Convergence d’une suite numérique – Expérimentation en L1 de l’ingénierie d’Aline Robert

Groupe sup – CIIU

4 avril 2014

Rappel

L'ingénierie d'A.Robert (1983)

- Trois questions qui s'appuient sur l'utilisation de dessins pour installer une représentation de la notion de convergence d'une suite numérique.
- Une question de type « vrai ou faux » où la définition est nécessaire pour pouvoir justifier.
- Alternance entre des phases de recherche individuelle et des phases d'institutionnalisation.

L'expérimentation

- Février 2014.
- Public : 45 étudiants de L1, filière informatique.
- Travail préparatoire sur les notions suivantes : suite, croissance d'une suite, suite majorée, minorée, bornée.
- Pas de contrainte temporelle stricte.
- De l'ordre de deux ou trois séances (1 séance $=$ 1h45).

Plan

1. La séquence
   - Adaptations de l'ingénierie initiale
   - Déroulement prévu
2. Le déroulement
   - Que s'est-il réellement passé ?
   - Quelques extraits
3. Le cours
4. Conclusion

Plan

1. La séquence
   - Adaptations de l'ingénierie initiale
   - Déroulement prévu
2. Le déroulement
   - Que s'est-il réellement passé ?
   - Quelques extraits
3. Le cours
4. Conclusion

Adaptations et déroulement prévu

Considérons les suites de terme général suivant :

1. $x_n = \dfrac{n^2 - 25}{2n^2 + 1}$, pour $n \geqslant 2$
2. $x_n = \frac{(-1)^n}{20}$
3. $x_n = \frac{1}{n} \cos n$
4. $x_n = \cos n$
5. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$, $x_n = 2$ pour $n \geqslant 5$
6. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 1}$
7. $x_n = \cos(n\frac{\pi}{6})$
8. $x_n = \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
9. $x_n = n^2 + 1$
10. $x_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$, pour $n \geqslant 2$

Adaptations et déroulement prévu

Considérons les suites de terme général suivant :

1. $x_n = \dfrac{n^2 - 25}{2n^2 + 1}$, pour $n \geqslant 2$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 2 cm)
2. $x_n = \frac{(-1)^n}{20}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 10 cm)
3. $x_n = \frac{1}{n}\cos n$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 2 cm)
4. $x_n = \cos n$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 5 cm)
5. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$, $x_n = 2$ pour $n \geqslant 5$
6. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 10 cm)
7. $x_n = \cos(n\frac{\pi}{6})$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 2 cm)
8. $x_n = \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 10 cm)
9. $x_n = n^2 + 1$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $= 0,5$ cm)
10. $x_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$, pour $n \geqslant 2$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 10 cm)

Adaptations et déroulement prévu

Question 1

Après avoir dressé un tableau de valeurs permettant de calculer les 10 premiers éléments de chaque suite, représentez graphiquement chaque suite sur un dessin différent.

- Travail « papier-crayon », utilisation de la calculatrice pour les tableaux de valeurs.
- Travail en petits groupes (3 ou 4 étudiants).
- Répartir les 10 suites dans le groupe.

Adaptations et déroulement prévu

Question 1

Après avoir dressé un tableau de valeurs permettant de calculer les 10 premiers éléments de chaque suite, représentez graphiquement chaque suite sur un dessin différent.

- Travail « papier-crayon », utilisation de la calculatrice pour les tableaux de valeurs.
- Travail en petits groupes (3 ou 4 étudiants).
- Répartir les 10 suites dans le groupe.

Objectifs

Les étudiants parlent de leurs dessins. L'enseignant maintient les conditions de travail en circulant parmi les étudiants.

Adaptations et déroulement prévu

Question 2

Pouvez-vous classer vos dessins ? Expliquez les critères permettant vos classements.

- La croissance et le caractère borné (ou non) devraient émerger.
- Question : émergence du comportement de convergence ?

Adaptations et déroulement prévu

Question 2

Pouvez-vous classer vos dessins ? Expliquez les critères permettant vos classements.

- La croissance et le caractère borné (ou non) devraient émerger.
- Question : émergence du comportement de convergence ?

Objectifs

- Les étudiants produisent des classements dans lesquels ils intègrent toutes les suites. Certaines suites peuvent faire débat.
- Si nécessaire, l'enseignant amène les étudiants à discuter du comportement de convergence.

Adaptations et déroulement prévu

Phase d'institutionnalisation

- L'enseignant collecte les idées de classements.
- Choix : se centrer, pour la suite de la séquence, sur la question de la convergence des suites.
- Recours au levier méta : l'objectif du cours est de définir rigoureusement ce comportement.

