Poser la modélisation comme question épistémologique pour l'introduction des propriétés des exponentielles dans les classes

Jean Dhombres

Deuxième partie

Un défaut de ces explications

Je n'ai pour autant pas affirmé que telle était la bonne façon d'introduire l'exponentielle dans le secondaire, puisque précisément la *modélisation* de la demi-vie présuppose l'exponentielle. La suppose aussi bien l'expérience, toujours avec la radioactivité qui, par comptage dans le temps, produit l'équation différentielle (1) que je note en détaillant les termes, et qui était antérieurement envisagée comme un *modèle* à partir de la chimie.

(10) $$\frac{dy}{dx}(x)+ky(x)=0 ,$$

Cet autre *modèle* intervient effectivement dans une théorie de la radioactivité proposée, en 1902 également, par Ernest Rutherford et Frederic Soddy. Ce sera exposé par Soddy dans un livre, *The Interpretation of Radium*, et ce titre même nous rappelle que Curie ne faisait aucune interprétation, en particulier sur l'atome, se contenant de mesures expérimentales, à l'exception toutefois de la loi de décroissance exponentielle. Pour ce qui nous concerne, il est intéressant de noter que Soddy ne va utiliser aucun appareillage mathématique, et même, dit-il, désire « éviter tout raisonnement mathématique ». Ainsi il attribue aux seuls mathématiciens la possession de l'exponentielle (et il en réfère même à un collègue mathématicien qui lui a suggéré la vie moyenne), pour se contenter d'énoncer les conséquences.

> Dans tous les cas simples de désintégration atomique, la vitesse de transformation est proportionnelle à la masse de la substance qui se transforme. La notation usuelle désigne par la lettre λ la *fraction* de la masse totale actuelle qui se transforme par seconde ; et on appelle ce symbole λ du nom spécial de « constante radioactive ».[…] Le point important est que, dans chaque cas, c'est une constante réelle de la nature, indépendante de l'histoire passée, comme de l'avenir de la substance en question, de la quantité actuelle, grande ou petite, de celle-ci, ainsi que de toute autre considération, quelle qu'elle soit. […] Faisant le pas suivant en sautant par-dessus les mathématiques, on trouve que la durée moyenne de vie de l'atome d'une substance radioactive, c'est-à-dire la période de temps, exprimée en secondes, durant laquelle il existe, en moyenne, avant que son tour arrive de se désintégrer, est simplement la réciproque de la constante radioactive, soit I/λ.

Ce très beau texte se poursuit par une explication de ce qui pourrait paraître un paradoxe : la vie moyenne (l'inverse de la constante θ de Curie) ne dépend pas du temps, et ne diminue pas avec le temps. A nos yeux du moins, ce texte pèche par omission : il n'est pas expliqué que cette constance de la vie moyenne (qui revient à au temps de demi-vie à un facteur multiplicatif près en *ln 2*, et peut donc avoir une signification expérimentale, 481 250 secondes dit Soddy, ce qui correspond aux 497 000 secondes calculables pour Curie) est une conséquence inéluctable de la loi de décroissance exponentielle. Pour le dire autrement, le *modèle* est celui de la proportionnalité de la vitesse de transformation à la masse en transformation, mais envisagée de façon discrète (toutes les secondes). La *modélisation* en fait une relation continue : si $n(t)$ est le nombre d'atomes de substance radioactive au temps t, on a :

$$dn(t)/dt = -\lambda\, n(t).$$

A vrai dire, Soddy a en tête un autre *modèle* en tête. Il est probabiliste, et il l'exprime d'abord en parlant d'un « hasard » de la désintégration. Mais il l'explique et nous pourrions avancer que sa *modélisation* devient celle d'un calcul des probabilités. C'est un autre *modèle* possible pour l'exponentielle, et j'aurais tendance à en proposer l'essai dans le cadre des programmes actuels. Il faut dans le texte ci-dessous, admirer la formulation scientifique dans un langage ordinaire, mais aussi penser ce qu'elle cache.

