Poser la modélisation comme question épistémologique pour l'introduction des propriétés des exponentielles dans les classes

Jean Dhombres

Première partie

J'interviens avec un titre bien pédant sur la présentation de l'exponentielle, alors que je n'ai aucune expérience d'enseignant dans les classes du secondaire. Mais le débat qui court fait référence à l'une des plus vieilles discussions concernant les mathématiques et leur exercice pédagogique (voir bibliographie organisée en fin de texte afin d'éviter les notes en bas de page), et l'histoire de cette discussion m'a toujours intéressé. Il s'agit au fond de juger ce qui est « naturel » dans la science issue d'Euclide, et l'on sait que les commentateurs au fil des âges ne se privèrent pas de dire ce qu'il était le plus « naturel » de faire pour rendre Euclide parfait, preuve que le « naturel » élémentaire change. Il semblerait ainsi que le « naturel », jugé hier comme aujourd'hui nécessaire pour l'apprentissage des mathématiques, soit de nos jours porté par ce que l'on désigne comme la phase de modélisation. Un modèle fournirait la motivation « naturelle » pour apprendre, et il y a même un jeu sémantique sur les « sciences de la nature » qui pourvoiraient *ipso facto* du « naturel » à l'abstrait mathématique. Cet abstrait qu'il serait ridicule de prétendre abolir. Il importe dans les conditions nouvelles du débat si ancien de convenir de ce que l'on appelle modélisation et modèle, et je vais y venir comme l'annonce le titre choisi pour cet exposé ainsi mieux justifié. Le mieux est de débuter par un peu d'histoire sur l'exponentielle. Le « naturel » ne fut pas présent d'emblée, et c'est même le caractère artificiel de la chose qui prédomina à l'origine, ou l'artifice de l'objet « exponentiel » si l'on veut parler selon un vocabulaire ancien.

Une histoire succincte de l'exponentielle

Pour les fonctions exponentielles, force est en effet de constater qu'une seule pourrait être dite « naturelle » selon la terminologie : c'est la fonction inverse de la fonction qui fut très longtemps qualifiée de « logarithme naturel ». Cette dernière fonction est notée *ln x*, mais le « n » bouscule aussitôt le « naturel ». Car il fait référence aussi au *logarithme népérien*. Or si John Neper (1550-1617) est l'Ecossais qui, au début du XVIIe siècle, en donna une table à partir de 1614, il ne chercha aucunement à faire ressortir ce qu'il y avait de « naturel » dans son logarithme. Il le nommait ainsi parce qu'il y avait un nouveau lien établi entre un rapport de nombres ou raison (*logos*) et le nombre au sens de quantité (*arithmos*). C'était un « nombre de raisons », notion compréhensible à cette époque, et pour nous seulement envisageable comme un succédané de la fonction logarithme. Il y avait donc une invention. Neper ne faisait pourtant appel qu'à une progression géométrique particulièrement choisie pour fournir la précision de la table numérique, et elle ne couvrait bien sûr pas tous les nombres réels. Alors que cela nous paraît indispensable pour avoir une « vraie » fonction. Bientôt, aux dépens du « naturel », Neper écrivit de préférence « nombre artificiel » en place de logarithme. Il allait ainsi d'une approximation à ce qui était à approcher ; il préparait la notion de fonction logarithme. Kepler (1571-1630) parle aussi de « naturel » des logarithmes dans un livre publié en 1624, quelques années après sa découverte de la troisième loi des orbites planétaires, et cette fois il désigne la théorie qui fonde les logarithmes. Il l'écrit dans le titre même, fournissant une « démonstration légitime » (*praemissa Demonstratione legitima*). On peut donc conclure que le maintien exceptionnel en mathématiques du mot trop savant ou trop historique de « logarithme », tient « naturellement » au fait qu'il y ait par le logarithme transformation d'une moyenne géométrique en une moyenne arithmétique. Telle est la légitimation de Kepler ; telle est le « naturel » du logarithme, sa vraie « nature » qui est fournie par l'équation fonctionnelle qui gouverne l'algorithme de la fabrication de la table numérique :

$$f(\sqrt{xy})=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

L'équation fonctionnelle, ou la nature de la fonction par une relation pensée caractéristique, est venue avant la notion de fonction, donc avant la précision sur le domaine de définition qui nous paraît indispensable aujourd'hui. Si de telles équations fonctionnelles fournissent un statut qui s'avérera un temps possible pour le « naturel » du logarithme et qu'il faudra l'abandonner une fois la notion de fonction clarifiée, peut-on dire pour autant qu'il s'agisse d'une modélisation tirée de la nature ? Poursuivons encore l'histoire de l'exponentielle avant de répondre sur ce qui est l'objet même de la présente enquête.

Grégoire de Saint-Vincent, un peu avant 1650 et en la dictant à un élève, de Sarasa, a fourni un autre « naturel » mathématique du logarithme, qui est devenu le « naturel » classique de cette notion. Il a exprimé en effet le logarithme en tant qu'aire sous l'hyperbole et a démontré pour l'aire l'équation fonctionnelle écrite ci-dessus. Il établissait ainsi une correspondance entre *toute* progression géométrique et *toute* progression arithmétique. Il disposait en ce sens de toutes les fonctions logarithmes sur des domaines particuliers, et pas seulement de celle que nous identifions sous le nom de *logarithme népérien*. Longtemps d'ailleurs on préféra l'expression *logarithme hyperbolique* à l'appellation de logarithme népérien, et elle était équivalente au *logarithme naturel*. La formule usuelle pour le désigner n'apparaît pourtant pas « naturelle » aujourd'hui, en ce qu'elle fait intervenir des signes savants, comme l'intégrale définie :

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Il n'y a certainement aucun avantage à décrire l'intégrale comme une modélisation, et Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) n'avait aucun signe particulier pour ce qu'il expliquait comme une aire, à valeur fonctionnelle puisqu'il ne spécifiait pas la valeur de x, la laissant variable, et d'ailleurs ne commençait pas à la valeur unité pour x. Remarquons combien, en cette recherche d'origine, il n'est pas facile de démêler la notion de fonction de celle de logarithme. C'est la difficulté didactique de toute histoire. Ceci dit, Grégoire, qu'une longue fréquentation me fait appeler par son prénom comme dans les éloges jésuites à son propos, rattachait pour la première fois la construction numérique de Neper à la tradition mathématique grecque de la méthode d'exhaustion appliquée au cas de l'hyperbole dont il donnait ainsi la « quadrature » quoique sous une forme nouvelle puisqu'il ne trouvait pas à réduire effectivement à une figure carrée. Il reconnaissait l'irréductibilité de la fonction transcendante du logarithme à une fonction polynomiale. C'est ce geste de conservation dans une indéniable innovation qui fournit la pratique la plus usuelle du « naturel » en mathématiques, et donc aussi celle du « naturel » chez les enseignants. Cette conception peut heurter une pré-conception du « naturel » chez les élèves et certainement la conception du « naturel » que beaucoup mettent sans trop y réfléchir sous le mot de modélisation. Je pose donc la question de l'exponentielle moins pour elle-même, que pour examiner ce que l'on veut « gagner » en parlant de modélisation.