Adaptations et déroulement prévu

Phase d'institutionnalisation

- L'enseignant collecte les idées de classements.
- Choix : se centrer, pour la suite de la séquence, sur la question de la convergence des suites.
- Recours au levier méta : l'objectif du cours est de définir rigoureusement ce comportement.

Objectifs

Les étudiants se créent une première représentation intuitive de la convergence pour classer les suites mais il faut accepter que les dessins ne montrent pas tout et, en tout cas, on n'est pas capable de prouver les résultats de convergence qui émergent.

Adaptations et déroulement prévu

Question 3

Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre réel ℓ et un naturel n^* à partir duquel on a $|x_n - \ell| \leqslant 1/10$.
Expliquez brièvement votre choix.
Même question en remplaçant $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{100}$. Mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.

- Reprise du travail en petits groupes.
- Les dessins permettent de répondre à la question pour $1/10$ mais pas pour $1/100$.
- La suite $\left((-1)^n/20\right)$ vérifie la propriété pour $1/10$ alors qu'elle ne converge pas.

Adaptations et déroulement prévu

Question 3

Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre réel ℓ et un naturel n^* à partir duquel on a $\cancel{|x_n - \ell| \leqslant 1/10}$ $\ell - \frac{1}{10} \leqslant x_{n^*} \leqslant \ell + \frac{1}{10}$. Expliquez brièvement votre choix.
Même question en remplaçant $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{100}$. Mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.

- Reprise du travail en petits groupes.
- Les dessins permettent de répondre à la question pour $1/10$ mais pas pour $1/100$.
- La suite $\left((-1)^n/20\right)$ vérifie la propriété pour $1/10$ alors qu'elle ne converge pas.

Adaptations et déroulement prévu

Phase d'institutionnalisation

- Interprétation graphique de la propriété : construction d'une bande autour de ℓ dans laquelle les éléments de la suite rentrent à partir d'un certain rang.
- L'enseignant montrent des dessins où on a représenté plus d'éléments de la suite et des bandes de largeurs différentes.
- Correction pour les trois premières suites.

Adaptations et déroulement prévu

Phase d'institutionnalisation

- Interprétation graphique de la propriété : construction d'une bande autour de ℓ dans laquelle les éléments de la suite rentrent à partir d'un certain rang.
- L'enseignant montrent des dessins où on a représenté plus d'éléments de la suite et des bandes de largeurs différentes.
- Correction pour les trois premières suites.

Objectifs

- Interprétation graphique de la propriété étudiée.
- Le travail réalisé ne suffit pas encore pour définir la convergence.

Adaptations et déroulement prévu

Question 4

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifiez vos réponses.

1. Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
2. Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

- Première affirmation : la suite 10 est un contre-exemple.
- Deuxième affirmation : on peut se prononcer sur la véracité de l'affirmation mais on ne peut pas la justifier sans la définition.

Adaptations et déroulement prévu

Question 4

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifiez vos réponses.

1. Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
2. Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

- Première affirmation : la suite 10 est un contre-exemple.
- Deuxième affirmation : on peut se prononcer sur la véracité de l'affirmation mais on ne peut pas la justifier sans la définition.

Objectifs

Discuter à nouveau sur la largeur des bandes et définir la notion de convergence en $\varepsilon - N$.

Plan

1. La séquence
   - Adaptations de l'ingénierie initiale
   - Déroulement prévu
2. Le déroulement
   - Que s'est-il réellement passé ?
   - Quelques extraits
3. Le cours
4. Conclusion

Une vue globale de l'expérimentation

- Durée totale : 3h30 (deux séances).
- 15 groupes.
- Trois enseignants pour les phases de recherche individuelle.
- Séance 1 :
  - consignes,
  - questions 1 et 2,
  - institutionnalisation,
  - début de la question 3.
- Séance 2 :
  - questions 3 et 4,
  - définition de la notion de convergence d'une suite.

Séance 1 : Question 1

Séance 1 : Question 1

DURÉE : 45'

Quelques constatations :

- Trois groupes tentent de travailler avec la même échelle échelle pour les abscisses et les ordonnées.
- Un groupe ne s'est pas réparti le travail efficacement.
- Un étudiant calcule des éléments pour $n = -1,\ -2,\ -3, ...$
- Un groupe demande combien de chiffres prendre après la virgule.

Séance 1 : Question 2

DURÉE : 42'

- Des critères émergent : suite croissante (ou non), suite majorée, suite minorée, suite bornée (ou non), suite périodique (ou non).
- La convergence émerge dans pratiquement tous les groupes mais avec des expressions différentes :
  - « limite, pas de limite »,
  - « il y a une asymptote, il n'y a pas d'asymptote »,
  - « converger, diverger »,
  - « tendre vers 0 ou non ».
- Intervention de l'enseignant quand la convergence n'émerge pas : revenir sur la croissance et regarder les valeurs des éléments de la suite.