> Si, parmi tous les humains qui sont au monde, l'ange de la mort choisissait ceux qui doivent mourir chaque minute en proportion fixe et indépendante de leur âge, qu'ils soient jeunes ou vieux ; s'il ne regardait qu'au nombre des victimes, frappant absolument au hasard, une ici et une là, ce manière à constituer le nombre requis, notre probabilité de vie deviendrait dans ces conditions, la même que celle des atomes radioactifs.

Jean Becquerel, qui est avec les Curie le découvreur de la radioactivité en 1896, décrit plus tard directement avec l'exponentielle, en 1924, dans son livre : *La radioactivité et les transformation des éléments*. Il pose $n(t)$, nombre d'atomes transformés à l'instant t, comme égal à $n_0e^{-\lambda t}$ Le nombre $N(t)$ d'atomes non transformés à l'instant t, est alors l'intégrale de $n(t)$ entre t et l'infini, le *modèle* de la désintégration concernant tous les atomes de la substance radioactive. On calcule :

$$N_0(t)=\int_0^\infty n(t)dt=n_0\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=n_0\lambda;N(t)=\int_t^\infty n(u)du=\lambda n(t)$$

De sorte que

$$\frac{dN(t)}{dt}+\lambda N(t)=0\,.$$

Cette conséquence n'est pas un *modèle* puisqu'elle se déduit mathématiquement. Il est trop évident de dire que Becquerel présuppose connue la fonction exponentielle, qui reste le *modèle*, avec juste des propriétés intégrales en place de propriétés de dérivation. La présentation du *modèle* de Soddy paraît plus riche. Mais elle fait intervenir le « hasard », en un sens commun et non le hasard tel qu'il résulte des probabilités et des statistiques. C'est sans doute là qu'il y a le plus à travailler.

Dans les deux autres cas, *modèle* du temps de demi-vie ou *modèle* de la proportionnalité d'une décroissance à une quantité en cause, que faut-il faire alors pour qu'en lieu de *modélisation* déjà vue et la présupposant, on puisse revendiquer une construction mathématique de l'exponentielle ? Il y a plusieurs solutions

Le modèle eulérien

Dans le cas de la radioactivité aboutissant à (10), à partir d'un comptage, on pourra utiliser une construction de la solution par étapes, dite méthode d'Euler. Si elle fait référence au nom du mathématicien déjà utilisé pour désigner l'*exponentielle eulérienne*, la méthode tient à une résolution algorithmique générale des équations différentielles, particularisée considérablement pour le cas de l'équation (10). L'idée est simple de construire la fonction solution de (10) avec $y(0)= 1$ par approximation entre 0 et x. On se fixe un entier n et on divise ce segment en abscisse en une grille de points $0, x/n, 2x/n, \ldots$, jusqu'à x. et on construit des fonctions affines par morceaux en partant de l'origine avec une pente égale à k ($y'(0)= ky(0)= k$, selon l'équation (10)) jusqu'au point de coordonnées (x/n, 1+kx/n), puis on prend une nouvelle pente $1+kx/n$ pour un nouveau segment de droite, conduisant au point de coordonnées $(2x/n, (1+kx/n)^2)$, comme on le justifie par le calcul :

$$k(1+k\frac{x}{n})\frac{x}{n}+1+k\frac{x}{n}=(1+k\frac{x}{n})^2 .$$

On aboutit en abscisse x à la valeur $(1+k\frac{x}{n})^n$. Cette méthode d'Euler, qui passe du discret au continu de l'exponentielle en faisant tendre l'entier n, nombre de points de la grille choisie, vers l'infini, peut s'appeler un *modèle*. Les didacticiens peuvent avantageusement nous dire, après expérience, ou peut-être seulement par analogies et déductions, quels en sont les requis, temporels et culturels, pour le rendre utilisable en classe. Mais il est erroné de prétendre qu'il s'agisse d'une *modélisation* de l'exponentielle, à moins que la méthode d'Euler n'ait préalablement été comprise dans sa généralité. Mais en ce cas la construction expliquée de l'exponentielle, pour juste et naturelle qu'elle soit, paraît malvenue, utilisant un si puissant outil pour quelque chose qui paraît devoir être élémentaire. On ne s'étonnera pas que le « naturel » en mathématiques soit lié à un souci d'économie de pensée. Ma conclusion selon laquelle il ne s'agit pas d'une *modélisation*, n'empêche aucunement de considérer la méthode d'Euler d'approximation de la solution de l'équation différentielle linéaire (1) comme construction de l'exponentielle. Mais je le répète, ma question est de juger l'avantage qu'il y a à affirmer une *modélisation* alors qu'on a une voie constructive.

