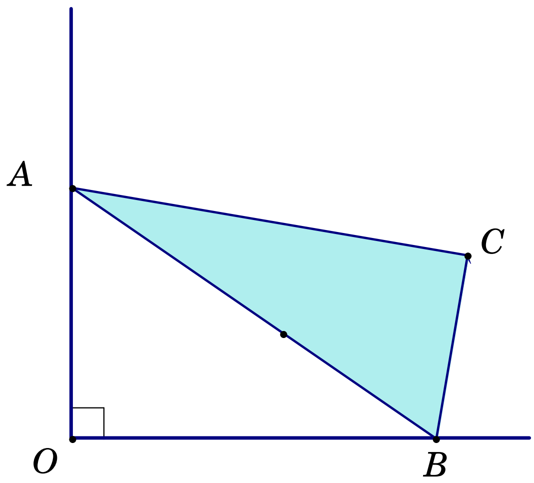
Quelques remarques à propos d'un exercice proposé par *Henry Plane*

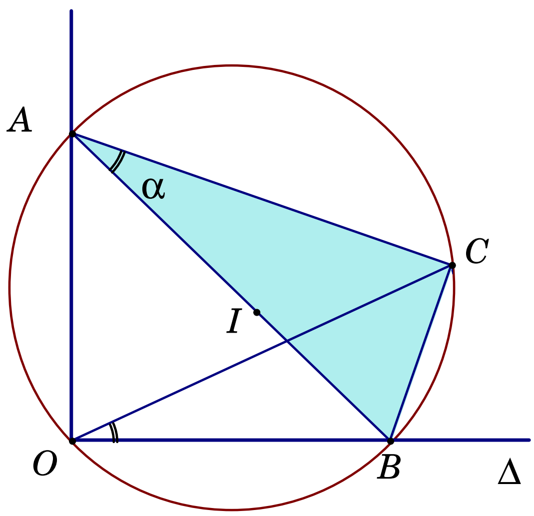
Enoncé.

Une équerre ABC s'appuie, en A et en B sur deux demi-droites perpendiculaires en O. Quel est le lieu du sommet C de l'angle droit?



Sens direct.

Les points A C B et O sont cocycliques. En effet les deux triangles rectangles ACB et AOB sont tous les deux inscrits dans un même cercle de centre I le milieu de $[A,B]$ et de rayon $\frac{AB}{2}$.
Comme les points A, C, B, O sont pris dans cet ordre sur le cercle (l'équerre étant posée "sur son hypoténuse"), les points A et O sont du même côté de la corde (BC) et donc les angles $\widehat{COB}$ et $\widehat{CAB} = \alpha$ sont égaux. Le point C appartient donc à la demi-droite de sommet O définie à partir de Δ par l'angle α.

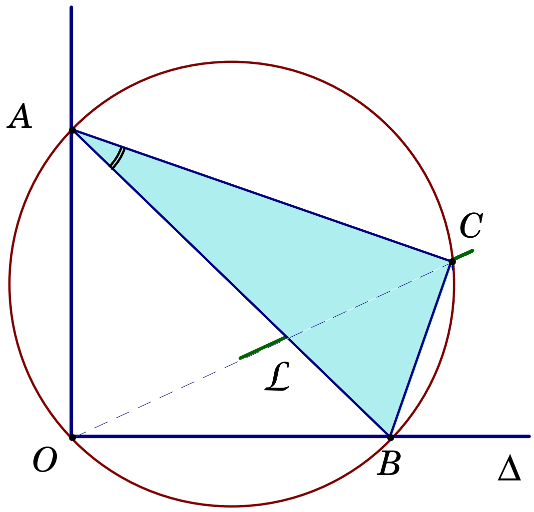


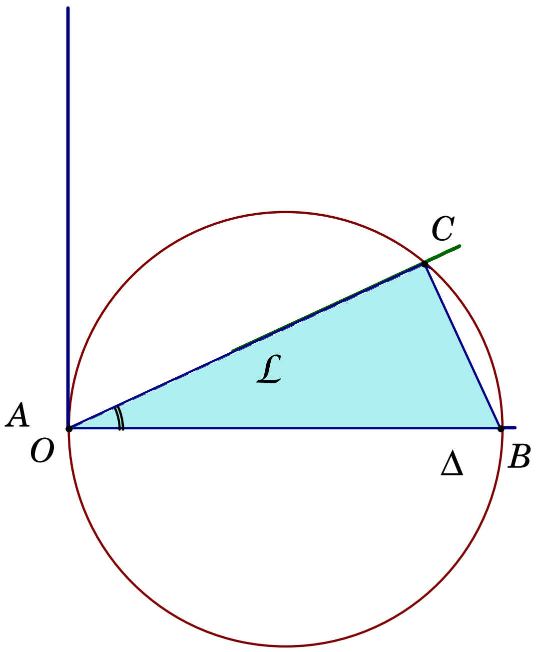
On remarque que le sens direct correspond à un exercice *classique* concernant les angles inscrits et les points cocycliques. La difficulté qu'il entraîne n'est donc pas *intrinsèque*, mais liée au manque d'entraînement qu'ont, à tout niveau, nos élèves sur ce genre de sujet. On pourrait d'ailleurs atténuer cette difficulté en introduisant le point I et en ajoutant des questions intermédiaires.