Le panorama historique sur l'exponentielle serait bien incomplet si je n'ajoutais que dans des manuscrits écrits dès sa jeunesse au temps où Kepler travaillait les logarithmes, manuscrits repris dans son ouvrage majeur mais tardif, l'*Opus Geometricum* de 1647, Grégoire de Saint-Vincent définissait la fonction exponentielle de base quelconque. Ce qui revient en quelque sorte à considérer les réels positifs comme une seule progression géométrique ! Il le faisait à partir de l'hyperbole, mais sans passer par les logarithmes. Il envisageait alors la propriété fonctionnelle de l'exponentielle sous la forme de l'équation fonctionnelle

$$f(x+t)=f(x)ft).$$

Cette équation n'était pas « naturelle » pour lui, mais l'aboutissement d'une réflexion que nous verrons plus loin. Il n'empêche que l'équation fonctionnelle puisse servir pour nous de « naturel » En tout cas, Grégoire de Saint-Vincent n'exhibait aucun privilège pour l'*exponentielle eulérienne*, ultérieurement jugée « naturelle ». Je désigne effectivement par *exponentielle eulérienne* ce que l'on note e^x depuis au moins des siècles dans les manuels, et que l'on notait souvent *exp x* avant le traitement de texte, privilégiant par une notation cette exponentielle entre toutes les autres. Avec son *Introductio in analysin infinitorum* de 1748, et le développement en séries entières de e^x et de $ln\ (1+x)$, Leonhard Euler (1707-1783) avait posé l'*exponentielle eulérienne* comme un fondamental des mathématiques. Je vais montrer que l'on ne peut pourtant pas y voir un modèle « naturel », mais peut-être une modélisation, à condition d'interpréter la construction d'Euler dans un contexte didactique précis. Le naturel, en mathématiques comme ailleurs, est aussi une question de pratique mathématique. Je vais m'expliquer bientôt. Je dois d'abord fixer mon vocabulaire descriptif.

Pour l'exponentielle de base quelconque, et pour les besoins de cette présentation, je préfère utiliser un pluriel, et parler des *exponentielles* avec ce que l'on note volontiers a^x, le paramètre a strictement positif désignant la base, et étant différent de l'unité, du moins si l'on veut éviter la fonction constante égale à l'unité. Par ailleurs, les calculateurs ont privilégié le cas décimal, avec $a= 10$, et beaucoup ont jugé ce cas le plus « naturel », faisant opposition ainsi à l'*exponentielle eulérienne*. Je ne crois pas que l'on ait vraiment utilisé l'expression d'*exponentielle décimale*, alors que l'on a le logarithme décimal, car on a préféré utiliser l'expression d'écriture décimale, la jugeant, en France du moins, la plus « naturelle » qui soit. L'*exponentielle eulérienne* est en effet l'exponentielle de base $a= e$, mais il faut alors préciser comment obtenir le nombre e, pourquoi il joue un rôle particulier au regard des exponentielles, et surtout en quoi il serait « naturel ». Mon point est que ce « naturel », et aussi bien dans le cas de l'exponentielle décimale, ne peut avoir qu'une signification mathématique, sans qu'il y ait intervention des sciences de la nature. En la définissant, Euler savait qu'il fondait ce que l'on peut appeler l'analyse des Lumières. Je repose la question de savoir ce que l'on gagne à ne pas en parler si l'on choisit une présentation par modélisation.

Un siècle plus tôt, Grégoire de Saint-Vincent, pas mieux d'ailleurs que ses contemporains, n'avait pas besoin de préciser telle ou telle fonction exponentielle. Car il suivait l'habitude d'alors faisant jouer les proportions : les fonctions, comme les variables, n'étaient définies qu'à un facteur multiplicatif près. Cette conception ancienne, qui nous fait rejeter l'appellation de fonction, peut vraiment faire partie de ce que l'on appelle un modèle pour la pensée mathématique, et je vais préciser pourquoi. Ce n'est pas plus une modélisation, comme je vais le dire. Pour le moment, il me faut signaler que les tables numériques des logarithmes, celles de Henry Briggs dès 1624 paraissent sous le titre intéressant de *Arithmetica logarithmique :* c'est un titre de théorie, et ces tables utilisaient le logarithme décimal et les nombres décimaux. On pouvait alors dire ces nombres absolus, et peut-être « naturels ». Mais cette fois ce nouveau « naturel » débarrassait les mathématiciens d'une bonne partie de la vieille habitude des proportions. C'est cette habitude des proportions qu'Euler fit passer pour artificielle, et l'on comprend pourquoi il cherchait un autre « naturel ». Il le trouva dans l'*exponentielle eulérienne*, et non dans le décimal auquel longtemps le reproche fut fait d'être artificiel, même en France où la République l'inscrivait pourtant dans la Constitution. Mais comme chacun devrait le savoir, la République n'a rien de naturel.

A vouloir être fidèle à une histoire compliquée, je crains d'avoir embrouillé les cartes. Aussi je crois bon de citer le *Trésor de la langue française*, car il y est indiqué en premier à l'entrée « logarithme » : « puissance à laquelle il faut élever une constante appelée base pour obtenir un nombre donné ». L'exponentielle la plus générale est donc présupposée. Comment le lycée peut-il faire connaître une notion que le dictionnaire semble accepter comme allant de soi, et somme toute « naturelle » chez tout lecteur ? Alors que ma longue histoire précédente établit les difficultés rencontrées. Apparaît en outre par ce dictionnaire révélateur de la culture générale de notre temps, et témoin d'une histoire intellectuelle, que l'*exponentielle eulérienne* est du ressort du seul mathématicien. N'y a-t-il pas des conséquences à en tirer si l'on adopte le point de vue pédagogique d'une modélisation pour l'introduire ?