Dans cette voie constructive, il est intéressant de retrouver une limite (celle de $(1+\frac{x}{n})^n$) qui fit les beaux jours de l'enseignement mathématique français il y a une cinquantaine d'années, où l'on supprimait allégrement la constante *k*. Plusieurs calculs peuvent trouver pour la fonction limite aussi bien l'équation fonctionnelle (3) de l'exponentielle, que la solution de l'équation différentielle. Il me semblerait utile de ne pas faire abstraction des raisons pour lesquelles cette construction a perdu de son intérêt dans les années soixante du siècle dernier, et mieux utiliser la méthode d'approximation d'Euler sur une calculette, jusque pour obtenir les propriétés de l'exponentielle, au lieu de jouer sur le calcul des limites portant sur des fonctions, une modélisation à n'en pas douter plus élaborée que l'exponentielle que l'on veut définir. Je laisse aussi de côté le choix de $k=1$.

En tout cas, pour mieux insister sur la *modélisation* comme mise à crédit de quelque chose de mathématiquement déjà connu, je peux reprendre l'exemple de la demi-vie. Et tant pis si je conclus que la construction de l'exponentielle par le temps de demi-vie que je vais exposer est mal adaptée à l'enseignement secondaire. C'est seulement que la procédure que je vais décrire requiert trop d'habitudes intellectuelles sur la notion de fonction, alors que l'exponentielle est perçue dans l'enseignement comme fonction élémentaire, sinon comme *modèle* même pour la notion de fonction.

L'exponentielle de la demi-vie

La question mathématique de la demi-vie devient celle-ci : déterminer la fonction exponentielle de type *k*, notée *f*, comme étant celle pour laquelle il existe a satisfaisant pour tout x :

$$f(x+a)=\frac{f(x)}{2}. \qquad (11)$$

L'hypothèse ici est l'existence d'une même demi-vie pour toute valeur de *x*. Cette équation (11) donne donc le *modèle* de demi-vie, et pour mieux rappeler l'idée d'un départ, on peut prendre les *x* parcourant les nombres positifs ou nuls Il est nécessaire d'être encore plus précis, puisque l'on sait (pas les élèves, mais les professeurs) que l'exponentielle, $y(x)=Ye^{-kx}$,

$k > 0$, $Y>0$, ou *exponentielle de type k*, satisfait (11) pour tout x, avec $a= x_{DV} = ln2/k$. On peut alors poser le problème.

Problème 1 : L'exponentielle de type *k* est-elle la seule fonction $f[0,\infty[\rightarrow R$, pour laquelle existe une constante a >0, telle que pour tout $x \geq 0$ on ait la relation (11)

La réponse à ce problème est négative. La construction d'un contre-exemple est aisée, et le nom même de période plus tôt indiqué pour le demi-temps de vie suggère le résultat. On se donne une constante $a > 0$, et une fonction quelconque, $\phi:[0,a]\rightarrow R$, sauf que l'on impose $\phi(a)=\frac{\phi(0)}{2}$. On pose alors

(12) $$f(x)=\frac{\phi(x-na)}{2^n} \text{ dès lors que } x\in[na,(n+1)a].$$

On vérifie la cohérence aux points de la grille des entiers multiples de a, et on vérifie aisément que f fournie par (12) vérifie (11) pour tout $x\in[0,\infty[$. On n'est en outre pas loin avec (12) de la solution générale de l'équation fonctionnelle (11), car on voit qu'il suffit de se donner la fonction réelle ϕ arbitrairement sur [0, a[. Je ne fais pas cette remarque pour la seule généralité, mais bien pour établir qu'il ne sera pas répondu positivement au problème 1 en ajoutant une propriété de régularité *a priori* pour f, comme la continuité ou la dérivabilité. Je rappelle que l'appellation de période fait référence aux fonctions périodiques, et cette appellation tient aux seuls mathématiciens.