Séance 1 : Question 2

- L'enseignant collecte les classements de chaque groupe et les écrit au tableau.
- L'enseignant explique qu'on choisit de s'intéresser à la notion de convergence (seul critère dont on ne possède pas la définition).

Séance 2 : Question 3

DURÉE : 51'

- Les étudiants ont préparé le travail pour la valeur $1/10$.
- L'enseignant rappelle les classements (croissance et convergence) et l'objectif qui est de définir la convergence.
- L'enseignant introduit l'idée de bande autour de ℓ.
- L'enseignant collecte les réponses des étudiants pour chaque suite en commentant.
  - Plusieurs étudiants pensent que l'existence de ℓ et n^* est associée aux suites convergentes mais la majorité des étudiants a néanmoins trouvé une valeur pour n^* avec $\left((-1)^n/20\right)$.
  - L'enseignant fait émerger l'idée que la hauteur de la bande délimitée autout de ℓ doit être « petite ». C'est quoi « petit » ?
- L'enseignant fait un bilan (oralement).

Séance 2 : Question 3

- L'enseignant montre des dessins sur lesquels on a plus de points pour les suites et des bandes de largeurs différentes (suites 1, 2, 3 et 10).
  - Plus la hauteur de la bande est petite, plus n^* est grand.
  - $1/10$ ne fonctionne pas pour parler de convergence.
  - Ce sont les suites convergentes qui vérifient les inégalités avec $1/100$.
  - La suite 10 permet d'interroger les liens entre la croissance et la convergence.
    → si une suite est croissante et majorée, alors elle converge.
    → une suite peut converger sans être croissante ou décroissante.
- L'enseignant fait un bilan (écrit au tableau).
- Correction pour les suites 1 et 3 avec $1/100$.

Séance 2 : Question 4

DURÉE : 43'

- Les étudiants travaillent en petits groupes.
- L'enseignant corrige la première affirmation (tous les groupes avaient le contre-exemple).
- Pour la seconde affirmation, l'enseignant sollicite les étudiants qui pensent que c'est vrai.
  - Un étudiant explique que ça ne fonctionne pas pour toutes les bandes.
  - L'enseignant reprend le cheminement suivi à la question précédente ($1/10$, $1/100$).
  - L'enseignant montre des dessins où on laisse $1/100$ comme espace autour de ℓ pour amener l'idée que l'espace laissé doit dépendre de ℓ.
- L'enseignant dresse un bilan (avec l'idée de considérer toutes les bandes) et donne la définition.

Plan

Retour au cours magistral

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |x_n - a| \leqslant \varepsilon$

Dans la séquence, la définition est introduite pour prouver une propriété (dimension outil).
On utilise alors la définition en donnant une valeur bien choisie à ε.

Conséquence : ce travail est approprié pour démontrer l'unicité de la limite ou les règles de calculs.

Retour au cours magistral

Un passage à négocier dans le cours

Dimension objet de la notion.

Pour travailler sur des exemples, on a besoin du caractère générique du ε (« soit $\varepsilon > 0$ »).
Conséquence : commenter l'utilisation de la définition pour expliquer le passage de « prenons $\varepsilon =$ » dans la séquence à « soit $\varepsilon > 0$ » dans les exemples.

Plan

1. La séquence
   - Adaptations de l'ingénierie initiale
   - Déroulement prévu
2. Le déroulement
   - Que s'est-il réellement passé ?
   - Quelques extraits
3. Le cours
4. Conclusion

Bilan et perspectives

- Robustesse de l'ingénierie.

Bilan et perspectives

- Robustesse de l'ingénierie.
- Certains choix de gestion peuvent (doivent) être modifiés.
  - Collecte des classements à la question 2.
  - Le travail algébrique (manipuler les inégalités pour quelques suites) est facultatif. Ce n'est pas l'objectif premier de l'ingénierie.
  - Rebondir davantage sur les réponses des étudiants à la question 3.
    ➙ préparer toutes les suites sur l'ordinateur ?

Bilan et perspectives

- Robustesse de l'ingénierie.
- Certains choix de gestion peuvent (doivent) être modifiés.
    - Collecte des classements à la question 2.
    - Le travail algébrique (manipuler les inégalités pour quelques suites) est facultatif. Ce n'est pas l'objectif premier de l'ingénierie.
    - Rebondir davantage sur les réponses des étudiants à la question 3. → préparer toutes les suites sur l'ordinateur ?
- Perspectives :
    - Matériel à dépouiller : les notes prises par les étudiants.
    - Évaluer les apprentissages : présentation de certaines démonstrations par les étudiants, tester la manipulation de la définition en tant qu'outil et en tant qu'objet.