Je n'ai pas encore défini ce dernier mot, mais passe d'abord à une équation différentielle. Car elle est l'exemple de modélisation dont on parle le plus aujourd'hui pour l'exponentielle, sans que l'on éprouve toujours le besoin de préciser en quoi la modélisation est ainsi concernée. Ce passage est d'autant plus intéressant qu'on aura remarqué mon omission dans le récit historique de l'utilisation même de la fonction exponentielle dans de nombreux domaines scientifiques ou pratiques, donc dans l'acculturation du logarithme. Ces utilisations maintenant anciennes, et maintenues, n'ont pu manquer de façonner aujourd'hui une connaissance de l'exponentielle que l'on peut dire générale, en tout cas qui n'a pas eu besoin de l'école, et des cours de mathématiques, pour avoir une certaine diffusion. J'ai tendance à dire nouvelle cette situation de mathématiques ne venant pas uniquement de l'école, et qui n'ont donc pas été construites dans la conscience des élèves selon les règles d'un savoir didactiquement organisé. Voilà peut-être la raison profonde du besoin légitime des enseignants comme des responsables de programmes, de changer les présentations mathématiques au lycée.

Equations différentielles et exponentielles

Parmi toutes les manières de définir les exponentielles, celle qui distingue le mieux l'*exponentielle eulérienne* consiste à exhiber une équation différentielle du premier ordre. On peut prendre pour définition de la famille des exponentielles toutes les solutions réelles y sur l'axe réel, et valant l'unité à l'origine, de l'équation

(1) $$y' = ky,$$

pour toutes les constante réelles k. Le cas $k= 0$ donne la fonction constante égale à l'unité, cas singulier que l'on peut selon l'usage mathématique accepter comme une exponentielle dégénérée, mais alors on rencontrera la réticence de tous les modélisateurs. Dans cette même voie, l'*exponentielle eulérienne* est obtenue, toujours sous la condition $y(0)= 1$, par la seule équation différentielle

(2) $$y' = y.$$

Pour un mathématicien d'aujourd'hui, mais en fait depuis Euler, prendre le coefficient k égal à 1, ce n'est pas seulement simplifier l'équation, mais c'est obtenir la « véritable » nature de l'exponentielle, comme fonction égale à toutes ses dérivées. On écrit en tout cas cet aspect fondamental en exprimant la liaison entre la constante k et la base a de l'exponentielle solution de (1) sous une forme visualisant l'*exponentielle eulérienne*:

$$a=e^k.$$

On voit la liaison du cas $k= 0$ avec la valeur 1 de la constante a. On pourrait pourtant éviter le passage par l'*exponentielle eulérienne* et dire que l'exponentielle solution de (1) et égale à 1 à l'origine possède k comme valeur de la dérivée à l'origine. A ce titre, la fonction 10^x requiert $k= \ln 10$, e l'on voit le cercle vicieux d'un passage préalable par les logarithmes. Si on ne le fait pas, c'est bien que l'*exponentielle eulérienne* a acquis un privilège. Comment le justifier « naturellement » par cette présentation selon une équation différentielle, qui s'offre aujourd'hui comme une modélisation ? Bien sûr, il y a en arrière plan la formule de Taylor, qui donne une fonction par son développement en série entière à partir des dérivées successives, et favorise le cas où toutes les dérivées sont égales. Mais s'il y a alors un « naturel eulérien », il ne peut que provenir d'une théorie mathématique sur les fonctions.

De ce privilège de l'*exponentielle eulérienne* ne rendra pourtant compte aucune quantification d'un phénomène physique ou naturel. Car elle ne permettra pas d'obtenir directement l'équation dite simplifiée (2). En effet, les unités choisies pour mesurer aussi bien les quantités y et y', lorsque celles-ci ont un sens physique par exemple, ou un sens en économie, en psychologie, ou en d'autres domaines hors mathématiques, forcent la présence d'un coefficient k dans l'équation. C'est là une des plus vieilles remarques de la mise en mathématiques, celle qui faisait écrire à un Nicole Oresme au XIVe siècle que le cercle ne pouvait pas représenter la variation d'une quantité, en être le graphe, mais seule le pouvait l'ellipse parce que courbe stable par affinité (changement d'échelle sur une variable). On comprend dès lors la justification du maintien de l'habitude des proportions en place des nombres réels lors de l'introduction des fonctions en mathématiques. Car il s'agissait d'éviter des erreurs d'interprétation, et de se servir de « miracles fonctionnels » qui n'étaient que « mirages ». Or je connais une démonstration de l'axiome des parallèles, due pourtant à Adrien-Marie Legendre, qui « marche » par ce mirage fonctionnel. La tradition de l'analyse est précisément d'éviter toute forme de raisonnement qui pourrait s'apparenter à ce vague des fonctions. Le « nombre réel », qui remplace les proportions pour établir le notion de fonction, présentait bien un sens nouveau, et un sens absolu si l'on peut dire, car il pouvait désigner tous les développements décimaux illimités. Avait en effet disparu l'idée de proportion, ou d'échelle, et se dénouait la difficulté de la notion de fonction déjà évoquée par indécision de la variable. Je ne veux pas reprendre toute cette histoire des fonctions, qui fut mon premier travail en histoire des mathématiques, et reste ici suggestif. Car la question épistémologique du « naturel » que je veux aborder ici avec les exponentielles, est celle de savoir ce que le mathématicien ajoute, ou requiert de plus, lorsqu'il dit faire une modélisation.

De même que pour les besoins de la cause que j'entends expliquer j'ai particularisé l'*exponentielle eulérienne* parmi les exponentielles, il me faut distinguer entre un *modèle* et une *modélisation*. Je mets ces mots en italique, car je les prendrai désormais en un sens précis. Je décris un *modèle* comme une analyse scientifique d'un phénomène, d'une observation ou d'une imagination, et donc comme une réduction faite de façon à organiser un réseau de causalités, de dépendances et d'implications. Je n'ai pas besoin de l'adjectif « naturel » pour dire un *modèle*, et récuse même la signification qui viendrait des seules « sciences de la nature », quoique celles-ci n'en fournissent pas moins de nombreux *modèles*. Ma définition permet des *modèles* provenant des sciences humaines, mais aussi bien des mathématiques elles-mêmes. A ce titre, je peux parler du *modèle* des proportions dans les mathématiques grecques, ou du *modèle* des nombres réels en tant que décimaux illimités. Les *modèles* peuvent changer de mode, si l'on me permet ce *joke* ! Ceci précisé, j'accepte bien volontiers qu'un enseignant considère qu'un *modèle* ainsi entendu fournisse le « naturel », utile à une époque donnée, mais à condition qu'en soit bien perçu le contenu déjà scientifiquement construit. On aura remarqué que j'ai écrit « scientifiquement » et non « mathématiquement ». Je me dégage, et ce n'est pas facile, de cette opinion, pourtant gravée chez Kant comme une démonstration, qu'il n'y a science qu'en autant qu'elle est mathématisée.