On ne doit pas pour autant se décourager dans le projet de présentation de l'exponentielle, Mais mieux le poser. En effet, la propriété de l'exponentielle qui exploite vraiment le temps de demi-vie est la relation (3), comme nous avons pu le voir avec la démonstration de (8). Peut-on alors mettre l'équation fonctionnelle (11) sous la forme la plus proche possible de la relation (3) ? La réponse est positive. Il suffit de se débarrasser du nombre 2 en faisant plutôt intervenir la valeur de f à l'origine. En effet, on déduit de (11) en faisant $x= 0$:

$$f(a)=\frac{f(0)}{2}.$$

Donc (11) s'écrit sous la forme

(13) $$f(0)f(x+a)=f(x)f(a),$$

Le calcul est en effet facile si $f(0)\neq 0$, et si $f(0)= 0$, on a nécessairement $f(a)= 0$, et donc *a fortiori* toujours la relation (13). On aimerait cependant passer à l'équation

(14) $f(x+a) = f(x)f(a)$.

Il faut alors une discussion sur l'hypothèse $f(0)\neq 0$, voire $f(0)=1$, et c'est typiquement une discussion de *modélisation*, c'est-à-dire de prise en compte des conditions de résolubilité mathématique du *modèle*, ici celui de demi-vie.

Auparavant un vocabulaire peut être utile. L'équation fonctionnelle $f(x+t)= f(x)f(t))$ est communément appelée *équation fonctionnelle de l'exponentielle*, et l'équation $f(x+a)= f(x)fa)$ est appelée *équation conditionnelle de l'exponentielle*. Elle n'a lieu que pour des cas particuliers de l'une des variables.

Effets de la *modélisation*

Remarquons que si $f(0)= 0$ pour une solution de (11), il n'y a guère de chance d'avoir une analogie avec l'équation fonctionnelle (3) de l'exponentielle. Du moins si l'on décide de passer à une fonction définie sur l'axe réel entier. On peut ne rien comprendre à ce passage en le disant simple commodité mathématique. Or ce passage fait partie de ce que j'entends par la *modélisation*, un jeu sur ce qui est raisonnablement résoluble. On demande même d'abandonner l'idée de « période » pour passer à une exponentielle réelle par son équation fonctionnelle. De fait, toute solution $f:R\rightarrow R$ de (3), satisfaisant $f(z) = 0$ pour une certaine valeur réelle z, est identiquement nulle. On a en effet $f(x+z)= 0$ pour tout x, et toute valeur réelle y peut s'écrire sous la forme $x+z$, donc $f(y)= 0$. Par contre nous avons vu qu'une solution $f:R\rightarrow R$ de (11), nulle en 0, satisfait seulement $f(a)= 0$ (car $f(a)=\frac{f(0)}{2}=0$).

Prenons alors une solution $f:R\rightarrow R$ satisfaisant (13) pour tout x réel où a est une valeur réelle fixée. Si $f(0)= 0$, $f(x)f(a)= 0$, et si la fonction f n'est pas identiquement nulle, on déduit $f(a)= 0$, valeur aussi bien atteinte si f est identiquement nulle. L'équation (13) ne dit alors plus rien. Mais si $f(0)\neq 0$, en posant $g(x)= f(x)/f(0)$, on dispose de $g(0)= 1$ et $g(x+a)= g(x)g(a)$. C'est l'équation (14), ou équation conditionnelle exponentielle, avec g en place de f. Cette équation est bien celle qu'il nous faut considérer et non pas l'équation (13). Ces calculs permettent de ne pas imposer la standardisation $f(0)= 1$ pour l'équation conditionnelle exponentielle (14), mais de se contenter de $f(0)\neq 0$, condition que le *modèle* radioactif favorise. En effet, si $f:R\rightarrow R$ la satisfait, avec $f(0)\neq 0$, on a $f(a)= f(0)f(a)$. Si $f(a) = 0$, à son tour grâce à (14) on $f(x+a)= 0$, donc f est identiquement nulle ce qui est impossible puisque $f(0)\neq 0$ par hypothèse. Donc on a $f(a)\neq 0$ et dès lors $f(0)= 1$. Tel est l'effet du choix de R comme domaine de définition de f, choix qui est celui à proprement parler de la *modélisation*. On serait certes embarrassé si l'on avait adopté comme domaine le semi-groupe additif $[0,\infty[$, et la *modélisation* doit effectivement expliquer ces choix. En ce sens, la *modélisation* fait intervenir un caractère expérimental au sein même de la démarche mathématique. Je tiens à le souligner comme un grand avantage, l'avantage de disposer d'une attitude critique,.

