deux séries entières, donc un bon maniement du rayon de convergence. L'avantage du développement en série entière est de pouvoir passer aisément à des valeurs complexes de la variable, et d'avoir la fameuse relation d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta .$$

On a vu que l'enseignement élémentaire retient seulement l'exponentielle réelle. Venons en à la première apparition de la fonction exponentielle, due à Grégoire de Saint-Vincent.

La construction grégorienne

Grégoire de Saint-Vincent part d'une branche d'hyperbole équilatère qu'il représente dans des axes de coordonnées que sont les deux asymptotes. Il a l'équivalent de l'équation cartésienne $xy= 2c$ par la constance de l'aire $2c$ du triangle OX_iY_i, i variant de 1 à 3 sur le dessin ci-dessous. Mais cette constante c n'intervient pas dans les calculs menés par Grégoire de Saint-Vincent, car il utilise les proportions à la manière ancienne. Il pose ensuite les points X_1, X_2 et X_3, en progression géométrique sur un axe, et ainsi les abscisses correspondantes x_1, x_2 et x_3 satisfont

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_1} .$$

De cette proportion, Grégoire de Saint-Vincent déduit

$$\frac{x_3 - x_2}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1}$$

Or on dispose également par la propriété de l'hyperbole une proportion inverse en y de celle de x :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_1}{y_2} \text{ et } \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3}$$

D'où

$$\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_2}{y_3}$$

Cette dernière proportion donne l'égalité des aires des deux rectangles $X_1\,X_2\,Y_2\,Z_1$ et $X_2\,X_3\,Y_3\,Z_2$. Si l'on insère X'_1comme moyenne géométrique entre X_1 et X_2, et X'_2 comme moyenne géométrique entre X_2 et $X_{3,}$ on constate algébriquement que X_2 est aussi moyenne géométrique entre X'_1 et X'_2 , puisque la suite des cinq points X_1 $X'_{1,}$ X_2, $X'_{2,}$ X_3 est aussi une progression géométrique. D'où l'égalité des aires des rectangles X_1 X'_1 Y'_1 Z'_1 , $X'_{1,}$ X_2 Y_2 T'_1, , X_2 X'_2 Y'_2 Z'_2 et X'_2 X_3 Y_3 T'_2. On peut poursuivre l'insertion de moyennes géométriques de sorte qu'à la limite, et d'ailleurs en majorant convenablement les restes, on dispose de l'égalité des trapèzes dont un côté est curviligne sur l'hyperbole, $X_1\ X_2\ Y_2\ Y_1$ et $X_2\ X_3\ Y_3\ Y_2$. Comme ces calculs reposent entièrement sur les progressions géométriques, en changeant de notations le résultat associe à une progression géométrique quelconque X_1, X_2 , X_3, etc., une progression arithmétique des aires curvilignes sous l'hyperbole, $X_1\ X_2\ Y_2\ Y_1$, $X_1\ X_3\ Y_3\ Y_2$, etc.

Figure 1

Une autre façon de dire, en ne faisant intervenir que deux abscisses *x* et *y*, est de poser *A, X* et *Y* en progression géométrique. Tout en appelant appeler *f(x)* l'aire sous l'hyperbole *AX,* pour une variable x quelconque. On vérifie l'équation de Neper

(16) $$f(\sqrt{xy})=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Mais on peut diviser *f* par *f(1)* en posant *g(x)= f(x)-f(1)*. Soit pour *g* la même équation fonctionnelle (16), et en outre *g(1)= 0*. D'où en faisant *y= 1*, $g(\sqrt{x})=\frac{g(x)}{2}$ et ainsi

$$g(xy)= g(x)+ g(y).$$

Figure 2

Grégoire de Saint-Vincent ne dira le logarithme que plus tard dans un court texte de 1649, qui souleva une étrange polémique à Paris sur la quadrature du cercle. Mais Grégoire de Saint-Vincent envisageait en 1647 l'exponentielle, et la figure suivante peut résumer sa pensée.

Figure 3

Grégoire de Saint-Vincent prend trois points quelconques sur l'une des asymptotes de l'hyperbole, d'un même côté de l'origine bien sûr. Comme réciproque du résultat précédent, si les aires α et β sont égales, le rapport $\frac{x_3}{x_2}$ est égal au rapport $\frac{x_2}{x_1}$. Si les aires α et β ne sont pas égales, leur rapport « mesure » la dépendance entre les rapports $\frac{x_3}{x_2}$ et $\frac{x_2}{x_1}$. Ce que nous noterions :

$$\frac{x_3}{x_2} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Notre vérification d'aujourd'hui par le logarithme népérien est facile :

$$\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}; \beta = \int_{x_2}^{x_3} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\ln x_3 - \ln x_2}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{\ln \frac{x_3}{x_2}}{\ln \frac{x_2}{x_1}}$$

Comme annoncé, l'exponentielle de Grégoire de Saint-Vincent est définie par un rapport et ce n'est pas l'exponentielle eulérienne. Si l'on note $G(\frac{\beta}{\alpha}) = \frac{x_3}{x_2} = (\frac{x_2}{x_1})^{\frac{\beta}{\alpha}}$, tenant compte de la composition des raisons, $\frac{x_3}{x_2}\frac{x_2}{x_1} = (\frac{x_3}{x_1})$ et de l'addition des aires, on vérifie au final la relation fonctionnelle de l'exponentielle :

$$G(\gamma + \delta) = G(\gamma)G(\delta).$$

Cette relation est déduite de la définition de l'exponentielle selon le *modèle* que je vais dire hyperbolique, et non donnée *a priori*.