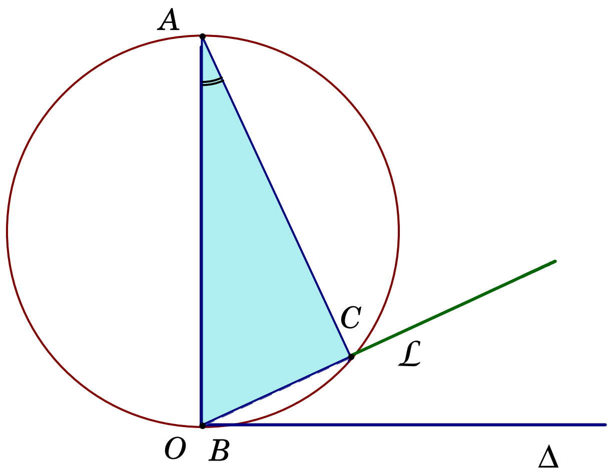
Mais l'intérêt de cet exercice ne réside pas dans le sens direct, mais dans le sens réciproque.

Etude expérimentale.

Un tracé à la main ou à la machine, permet vite de comprendre que toute la demi-droite n'est pas décrite. D'autre part, cet exemple recouvre un cas intéressant: l'un des points extrêmes du lieu $\mathcal{L}$, ne correspond pas à une situation extrême.







Une transposition du problème.

Si au lieu de se donner un triangle rectangle ABC on veut se fixer simplement une échelle $[AB]$ qui glisse sur les deux demi-droites, on peut remarquer que le choix du triangle ABC rectangle revient au choix d'un rapport $\rho = \dfrac{CB}{CA} = \tan\alpha$. Le problème a donc une formulation nouvelle:

Quand une échelle $[AB]$ glisse sur deux demi-droites perpendiculaires données, sécantes en O, quel est le lieu des centres des similitudes directes de rapport $\rho > 0$ fixé, d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui envoient A sur B?

Etude analytique complète.

Appelons h la longueur de l'hypoténuse. Les points A et B ont donc pour affixes respectives $z_A = h\cos(\theta)$ et $z_B = ih\sin(\theta)$, et le paramètre $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ s'interprète comme l'angle $\widehat{AOE}$ avec E le quatrième sommet du rectangle défini par les points AOB.

Le point C est d'affixe ζ, centre de la similitude directe qui envoie A sur B voir auparavant. Il est entièrement défini par l'équation suivante

$$\begin{aligned} \zeta - z_B &= i\rho\,(\zeta - z_A) \\ \zeta - h\cos(\theta) &= i\rho\,(\zeta + -ih\sin(\theta)) \\ \zeta &= \frac{h\,(\cos(\theta) + \rho\,\sin(\theta))}{1 - i\rho} \end{aligned}$$

Si l'on explicite ρ comme la tangente de l'angle α on trouve après simplification

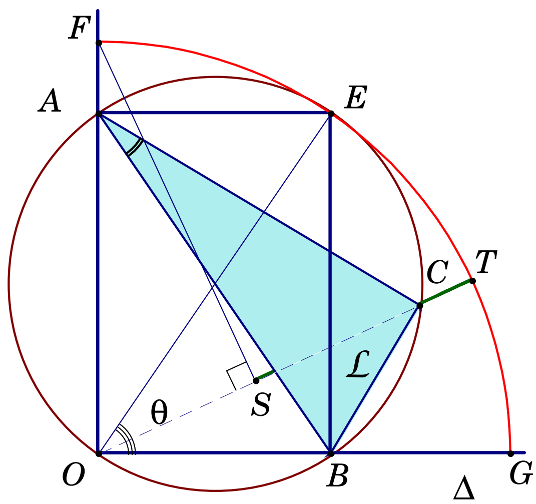
$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{h\cos(\theta - \alpha)}{\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)} \\ &= h\cos(\theta - \alpha)e^{i\theta} \end{aligned}$$

C'est donc la fonction $\varphi : \ \theta \mapsto \cos(\theta - \alpha)$ qui donne la position du point C sur la demi-droite

θ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi(\theta)$	$\cos\alpha$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sin\alpha$

Réciproque.

Une fois que pour une raison ou pour une autre on a compris qu'il était important d'introduire le point E quatrième sommet du rectangle défini par AOB, on remarque que E décrit le demi-cercle de centre O et de rayon AB. Le point E se projette sur la demi-droite support du lieu en C. On obtient donc $\mathcal{L}$ en projetant l'arc FG orthogonalement. On comprend alors géométriquement ce qui se passe. Seul l'une des situtations, E en F correspond à un point extrême, à savoir S.



Cinématique.

On a essayé de montrer comment le point E pouvait apparaître un peu naturellement. En fait seul un détour par la cinématique peut lui donner sa réelle importance. L'équerre ABC défini un mouvement *plan sur plan*. Dans ce mouvement, comme le point A (ou B) reste assujetti à une droite du plan fixe, on sait que le centre instantané de rotation Ω sera sur la perpendiculaire en A (*resp* B) à cette droite. Finalement le centre instantané de rotation est justement le fameux point E. La cinématique me dit aussi qu'alors la droite (EC) reste perpendiculaire au lieu $\mathcal{L}$ décrit par C, ce qui n'est pas un résultat géométrique bien profond. Mais cette présentation a le mérite d'introduire d'emblée le point qui donne une solution au problème.

Prolongements.

1. Construction de l'ellipse par la méthode dite de la *bande de papier.* Si un point est fixé sur l'hypoténuse du triangle, il va décrire un quart d'ellipse.
2. L'astroïde est la courbe enveloppe de l'échelle $[AB]$ qui glisse sur les deux droites.
3. Si l'on choisit de prendre un triangle ABC non nécessairement rectangle, tout ce qui a été dit du point E reste vrai si l'on conserve les demi-droites perpendiculaires. La droite (EC) reste normale au lieu $\mathcal{L}$ qui reste à trouver...