Le triangle qui possède deux bissectrices de même longueur est isocèle.

Exercice préliminaire[1] **:**

Dans un triangle triangle ABC, la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ recoupe le côté $[BC]$ en D et le cercle circonscrit en I. On a

$$AB\,AC = AD^2 + DB\,DC.$$

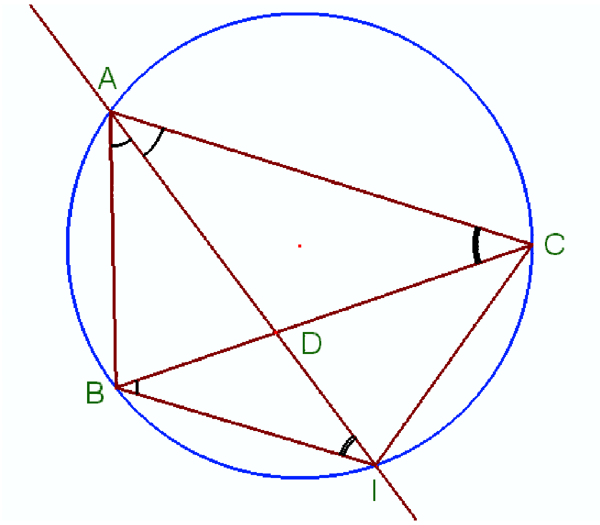
Les triangles (ADC), (BDI) et ABI sont semblables (angles inscrits égaux[a]). On a donc

$$\frac{DC}{DI} = \frac{DA}{DB} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AI}{AC}$$

d'où en utilisant d'abord la dernière égalité puis ensuite la première, comme $D \in [AI]$:

$$AB\,AC = AD\,AI = AD\,(AD+DI) = AD^2 + DB\,DC$$

[a] On peut remarquer que C et I par exemple sont toujours sur le même arc d'extrémités A et B



La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ recoupe, dans le triangle ABC, le côté opposé en D. Exprimer D comme barycentre des points B et C (on posera $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$).

[1] Ce résultat constitue le théorème de *Louis Bertrand* (1731-1812). Dans les *exercices de géométrie* de F-G.M (la 4ème édition, Tours, Mame, 1907), il est dit que *Louis Bertrand*, élève et ami d'Euler, prolongeant l'étude des bandes infinies d'Arnauld (1667), établit ce résultat. *Louis Bertrand* était en effet un disciple d'*Euler*, avec lequel il étudia plusieurs années à Berlin. Il devint professeur de mathématiques à l'Académie de Genève. Le lecteur qui trouverait le nom de l'auteur du livre sibyllin devra se rappeler que lorsqu'un Frère des Ecoles Chrétiennes écrivait un livre, son nom n'était pas mentionné, mais qu'on indiquait les initiales du Supérieur général en fonction. Par chance les dernières éditions ont été publiées à la fin des années 1910 sous les initiales du véritable auteur devenu Supérieur, F-G.M (Frère Gabriel-Marie *alias* Edmond Brunhes).

Nous avons reproduit pour cet exercice une démonstration extraite du théorème XXXIV du *cours de géométrie élémentaire de Combette* (1882). Elle est un peu différente de celle de *Bertrand* qui reposait sur le résultat préliminaire suivant :

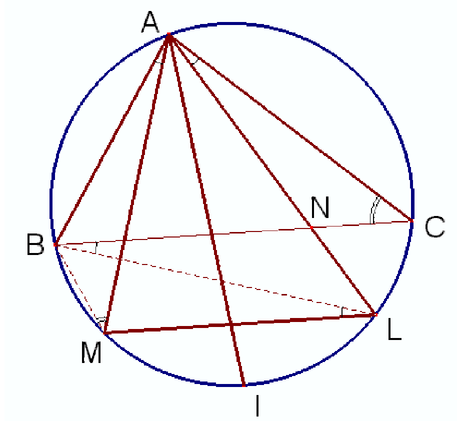
Si (ABC) et (AML) sont deux triangles inscrits dans un même cercle, et ont deux côtés parallèles alors (N désignant l'intersection de $[AL]$ avec $[BC]$)

$$AB.AC = AM.AN\ .$$

Si la parallèle est la tangente en I au cercle circonscrit à (ABC), (AI) est bissecrice intérieure et l'on obtient à la limite

$$AB.AC = AI.AD\ .$$

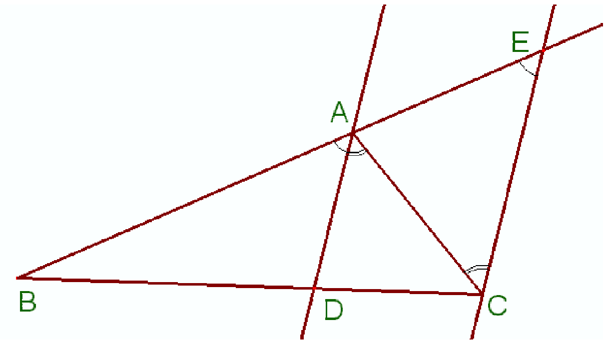
Il ne reste plus qu'à utiliser la puissance du point D par rapport au cercle pour conclure.



