# Le triangle formé par trois points équidistribués sur les côtés d'un triangle équilatéral est aussi équilatéral, peut-on démontrer la proposition réciproque ?

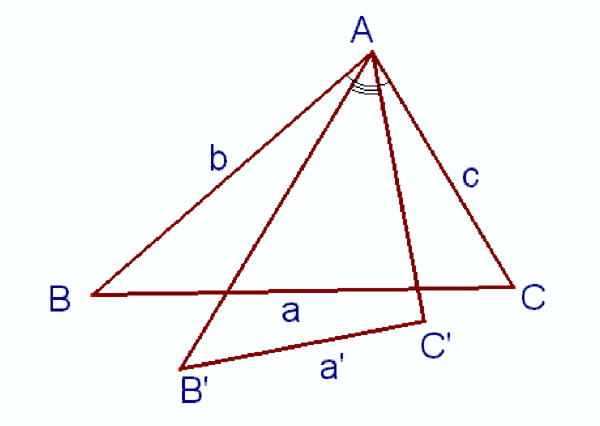
**Exercice préliminaire**

Dans un triangle triangle chacun des côtés est une fonction croissante de l'angle géométrique du sommet opposé.

Dans le triangle $(ABC)$ on a par exemple $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et $\alpha \in [0, \pi]$, une mesure de $\widehat{BAC}$. Si l'on laisse $b$ et $c$ fixé, on a par *Al Kashi*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

La croissance de la fonction $x \mapsto -\cos x$ sur $[0, \pi]$ prouve le résultat énoncé.




Les points $M$, $N$ et $P$ sont placés, sur les côtés du triangle $(ABC)$, à même distance de $A$, de $B$ et de $C$. Si le triangle $(MNP)$ est équilatéral, alors $(ABC)$ l'est aussi.

Reprenons les notations de l'exercice précédent, notons $d = AM = BN = CP$ et supposons, par exemple, que

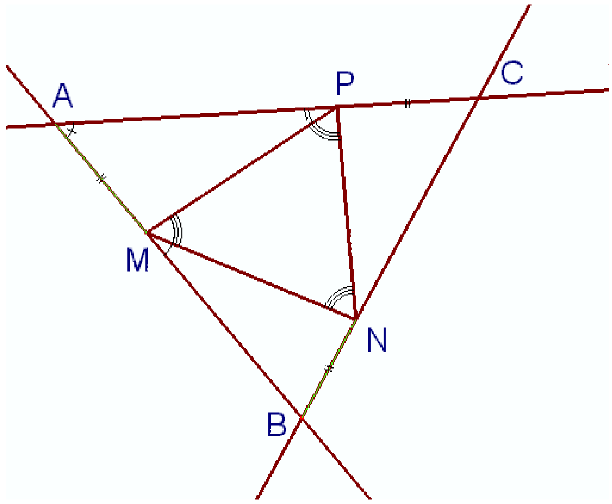
$$a \geqslant b \geqslant c$$

autrement dit

$$\textbf{(1)} \qquad \widehat{MAP} \geqslant \widehat{NBM} \geqslant \widehat{PCN}.$$

Appelons $\delta = MN = NP = PM$ la longueur du côté du triangle équilatéral central, on a évidemment

$$\textbf{(2)} \qquad \widehat{NMP} = \widehat{MPN} = \widehat{PNM} = \frac{\pi}{3}.$$




- Dans le triangle $(AMP)$ on a

$$\frac{MP}{\sin\widehat{MAP}} = \frac{AM}{\sin\widehat{MPA}}$$

c'est-à-dire

$$\sin\widehat{MPA} = \frac{d}{\delta}\sin\widehat{MAP}.$$

- de même dans les triangles $(BNM)$ et $(CPN)$ :

$$\sin\widehat{NMB} = \frac{d}{\delta}\sin\widehat{NBM}.$$

$$\sin\widehat{PNC} = \frac{d}{\delta}\sin\widehat{PCN}.$$

On tire donc de **(1)**

$$\textbf{(3)} \qquad \widehat{MPA} \geqslant \widehat{NMB} \geqslant \widehat{PNC}.$$

En additionnant membre à membre **(1)** et **(3)** on trouve

$$\widehat{MAP} + \widehat{MPA} \geqslant \widehat{NBM} + \widehat{NMB} \geqslant \widehat{PCN} + \widehat{PNC}.$$

Comme les trois termes de ces inégalités sont égaux aux angles extérieurs des triangles $(AMP)$, $(BNM)$ et $(CPN)$, on peut les réécrire ainsi :

$$\widehat{BMP} \geqslant \widehat{CNM} \geqslant \widehat{APN}.$$

En retranchant finalement $\frac{\pi}{3}$ à chaque membre on trouve

$$\textbf{(4)} \qquad \widehat{BMN} \geqslant \widehat{CNP} \geqslant \widehat{APM}.$$

Les inégalités **(3)** et **(4)** entraînent que $\widehat{MPA} \geqslant \widehat{PNC}$, et donc que la chaîne **(3)** est une chaîne d'égalités. Les chaînes **(1)** et **(2)** sont donc aussi des chaînes d'égalités et par conséquent le triangle $(ABC)$ est équilatéral.