Cette remarque est pourtant pleinement une remarque de mathématicien, et elle me permet à nouveau quelques considérations générales sur les *modèles* et les *modélisations*. De même en effet, à partir du *modèle* de temps de demi-vie, il était important de voir que pour l'exponentielle $y(x)=Ye^{-kx}$, il y avait indépendance de la valeur initiale Y pour le x_{DV} calculé. La mise en mathématiques d'un *modèle* donné, ou ce que j'appelle la *modélisation* n'est pas univoque. Importent donc des propriétés qu'une première analyse du *modèle* peut négliger. En l'occurrence de la présentation de l'exponentielle par l'équation (11), on comprend que l'hypothèse $f(0)\neq 0$, la fonction étant posée cette fois ci avec comme domaine R, et non seulement l'ensemble des nombres positifs, provient d'une nouvelle réflexion sur le *modèle*. Elle tient compte de la perception de la propriété d'indépendance de l'origine sur le temps de demi-vie. Ce n'est pas une simplification indifférente de mathématicien, mais une part de la *modélisation*. On voit par comparaison qu'il n'en n'est pas de même pour le choix de $k= 1$ dans le cas du passage de l'équation (2) à l'équation (3) qui fut un des points de départ de cette étude.

Le formaliste dira qu'au final je mélange les idées de *modèle* et de *modélisation*, que j'ai pourtant tant séparées au départ. Je défends mon analyse, car elle situe épistémologiquement les deux versants d'un même processus scientifique.

A ce titre, on doit aussi se poser la question de la constante a de demi-vie, qui dans l'équation (14) pourrait apparaître comme une constante réelle quelconque, différente de 0 toutefois. Le *modèle* radioactif impose $a>0$, et la pseudo-généralisation d'une constante a quelconque n'est venue que de notre choix de *modélisation* avec un domaine plus étendu, R tout entier, pour la fonction f. Inopinément, on a perdu quelque chose du *modèle*. Il faut la rétablir si l'on veut expliquer les fonctions exponentielles de la radioactivité. Je ne crois pas didactiquement honnête, dans une telle présentation, de vouloir comprendre l'exponentielle, et non les seules *exponentielles de type k*. Que l'on apprécie ou pas, la règle de présentation dans les mathématiques actuelles est d'avoir une fonction avec son domaine de définition et donc l'exponentielle de *type k* est obligatoirement définie sur la demi-droite positive (fermée en l'origine).

Le problème (1) peut être énoncé en termes d'équations fonctionnelles seulement, ce qui prépare l'indispensable cohérence de la *modélisation*, plus qu'une logique calculatoire du *modus operandi*, et un style en fait. La question devient en effet celle du passage de *a,* fixé strictement positif dans l'équation (14), à l'équation (3) où la variable t est quelconque (de $f(x+a)= f(x)f(a)$ *à* $f(x+t)= f(x)f(t)$). Pour ceux qui ont saisi le sens du mot « période », et connaissent les propriétés des fonctions périodiques sur l'axe réel, ce qui suit est travail par analogie. Je le donne quand même, car il me semble que l'analyse de la périodicité ne fait pas vraiment partie de l'enseignement secondaire, et de toute façon il faut se débarrasser de la période pour passer à l'équation fonctionnelle de l'exponentielle qui fait le style de cette *modélisation*.

Problème 2 : Que faut-il ajouter à l'équation fonctionnelle $f(x+a)= f(x)f(a)$ valable pour un a strictement positif, et tout x réel, pour que toute solution réelle f soit aussi solution de l'équation fonctionnelle $f(x+t)= f(x)f(t)$ pour tous x et t réels ?

J'ai déjà dit que l'équation fonctionnelle de l'exponentielle a été résolue par Cauchy pour le cas des fonctions continues réelles. Ses principes servent encore pour l'équation conditionnelle, mais on doit se contenter d'un sous-groupe et non d'un sous-corps.