Je décris corrélativement une *modélisation* comme un choix de mise en mathématiques d'un *modèle* donné, choix qui privilégie un certain type de calculs sur des solutions théorisées d'avance, et fixe simultanément des relations et des définitions qui ne pourront plus bouger, des opérations permises et d'autres refusées. C'est tout un *modus operandi*.

Je reconnais que le vocabulaire que je viens de fixer est contraignant, et il peut déranger, mais son utilisation permet plus que le seul plaisir de la logique. Il clarifie le débat. Je n'ai ainsi pas insisté sur la cohérence ou la logique même d'un modèle, et de cette façon j'ai surtout évité de prendre un *modèle* pour une théorie. Mais, selon ma terminologie, la *modélisation* peut encore se dire comme la mise à crédit d'une théorie mathématique, venant comme une autre source se superposer au *modèle* pour le réaliser d'une certaine façon, lui apportant en plus la logique propre du calcul. La *modélisation* serait une réel rendu logique, ce qui fait du *modus operandi,* un calcul justifié. Et je ne confonds pas la théorie en jeu dans la *modélisation* avec le *modèle*. C'est enfin dans le verbe « réaliser » que réside généralement l'avantage attendu de la *modélisation*, bénéficiant d'un contact si l'on peut dire avec le réel, une concrétisation toujours utile puisque la mathématique reste fondamentalement travail sur des abstractions. Le *modus operandi* agit sur des objets conçus comme réels, mais les règles opératoires limitent ce réel, et le fictionnalisent, ou encore le rendent abstrait. Pour faire un peu plus court, la *modélisation* est une analyse dirigée par un calcul faisant la rigueur et le sens abstrait, et elle part d'un *modèle* qui pourrait se décrire comme étant une synthèse analysée pour générer le sens d'origine. C'est désormais sur ces bases que je pose la question de la *modélisation* des exponentielles, mais il me semble que les définitions précédentes peuvent être utiles en bien d'autres occasions.

Je vais enfin montrer que la conduite de *modélisation* transforme le rôle joué par l'histoire des mathématiques. Cette dernière pourrait devenir une sorte d'ingénierie didactique, comme une réserve de *modèles* aussi bien que de *modélisations*. Je ne développerai pourtant pas cette ingénierie. Il me semble que beaucoup reste encore à faire pour que l'histoire des mathématiques serve véritablement en didactique. J'ai tenté à plusieurs reprises de théoriser les difficultés de cet emploi. N'oublions pas que l'histoire professionnelle des mathématiques avait traditionnellement un autre objectif, celui de mesurer les capacités de l'esprit humain, en scrutant jusqu'aux fautes commises dans l'acte d'invention. Or de ces fautes, le pédagogue mathématicien se défie fondamentalement. Aujourd'hui, les divers cognitivismes ont repris cette ambition critique comme analyse du cerveau, mais avec la tendance positiviste à considérer les fautes historiques comme autant de passages obligés, comme une genèse de l'esprit juste. Il serait en tout cas temps que l'on prenne au sérieux la large expérience historique de l'enseignement des mathématiques, moins comme un « naturel » obligé vers notre démarche actuelle que comme autant d'expériences explicatives, ou transpositions didactiques dans un contexte mental et sociétal daté. C'est ce que je poursuis ici sur les exponentielles.

Exemples de *modélisation* pour les exponentielles

Que le taux de décomposition d'un produit au cours d'une réaction chimique dépende directement de la concentration de ce produit est un *modèle*. Une *modélisation* possible en est l'équation différentielle (1) et la résolution qui lui est attachée. Par l'équation seule est fixée d'une part la rapidité d'évolution du taux par la dérivée de la concentration y du produit en fonction du temps, et d'autre part l'hypothèse de proportionnalité qui quantifie la dépendance de la vitesse de décomposition par rapport à la concentration. Cette dernière hypothèse n'est « simple » ou « naturelle » qu'avec la *modélisation* de l'équation (1). Car elle établit une solution exponentielle, grâce à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Je ne retiens pas ici la question de la simplicité de cette dernière théorie. D'ailleurs l'introduction d'une puissance en plus de la dépendance linéaire référerait aux équations de Bernoulli, qui est une *modélisation* voisine, mais dont le nom seul montre que la simplicité ne fut pas tout d'abord comprise. *Hic et nunc*, et c'est l'essentiel pour mon propos, le *modèle* tient à la seule chimie, et la *modélisation* tient à l'adaptation d'une mathématique déjà prête.

On voit que la question didactique devient celle de savoir comment transformer une telle *modélisation*, qui présuppose une connaissance mathématique, en une construction qui a pour but de créer ce savoir en le motivant par le *modèle*. Je répète qu'il existe des *modèles* qui dépendent de bien d'autres disciplines que la chimie, comme la physique, l'économie, la géographie, ou les sciences humaines en général, mais il est peut-être moins usuel de parler de *modèles* qui dépendent en large partie des seules mathématiques. Je vais précisément en donner, en plus du cas des proportions ou des nombres réels déjà fournis, les choisissant relatifs aux exponentielles, et ce sera concrétiser encore les notions de *modèles* et de *modélisations* ici adoptées. Je souligne que ma définition d'un modèle l'empêche de provenir de la connaissance commune non scolaire. J'ai précisé en effet qu'un *modèle* a un contenu scientifique, et c'est l'apport le plus important de Gaston Bachelard, le contempteur de la simplicité cartésienne, que d'avoir bien opposé sens commun et science, en inventant la notion d'obstacle épistémologique. L'enseignant a charge de le lever. Je dois alors admettre que mon étude manque la question que je dis majeure de l'enseignement actuel : que faire des connaissances communes des élèves ? Autrement dit, comment réagir à l'école à la mathématisation croissante de la société dans laquelle nous vivons.