Conclusion

C'est parce que je ressens que l'homme ordinaire aujourd'hui, et l'épistémologue de tous les temps, dénigrent *a priori* tout « naturel » à une quelconque question de mathématiques, que je m'interroge sérieusement sur ce qu'apporte la *modélisation* à l'enseignant de mathématique. L'homme ordinaire et l'épistémologue s'arrangent en outre pour que ces questions soient auto-référentielles comme le *Trésor de la langue française* nous l'a bien fait sentir, donc affaire des seuls mathématiciens, Vaut-il mieux que l'enseignant en appelle à un autre « naturel », physique ou d'une mathématique déjà effectuée, plutôt que de dire qu'il prouve une propriété ou la construit selon une démarche proprement mathématique ? Telle est bien la question du *modèle*. J'ai essayé de la poser en donnant l'exemple qui n'est pas si simple de la demi-vie et la caractérisation des *exponentielles de type k*, pour bien faire saisir tout ce que l'on peut tirer en restant fidèle au *modèle* radioactif. J'ai aussi évoqué les idées d'Euler et de Grégoire de Saint-Vincent. La question de la *modélisation*, ou la mise à crédit de connaissances mathématiques, requiert en effet une pratique déjà connue pour pouvoir faire enseignement. Pour les exponentielles, comme pour tant d'autres notions mathématiques, il n'y a pas de voie unique ou meilleure qui ne soit fonction des connaissances déjà scolairement acquises et maîtrisées par les élèves.

La question est déjà compliquée, et c'est bien le rôle de l'histoire de la dire telle, quand il s'agit par exemple de comprendre que le « naturel », mais je dois dire maintenant que le *modèle* des mathématiciens anciens, celui véhiculé par la pratique des proportions, s'est heurté à un nouveau *modèle* porté par les nombres réels. On est encore étonné que les nombres décimaux, qui firent une pénétration si forte dans la conscience mathématique après la découverte des logarithmes au début du XVIIe siècle, apparaissent si peu dans les pratiques enseignantes jusqu'au moins vers 1795. C'est qu'il fallut passer de la *modélisation* ou type de calculs sur les proportions, celle qui suffit à définir l'exponentielle pour un Grégoire de Saint-Vincent comme nous l'avons vu, à la *modélisation* des nombres réels, celle de l'analyse et des notions de limites que nous avons vues chez Euler, puis Cauchy. L'idée, mathématique s'il en fut, était de passer du discret de la correspondance entre deux progressions, arithmétique et géométrique, au continu des nombres réels. Mais ce passage, autrefois, était suggéré par le calcul des intérêts composés, lorsqu'il s'agissait de ne plus mesurer seulement en années, mais en mois, voire en jours. Il me semble que cet exemple financier vaut encore aujourd'hui, car une large population est familiarisée avec ces questions d'intérêts et les élèves le savent bien, et il y a liaison avec les pourcentages, etc. La difficulté mathématique est que l'on en reste à l'exponentielle sur les rationnels. L'utilisation de l'équation différentielle d'évolution exponentielle assume ce passage du discret au continu, au moyen de calculs visualisés sur un tableur en s'aidant de graphiques. Mais il reste à mettre au point une didactique permettant de poursuivre les limites avec ces seuls procédés de calcul. L'utilisation du *modèle* radioactif et de leurs diverses *modélisations*, et je n'ai malheureusement pas parlé des modélisations statistiques ou probabilistes à la façon de Jacques Treiner et Claudine Robert, requiert aussi un tel passage, mais il a l'avantage de donner une loi de la nature comme fondement à l'exponentielle, et de contraindre dès l'apprentissage à une critique des simplifications sur les constantes. C'est alors selon moi le grand avantage de la *modélisation*, que les mathématiques enseignées éliminent trop facilement.

Jean Becquerel est le seul à parler d'un pourcentage constant de perte pour la loi de radioactivité. Il fait donc appel apparemment à une sorte de savoir commun. J'ai refusé d'appeler cela un modèle. Mais aujourd'hui il faudrait mieux comprendre la structuration de ce savoir commun appris hors école, mais où la notion de hasard figure. Bien sûr ce savoir est insuffisant et pire, comprend des fautes. Mais il existe.

Bibliographie critique

Débat sur l'a présentation de l'exponentielle

Sources historiques sur le logarithme et l'exponentielle

Références sur modèle et modélisation

Références mathématiques plus avancées