Lemme : Pour une solution continue non identiquement nulle $f:R\to R$ de $f(x+a)= f(x)f(a)$, a étant fixé, le sous-ensemble des y de R tels que pour tout x réel, $f(x+y)= f(x)f(y)$ est un sous groupe additif fermé.

On note $F:=\left[y;y\in R,f(x+y)=f(x)f(y),\forall x\in R\right]$. Puisque f satisfait (14), l'ensemble F n'est pas vide, contenant au moins a. Grâce à l'hypothèse de continuité de f, cet ensemble est fermé. En outre, si $y\in F$, puisque f n'est pas identiquement nulle, on a $f(y)\neq 0$ et $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$. que l'on déduit de $f(x-y+y)= f(x-y)f(y)$. D'où pour $y_1,y_2\in F, y_1-y_2\in F$, car

$$f(x+y_1-y_2)=f(x-y_2)f(y_1)=\frac{f(x)}{f(y_2)}f(y_1)=f(x)f(y_1-y_2)\ .$$

Ce lemme de structure pour l'équation conditionnelle (14) ajoute un cas discret au cas traité par Cauchy. Car un sous-groupe additif fermé de R est soit R lui-même, soit le groupe θZ où θ est un nombre réel non nul. En effet, si F= R, le problème 2 est résolu. Pour aller sans difficulté de l'équation (14) à l'équation (3),donc résoudre le problème 2, il faut éliminer le cas du groupe θZ.

On pense alors à une autre équation (14) avec un autre a qui viendrait bloquer l'apparition du groupe θZ. Cela paraît d'abord difficile, car on ne peut pas imaginer deux temps de demi-vie. La ressource de cette *modélisation* est bien de revenir sur le *modèle*.

Celui-ci avait été obtenu par la suppression paradoxale du nombre 2. Elle était paradoxale puisque c'était du temps de demi-vie dont on était parti de façon réaliste. Or, effectivement, ce passage ne dépend pas de l'idée d'un demi. En effet, si l'on définit un temps de α-vie, noté $x_{\alpha V}$, α étant un réel strictement compris entre 0 et 1, on dispose de la fonctionnelle, exactement analogue à l'équation de demi-vie

(15) $$f(x+x_{\alpha V})=\alpha f(x).$$

On la dira équation fonctionnelle de α-vie, mais remarquons comme précédemment et par fidélité au modèle que nous imposons $x_{\alpha V}>0$. De même pour cette équation, en faisant $x=0$, on dispose de l'expression de α.

$$f(x_{\alpha V})=\alpha f(0).$$

Donc on fait aussi bien disparaître α de l'équation fonctionnelle (15) pour qu'apparaisse, avec $x_{\alpha V}$.

$$f(0)f(x+x_{\alpha V})=f(x)f(x_{\alpha V}).$$

En prenant $a=x_{\alpha V}$, on peut réduire comme précédemment à l'équation (14), moyennant l'hypothèse de modélisation $f(0)\neq 0$. L'avantage est d'avoir maintenant un paramètre a variable, puisque dépendant du choix de α dans la mesure où $x_{\alpha V} \neq x_{\beta V}$ dès lors que $\alpha\neq\beta$. En effet, si $x_{\alpha V} = x_{\beta V}$, on dispose pour tout x de $\alpha f(x)= \beta f(x)$, et comme $f(0) \neq 0$, les deux coefficients α et β doivent être égaux. On peut effectivement donner la valeur de $x_{\alpha V}$ pour une exponentielle de type k :

$$x_{\alpha V} = -\frac{\ln\alpha}{k}$$

Théorème : *La fonction exponentielle de type k* est la seule fonction continue non nulle à l'origine, ayant des temps de α-vie pour tous les nombres α strictement compris entre 0 et 1.

Théorème. La fonction *exponentielle de type k* est la seule fonction continue non identiquement nulle, ou seulement non nulle à l'origine, ayant des temps de α−vie et β-vie, α et β entre O et 1 n'étant pas des nombres commensurables en puissances.