Me restreignant donc par le vocabulaire même de *modèle*, tout porte à présenter les exponentielles comme une *modélisation* dont le *modèle* est une équivalence pensée entre l'opération d'addition et l'opération de multiplication. On peut concevoir ce modèle à partir d'une fonction f et d'une façon apparemment analogue à l'équation différentielle (1), requérir pour celle-ci l'équation fonctionnelle

(3) $$f(x+t)=f(x)f(t)$$

Envisager que la fonction f solution de (3) puisse être prise comme une exponentielle a^x, c'est dire que l'on a la propriété

(4) $$a^{x+y}=a^x a^y$$

C'est donc réaliser le *modèle* (la comparaison des opérations) par une *modélisation* (les fonctions exponentielles entendues comme munies de la propriété (4) et de toutes ses conséquences, comme la mise en puissance d'une exponentielle qui reste une exponentielle :

$$\left(e^x\right)^n=e^{nx}.$$

Cette *modélisation* a longtemps porté un nom, et ce dès la création du calcul différentiel et intégral dans le dernier tiers du XVIIe siècle, et elle fut appelée *le calcul exponentiel*. Nous l'avons oublié, mais l'histoire cautionne ma description d'une *modélisation*, c'est-à-dire d'un calcul nouveau, au point que l'originalité de ce *calcul exponentiel* fut fortement revendiquée par Jean Bernoulli (1667-1748), alors même que nous le savons déjà développé par Leibniz (1646-1716), qui à son habitude ne publia pourtant pas. Tout enseignant connaît le piège de la règle $\left(e^x\right)^n=e^{nx}$, semblable au piège de la règle des signes en algèbre élémentaire, et ne peut qu'être agréablement surpris de l'efficacité de cette règle manipulée chez un Euler pour fonder sa construction de l'exponentielle eulérienne. On la verra plus tard. La définition de l'*exponentielle décimale* à partir du cas où la variable est un entier, utilise bien l'équation fonctionnelle

$$10^{x+y}= 10^x.\ 10^y,$$

pour passer au cas d'une variable rationnelle. La difficulté reste le passage à un *x* réel. Mais il y a beaucoup de solutions classiques, que je n'ai pas besoin de rappeler ici.

Si l'on a choisi autrement d'introduire les exponentielles par l'équation différentielle (1), le passage de (1) avec $y(0)=1$ à (4), requiert une démonstration. Certes, elle est facile, mais on ne peut pas dire qu'elle se déduise naturellement du *modèle* fourni par (1), ni d'ailleurs d'une théorie mathématique comme le fut le *calcul exponentiel* et ses règles de calcul. Je ne crois pas bon d'appeler *modélisation* cette démonstration qui fait passer de (1) à (4), car en fait la plupart des démonstrations reviennent à d'abord définir l'exponentielle a^x. On peut trouver intéressant de chercher un passage direct de (1) à (3), mais ne risque-t-on pas une complication ? Essayons tout de même, car l'enseignement n'est pas contraint de passer du simple au compliqué.

Si $f{:}R\to R$ satisfait (3), et est partout dérivable, on déduit l'équation différentielle (1) pour *f*. Détail non négligeable, j'ai dû préciser un domaine de définition pour *f*, ce que ne pouvaient pas faire les fondateurs du calcul intégral comme nous l'avons vu. Grâce à $f'(x+t)= f'(x)f(t)= f(x)f'(t)$, le rapport de f' à f est le même que l'on prenne la variable *x* ou la variable *t*, et est donc une constante. C'est en cette remarque que consiste la méthode de séparation des variables, née avec l'usage mathématique des fonctions, et on peut la considérer comme une *modélisation* de la notion de variable. Elle a prouvé son efficacité avec les équations aux dérivées partielles au XVIIIe siècle. En tout cas, le rapport $f'(x)/f(x)$ est constant, égal à *k* pour fixer les choses, et l'on a bien (1) avec $y= f$. Cette démonstration qui va de (3) à (1) n'atteint pas l'objectif fixé qui était de déduire (3) de (1). Il faut envisager une réciproque. Soit donc $f{:}R\to R$ satisfaisant (1), et posons *g* comme fonction de deux variables, $g(x,t)= f(x)f(t)$. Le calcul précédemment mené montre que $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial t}$. On peut en déduire que *g* est une fonction ne dépendant que de la seule variable $x+t$. En effet, si l'on pose $x+t= v$, $x\text{-}t= v$, ou encore $x=\frac{u+v}{2}, t=\frac{u-v}{2}$, et $h(u,v)=g(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2})$, on constate la nullité de la dérivée partielle de la fonction h : $\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)=\frac{1}{2}(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial t})=0$. Si l'on peut convenir qu'un *modèle* a été fourni par l'équation différentielle (1), la *modélisation* qui sert pour la déduction de (3) à partir de (1), fait jouer la signification profonde du calcul différentiel, et non seulement des questions de calcul de dérivées. On peut estimer que c'est beaucoup trop demander quant à une introduction de la fonction exponentielle.

D'un point de vue éducatif, on voit combien l'idée que j'ai défendue de *modélisation* tient à l'origine des connaissances mathématiques acquises par les élèves, alors que le mathématicien qui invente s'adresse à ses pairs, et peut alors considérer que reste comme une question le passage de ce *modèle* résumé par l'équation (3), à la *modélisation* qui prouve (4) : il demandera en effet les conditions de régularité, nécessaires ou seulement suffisantes mais les plus économiques, pour aller de f satisfaisant (3) et $f(0)= 1$, à $f(x)= a^x$. C'est bien sûr une autre question.

Cette question fut pourtant constitutive du geste d'enseignant de Cauchy, lorsque paraissait son *Analyse algébrique* en 1821 : il posait la question des solutions *continues* de l'équation fonctionnelle (1) afin de construire les fonctions *exponentielles*, et son but était d'aller jusqu'aux fonctions exponentielles complexes (dont je ne parlerai pas ici pour ne pas faire trop long, mais c'est dommage sur le plan épistémologique, d'autant que Cauchy a d'abord raté une base complexe pour l'exponentielle et qu'Abel dut corriger un défaut de la démonstration de Cauchy). Une équation telle que (3), portant sur une fonction inconnue f, est typique de ce qu'est une équation fonctionnelle, qui peut se réaliser dans de nombreuses circonstances selon le domaine auxquels les variables x et t appartiennent en l'occurrence de (3). Nous n'avons par parlé de ces domaines car le choix est vraiment l'affaire de la *modélisation*, et ce n'est plus vraiment le *modèle* qui intervient, mais une pratique de calcul. L'enseignant actuel est sans doute bloqué par la liaison imposée entre une relation fonctionnelle définissant une idée de fonction et un domaine de définition. Cauchy choisit l'axe réel entier parce que le corps complexe lui procurerait trop de difficultés, et il procède en deux étapes, ou selon deux principes.

1° Il montre qu'une solution non identiquement nulle $f{:}R \to R$ de l'équation (3) est égale à une exponentielle sur un sous corps ou une sous structure algébrique de R.

2° Il conclut par la densité de ce sous-corps ou de cette sous structure à l'égalité partout d'une solution continue de (3) à l'exponentielle établie à la première étape.

Je n'ai aucune réticence à parler d'une *modélisation* pour décrire l'organisation de la pensée qui ordonne le calcul résultant des deux principes posés par Cauchy. La démonstration est d'ailleurs bien connue, mais je prendrais la peine de la répéter, car elle expliquera mon traitement sur une équation un peu voisine qui va intervenir avec le temps de demi-vie. Pour l'équation (3), le sous corps choisi par Cauchy est le corps de nombres rationnels, et l'on peut estimer que l'exponentielle est facilement compréhensible sur un tel corps, puisqu'il n'y a qu'à prendre des puissances entières ou des racines entières de nombres positifs. Ceci explique d'ailleurs la restriction analogue aux seuls positifs pour le logarithme.

On vérifie en effet qu'avec $f{:}R \to R$ satisfaisant (3) sur R, et f(0) non nul, on a successivement

1° $f(x) \geq 0$	puisque $f(2x)=(f(x))^2$ et que tout *y* de *R* s'écrit sous la forme *y = 2x*)
2° $f(x) > 0$	puisque si $f(z)= 0$ pour un certain *z*, alors $f(x+z)= 0$ et tout *y* de *R* peut s'écrire sous la forme *y= x+z*). Or f(0) est non nul, et donc grâce à (1), f(x)>0.
3° $f(nx)=(f(x))^n$	par récurrence, pour *n* entier relatif, on vérifie $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$ et $f(0)= 1$.
4° $f(\frac{n}{m}x)=(f(x))^{\frac{n}{m}}$	en écrivant 3° avec *x/m* en place de x.
5° $f(\frac{n}{m})=a^{\frac{n}{m}}$	avec $a= f(1)>0$. On construit donc l'exponentielle sur les rationnels
6° $f(x)= a^x$	par identification des deux fonctions continues si l'on a déjà à sa disposition l'exponentielle, et par prolongation par continuité de l'exponentielle des rationnels aux réels, à condition d'établir la continuité de cette exponentielle sur les seuls rationnels, ce qui est facile en ramenant cette continuité au point origine.

C'est cet ensemble de pratiques sur les principes énoncés que j'ai appelé une *modélisation*, une théorie qui garantit d'avance le succès. Je dois alors insister sur ce succès, et son caractère prévisible. C'est en cela même que la modélisation est fruit d'une théorie, et non création *ab nihilo*. Le succès requérait pourtant de rester en analyse réelle, mais je ne veux pas insister sur ce point. Il expliquerait néanmoins la dichotomie de l'analyse au XIXe siècle et largement au siècle suivant, entre analyse complexe et analyse réelle. Sur la base de sa définition d'une fonction continue, la construction de Cauchy (1789-1857) est en effet restée un exemple extraordinaire de rigueur mathématique constructive, complétée d'ailleurs par Karl Weierstrass (1815-1897) sur des questions d'uniformité notamment. Elle a marqué l'écriture des manuels mathématiques jusqu'au début du XXe siècle quant à la notion de fonction, la liant à celle d'équation fonctionnelle, dont l'exemple le plus net devint pourtant celui des équations différentielles, comme (1), plutôt que des équations comme (3). La différence de postérité tient à un effet de *modélisation*, car le calcul est devenu classique sur les équations différentielles linéaires telles que (1), et malgré Cauchy le calcul sur des équations fonctionnelles telles que (3) est resté anecdotique ou isolé. Il n'y a en effet pas de théorèmes faciles d'existence et d'unicité pour les équations fonctionnelles générales.

La question est autre de l'avantage didactique qu'il y a d'insister aujourd'hui sur l'aspect de *modélisation* de la démarche de Cauchy. Alors que la tradition la voyait comme une construction des fonctions élémentaires de l'analyse, dont les exponentielles. A cette occasion cette construction mettait en place les méthodes mêmes de l'analyse, à partir d'une théorie des réels et de la continuité. La réponse à ce qui pourrait passer pour une « réaction », ou un retour, me paraît pourtant simple : la méthode de Cauchy est devenue un exercice destiné à « faire marcher » les notions préalablement acquises de fonctions, de fonction continue, d'ensembles denses et de calcul combinatoire sur les équations (3) ou (4). Car depuis les mathématiques modernes, et la topologie, les notions fondamentales de l'analyse s'apprennent ailleurs, et par exemple la prolongation d'une fonction continue sur un ensemble dense à l'ensemble tout entier. .En ce cas, le concept de *modélisation* pour décrire ce que l'on fait autour de l'équation (3) est bienvenu, là où il y avait traditionnellement (depuis Cauchy) une construction et un apprentissage. L'entendre comme une *modélisation* en fait une application bien pensée, une motivation d'efficacité, une vérification si l'on veut, mais à peine une invention. Il vaudrait mieux parler de simulacre d'invention. Et c'est une situation bienvenue pour l'enseignant qui a vraiment analysé la signification didactique d'un problème ouvert. Je ne crois pas que la notion de transposition didactique soit ici utile, car il y a déplacement de la pensée savante. Du moins, avec cette application ou *modélisation*, ne faisons pas semblant d'avoir fait fond sur autre chose qu'une conception purement mathématique, celle de l'analyse des fonctions continues et de l'usage des suites pour ces fonctions, conception que, dans ma terminologie, je n'aurais aucune difficulté à appeler *modèle*. On pourrait didactiquement discuter de l'effet malheureux de l'ancrage à long terme dans une analyse réelle, alors même que la topologie permettait de s'en débarrasser. On pourrait aussi discuter de la pertinence de restreindre la construction de Cauchy à la seule exponentielle décimale alors qu'elle permet d'avoir toues les exponentielles ! On a donc remarqué que dans la discussion je n'ai pas envisagé l'*exponentielle eulérienne*.

La question de l'*exponentielle eulérienne*

Même s'il existait un *modèle* pouvant se dire par l'équation différentielle (2), c'est-à-dire l'équation (1) privée de la variable k, cette équation ne pourrait en être la *modélisation*. Car la *modélisation* qui prévaut est toujours celle de l'équation différentielle (1) où doit intervenir un coefficient k. Se priver de ce coefficient, c'est jouer avec une théorie que l'on particularise sans raison. En tout cas, l'avantage didactique ne peut se réduire à dire que $k= 1$ est le choix le plus simple.