Théorème. La fonction *exponentielle de type k* **est la seule fonction continue non nulle à l'origine ayant un temps de demi-vie et un temps de α-vie, α étant un nombre transcendant entre 0 et 1.**

Si F= R, l'équation fonctionnelle conditionnelle (14) se réduit à l'équation fonctionnelle de l'exponentielle, et la méthode de Cauchy fournit une exponentielle à un facteur multiplicatif près non nul. Mais la constante *a* du temps de demi-vie est strictement positive. Donc la fonction f se réduit à une *exponentielle de type k*. Pour valider les énoncés des trois théorèmes il suffit d'empêcher la situation où le sous-ensemble *F* se réduise à un sous-groupe discret θZ. On peut aussi bien supposer que la fonction ne s'annule pas à l'origine, ou q'elle n'est pas identiquement nulle, comme on l'a indiqué dans le second énoncé seulement, mais ce serait valable pour les deux autres aussi bien. Supposons donc que ce soit cette situation d'un sous-groupe discret qui ait lieu. Soient alors deux constantes $a= x_{\alpha V}$ comme temps de α-vie et $b= x_{\beta V}$ comme temps de β-vie, pour α et β supposés distincts et naturellement entre 0 et 1. Par l'hypothèse que l'on veut éliminer, on a un entier *n* et $a= n\theta$, puis un entier *m* et $b= m\theta$. En $z= m\theta= n\theta$, on calcule de deux façons la valeur de $f(z)$ selon $f(z) = \alpha^m f(0) = \beta^n f(0)$. Du coup, puisque $f(0)\neq 1$, on a

$$\alpha^m=\beta^n$$

Une telle relation est impossible par définition lorsque l'on est dans les conditions du deuxième théorème, ou lorsque α et β sont quelconques comme dans les conditions du premier théorème, ou encore dans les conditions du troisième théorème.

On pourra remarquer que la limitation aux *exponentielles de type k*, et non aux fonctions exponentielles à un facteur multiplicatif près, tient au modèle de la radioactivité, et s'est seulement traduit par la positivité d'une constante. Le mathématicien peut quelquefois négliger de telles considérations : il ne le peut pas s'il prétend faire de la *modélisation*. Voilà une contrainte nouvelle, imposée par le choix épistémologique de la modélisation : elle est bienvenue. Mais si l'enseignant de mathématiques veut s'en affranchir, il sera tenu de se justifier : le modèle est en effet contraignant et la *modélisation*, nous l'avons dit, doit en gros être prévue. Une autre attitude mathématique consiste à tout construire et tout découvrir : c'était celle des mathématiques modernes, et l'on peut considérer que le choix de la *modélisation* est une réaction. Elle a son avantage, il faut saisir aussi le prix à payer.

Le modèle de demi-vie même généralisé comme on vient de le faire est donc un excellent exercice. J'aurais pu choisir une autre propriété physique de la radioactivité à partir de la désintégration de noyaux dans le temps, la supposant ne dépendre que de la durée : la proportion de noyaux désintégrés du temps *t* au temps *t+h* ne dépendant pas de *t*, ou encore

$$\frac{f(t+h)}{f(t)} = \frac{f(t'+h)}{f(t')}.$$

Mais cette équation fonctionnelle, toujours sous l'hypothèse déjà expliquée d'une valeur f(0) non nulle, contient trop de variables et peut se simplifier. On voit ainsi que la fonction $g(t)= f(t)/f(0)$ satisfait la même équation fonctionnelle avec $g(0)= 1$, et en faisant $t'=0$, on obtient pour g l'équation fonctionnelle de l'exponentielle, valable pour toutes les valeurs *t* et *h*.

$$g(t+h)= g(t)g(h).$$

J'ai choisi une démarche voisine (déduction fonctionnelle) de celle pour le temps de demi-vie, mais elle est simple en l'occurrence, et j'ai déjà dit qu'elle faisait un style. Il faut ici seulement faire attention au *modèle* qui semble imposer des valeurs positives ou nulles pour *t* et *h*, compliquant un peu la *modélisation* à la Cauchy.

Compte tenu de mon introduction historique, je dois poursuivre sur l'exponentielle par des exemples historiques. Bien sûr, je vais avoir d'autres *modèles*, en fait tous d'origine mathématique. Mais la fidélité à l'histoire complique les choses, et l'exposé perd en simplicité.