Je vois quand même deux objections s'élever contre l'affirmation précédente, dont j'ai à peine besoin de dire que je le situe en présupposant le débat éducatif sur la modélisation en tant que démarche transdisciplinaire dans les classes, et l'exponentielle comme lieu d'exercice de la rigueur particulière aux mathématiques. Exceptionnellement, je n'ai pas mis ici en italique le mot modélisation, car le sens utilisé doit avoir le vague même qui fait sans doute tout le plaisir des contradictions. Deux objections donc.

La première tient au rôle épistémologique que je fais jouer à une simple constante, que ce soit k dans l'équation (1), ou e en place de a pour l'écriture de l'*exponentielle eulérienne*. Alors même que j'ai glissé au préalable dans les trois cas d'équations différentielles la condition $y(0)= 1$. Je m'expliquerai plus loin sur ce rôle des constantes comme conditions aux limites, car il me paraît devoir entrer dans la *modélisation*. La deuxième objection tient à l'induction qui conduirait à penser que l'*exponentielle eulérienne*, exprimée par (2) qui ne peut pas être une *modélisation*, ne peut provenir d'aucun *modèle*. Je réunis alors les deux objections sous la forme d'un raisonnement exagéré, et dont la fausseté devient ainsi plus éclatante. Il n'y aurait de mathématique qu'en autant que disparaissent les constantes non « naturelles », ou non « intrinsèques », que des physiciens ou autres scientifiques peuvent introduire. Faire $k= 1$ serait ainsi le propre des mathématiques ! Je suis pourtant au cœur du débat. Puisque l'on a entendu plus d'un enseignant de mathématiques prétendre que la présentation de l'exponentielle par le *modèle* physique de la radioactivité – c'est là l'origine du débat actuel n'est-ce pas ? - n'avait pas de valeur mathématique en ce que le *modèle* faisait intervenir le temps de demi-vie. Cette notion ne fut jamais introduite par les mathématiciens pour les exponentielles, avant du moins la découverte du phénomène de la radioactivité à la fin du XIXe siècle. Cette remarque historique d'une antériorité de l'exponentielle mathématique sur l'exponentielle que je pourrais momentanément dire radioactive pour signaler le modèle, me plaît tout particulièrement. Non parce qu'elle arrête la *modélisation*, mais elle donne du poids à l'intérêt nouveau du *modèle* radioactif, ou plutôt elle en fait une question d'enseignement. Aussi je donnerai des textes de physiciens, refusant d'ailleurs les mathématiques, pour expliquer l'origine mathématique du temps de demi-vie. Mais je réponds d'abord à la question posée par une négation, et on va vite voir mieux.

La demi-vie définie mathématiquement sans la physique n'est pas une *modélisation*

La décroissance radioactive correspond à la solution de l'équation (1) lorsque k est une constante négative. Je prendrais plutôt $–k$, avec $k>O$, et écris la solution

(5) $$y(x)=Ye^{-kx}\,,$$

où Y est une constante. Cette constante est égale à la valeur de la fonction *y* en *x= 0,*

(6) $$y(0)=Y\,.$$

On conviendra d'appeler la fonction $y(x)=Ye^{-kx}$ une *exponentielle de type k*, en supposant désormais *k>0* et *Y* >0. Ai-je besoin de préciser que ces limitations sur les constantes tiennent à la décroissance de la radioactivité dont on utilise bien peu de propriétés physiques, et que c'est cela le début de la *modélisation*. De même, je ne suppose plus *y(0)= 1*, mais juste *y(0)>0,* et on verra pourquoi je ne simplifie pas d'emblée. L'équation (1) correspondante est *y'+ky= 0*. Pour une telle fonction, on appelle *temps de demi-vie* la valeur x_{DV}, forcément unique compte tenu de la seule décroissance et de la continuité de l'*exponentielle de type k*, pour laquelle

$$Ye^{-kx_{DV}}=\frac{Y}{2}\,.$$

Ce qui revient à écrire la relation

(7) $$y(x_{DV})=\frac{y(0)}{2}\,.$$

La valeur de x_{DV} est exprimable à partir du logarithme népérien de 2 et du type k de l'exponentielle :

$$x_{DV}=\frac{\ln 2}{k}\,.$$

Au départ, j'avais supposé *y(0)= 1*, et donc réduit *y* à l'exponentielle standardisée de type *k* avec Y= 1, soit $y(x)=e^{-kx}$. L'inconvénient de cette fixation de la constante est de ne pas permettre de constater que le temps de demi-vie est indépendant de *Y*. Donc que le temps de demi-vie concerne toutes les *exponentielles de type k*. Je retrouve ainsi la remarque déjà faite sur les nombres à prendre comme des proportions, ou la nécessité de constantes multiplicatives. La physique numérisée oublie le passé des proportions, et l'on manque alors quelque chose du *modèle*.

On constate qu'avec la définition ci-dessus adoptée du temps de demi-vie, il n'y a aucune vérification physique facile par une expérience, et même pas l'indépendance pour ce temps de la valeur initiale. C'est que le repérage mathématique est trop prégnant. Il faut aller plus loin et expliquer que le temps de demi-vie, pour des *exponentielles de type k*, ne dépend pas de l'instant origine. Car il n'y a pas d'origine privilégiée des temps pour un physicien. Il faut donc enrichir le *modèle* du temps de demi-vie, et mieux l'analyser. En effet, ce n'est pas seulement pour la valeur origine de *x* (*x= 0*), mais pour tout *x,* qu'est valable la relation fondatrice de demi-vie. Elle peut s'écrire par une relation fonctionnelle portant sur *y*.

(8) $$y(x+x_{DV})=\frac{y(x)}{2}.$$

L’origine physique du temps de demi-vie

Avant de démontrer la relation (8), il me paraît utile d’examiner la façon dont les physiciens ont introduit le temps de demi vie vers 1900, notion qui n’avait pas été pensée auparavant en mathématiques pour l’exponentielle qui disposait déjà d’une histoire au moins biséculaire. C’est Pierre Curie qui introduit le calcul, mais sans l’expression, dans un article de 1902, six ans après la découverte de la radioactivité. L’article des Comptes rendus de l’Académie des sciences de Paris, est intitulé : *sur la constante de temps caractéristique de la disparition de la radioactivité induite par le radium dans une enceinte fermée*. Et, dès l’introduction, Pierre Curie résume l’essentiel :

> Une enceinte fermée renferme un sel solide ou une dissolution de sel de radium. Tous les corps placés dans l’enceinte deviennent radioactifs. Si l’on retire de l’enceinte un corps solide qui y a été activé, il perd à l’air libre son activité suivant une loi d’allure exponentielle, l’activité radiante diminuant de moitié pour des temps de l’ordre de grandeur d’une demi-heure.

La même année, Curie explique au Bulletin de la Société française de physique qu’il a avec cette demi-vie une « mesure absolue du temps» :

> Le temps ainsi défini est indépendant des unités adoptées pour les autres grandeurs physiques.

D’une manière très physique, reprenant le début de son explication sur la constante, Curie montre que la « loi de désactivation » est aussi celle de l’enceinte fermée elle-même, lorsqu’on a enlevé de l’intérieur du tube l’air modifié par le radium. Il insiste que les conditions expérimentales.

> J’emploie le plus souvent, comme enceinte close, un tube de verre scellé à la lampe. Ce tube de verre est placé dans le cylindre intérieur d’un condensateur cylindrique en aluminium. Les rayons émis par le tube traversent l’aluminium et rendent conducteur l’air entre les armures du condensateur. On mesure le courant limite que l’on obtient entre les deux armatures, lorsqu’on maintient entre elles une différence de potentiel constante (450 volts). Le rayonnement, ainsi mesuré, est dû exclusivement à la radioactivité des parois, car, lorsqu’on retire rapidement l’air actif du tube, le rayonnement mesuré exactement après est le même qu’avant.

Une fois ces conditions expérimentales expliquées, Curie passe à l’écriture de la loi exponentielle, bien sûr empruntée aux mathématiques, et il la donne avec plusieurs constantes.

> L’intensité du rayonnement I est exprimée en fonction du temps t par une loi exponentielle
>
> $$I=I_0e^{-\frac{t}{\theta}}$$
>
> I étant l’intensité initiale,e la base des logarithmes népériens et θ une certaine constante qui représente le temps [noté t].

Et Curie envisage aussitôt les conditions de la mesure, permettant la vérification, « dans des conditions extrêmement variées » de la constante θ.

> En portant le logarithme de I en ordonnées et t en abscisse, les points représentatifs des expériences viennent se placer sur une droite, les écarts n'ayant pas de caractère systématique et ne dépassant pas l'erreur possible des expériences (1 pour 100 sur la valeur de I)[...]La valeur moyenne, qui résulte des déterminations concordantes obtenues dans 24 séries d'expériences, est : $\theta = 4,970\text{x}105$ secondes (5, 752 jours).

La moyenne porte sur les mesures de θ qui, du coup, va bientôt s'appeler *constante radioactive*. Or l'inverse de cette constante (*1/θ*) va prendre le nom de moyenne, avec toutefois un tout autre sens, faisant appel à un autre *modèle*.

Pour le moment, Curie passe brusquement à une autre représentation de la constante, plus tard appelée le *temps de demi-vie*, sans qu'une explication vienne dire en quoi elle fait modèle parce que basée sur l'exponentielle. On l'appellera encore *période,* et là encore le *modèle* en jeu est autre. Curie ne donne toujours pas de nom, car il fait seulement un calcul, qui revient, comme nous l'avons déjà noté, à calculer θ ln 2

> D'après cette valeur de θ, l'intensité du rayonnement baisse de moitié en 3 jours 23 heures 42 minutes, soit sensiblement en quatre jours.

Comme Curie travaille par enregistrement d'une intensité électrique sur du radium, le temps de vie de quelques jours peut être remplacé par le calcul de θ sur un temps plus court, Curie conclut sur une propriété dite caractéristique

> Il résulte de ces nombreuses mesures que la constante de temps qui caractérise la diminution de l'activité d'une enceinte activée fermée n'est nullement influencée par les conditions de l'expérience, par la nature du gaz qui remplit l'enceinte ou de la matière qui en constitue les parois.

Ne nous trompons pas : il s'agit de θ, et la propriété caractéristique est seulement sa constance, non la forme *a priori* de la loi exponentielle. Abandonnant Curie et l'histoire, et notamment celle de la radioactivité, on peut maintenant examiner ce qu'il s'agit de faire pour déterminer la loi exponentielle, allant ainsi vers un sens mathématique de la caractérisation. C'est en cela que la démonstration de la relation (8) que nous reprenons est utile.

Démonstration de la relation (8)

La démonstration de la relation (8) utilise une propriété structurale de la *fonction exponentielle de type k*, exprimée par une relation voisine de la relation (4). La relation (4), exprimée par $a^{x+y}=a^x a^y$, est sans doute le plus vieux *modèle* pour les exponentielles qui correspond à la forme fonctionnelle (3), c'est-à-dire f*(x+t)= f(x)f(t)* et pouvait se lire déjà dans les *Eléments* d'Euclide pour les progressions géométriques au IIIe siècle avant notre ère. Il faut alors faire jouer la constante multiplicative, et on peut penser avantageux de mettre l'équation sous la forme :

(9) $$f(0)f(x+t)= f(x)ft).$$

Elle se vérifie avec une *exponentielle de type k* selon

$$Y.Ye^{-k(x+t)}=Ye^{-kx}Ye^{-kt},$$

et se réduit à

$$e^{-k(x+t)}=e^{-kx}e^{-kt}.$$

Mais essayons de prouver (8) avec les seules relations (7) et (9), en supposant *y(0)* non nul. Grâce à (9), puis (7), puis à nouveau (9), on écrit effectivement la suite d'égalités aboutissant à (8).

$$y(0)y(x+x_{DV})=y(x)y(x_{DV})=\frac{y(x)y(0)}{2},$$

et puisque $y(0)\neq 0$, on a bien

$$y(x+x_{DV})=\frac{y(x)}{2}.$$

J'ai disposé les choses de sorte que l'on ait un automatisme de la démonstration de (8). C'est aussi cela à quoi sert une *modélisation*. Physiquement, si l'on a un moyen d'enregistrer de façon quantitative le crépitement radioactif lorsque le temps de demi-vie est court, on peut expérimentalement vérifier que le temps pris pour une diminution par deux ne dépend pas du moment où débute l'expérience. Mais, pour Curie, comme il s'agit d'un temps de demi-vie de plusieurs jours, il y a intérêt à mesurer θ sur un temps plus court, en supposant *a priori* la loi exponentielle. On peut dans les deux cas parler avec (8) d'un *modèle* radioactif de la demi-vie. Si le *modèle* pensé pour la radioactivité est le temps de demi-vie, une *modélisation* associée est l'exponentielle de type k, $y(x)=Ye^{-kx}$, et je rappelle que l'on a imposé Y>0 et k>0 pour garder un lien phénoménal avec le *modèle*.