Puisque la bissectrice (AD) n'a pas la même direction que le côté (AB), la parallèle à la droite (AD) passant par C coupe (AB) en E. Les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{AEC}$, ainsi que $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ACE}$ sont deux à deux égaux (correspondants et alternes internes). Le triangle ACE est donc isocèle en A. On a donc

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = -\frac{c}{b}.$$

Le point D est barycentre du système $(B;b)$ $(C;c)$.



Une démonstration par les aires évite toute construction. Les triangles $(BAD$ et (DAC) on un angle égal, donc le rapport de leurs aires est $\frac{AB\,AD}{AD\,AC}$. Comme par ailleurs ils ont même hauteur ce rapport est égal à celui des base $\frac{BD}{BC}$ (même chose pour la bissectrice extérieure).

Calculer en fonction de $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$, la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ dans le triangle ABC.

D'après ce qui précède B est barycentre[a], du système $(D; -b-c)$ $(C; c)$. On a donc

$$-(b+c)\overrightarrow{BD} + c\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$$

donc

$$DB = \frac{ac}{c+b} \quad \text{et} \quad DC = \frac{ab}{c+b}.$$

Le théorème de Bertrand permet de conclure[b] :

$$AD^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

Variante : On peut commencer par démontrer la relation de Stewart[c].
Si (A, B, C) est un triplet de points alignés alors pour tout point M du plan on a :

$$\overline{BC}.\overrightarrow{MA} + \overline{CA}.\overrightarrow{MB} + \overline{AB}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

et appliquer cette formule, avec le triplet (B, I, C) et le point M pris en A.

---

[a] Pour retrouver ce résultat on peut bien sûr écrire les égalités vectorielles et utiliser la relation de Chasles. Mais le plus rapide et le plus clair est de faire appel à la notion d'équilibre. Pour une définition de la notion d'équilibre voir *Equilibres et barycentres associés, équilibres complexes, équilibres des l'espace*, Sinègre, Hamel, Le Hir, Lachaux, Irem de Rouen (R.69) 1989, ou plus récemment, *La beauté du calcul barycentrique vu par les équilibres*, Le Hir Gildas, bulletin de l'APMEP, n.424. p. 655-663, (APMEP) Paris, 1999.

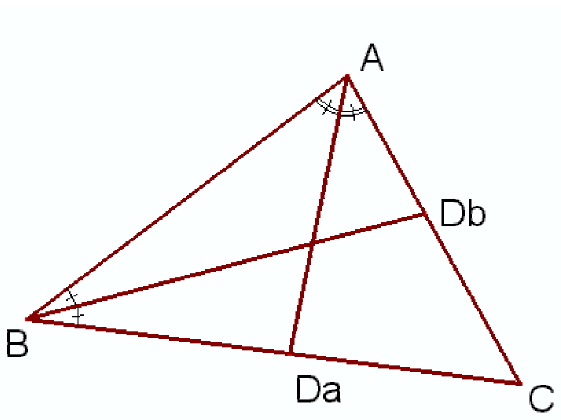
[b] On pourra en exercice, retrouver directement ce résultat à partir de l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{b+c}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right).$$

[c] On trouve dans le *Cours de Géométrie Plane*, première partie de M. Vasnier, 3ème édition, Paris, 1931, des applications de la relation de Stewart au calcul des "longueurs" de médianes ou d'autres segments. Ce cours de géométrie de M. Vasnier (ed. 1912, C13D) est disponible en http ://www.arts-et-metiers.asso.fr/index.php.

Un triangle qui a deux bissectrices isométriques est isocèle.

Dans le triangle (ABC) la bissectrice de l'angle en A (respectivement B) coupe le côté opposé en D_A et en D_B.
D'après l'exercice précédent (en faisant *tourner* les lettres...)



$$AD_A{}^2 - BD_B{}^2 = (bc - ac) - \left(\frac{a^2bc}{(b+c)^2} - \frac{ab^2c}{(a+c)^2}\right)$$

ou

$$AD_A{}^2 - BD_B{}^2 = c\left((b-a) - abc\left(\frac{a}{(b+c)^2} - \frac{b}{(a+c)^2}\right)\right)$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x}{(b+c)^2} - \frac{b}{(x+c)^2} \end{array}.$$

Un calcul : Le dénominateur $\Delta = (b+c)^2(a+c)^2$ de $f(a)$ est strictement positif. Quant au numérateur, il vaut

$$a^3 + 2a^2c + ac^2 - b^3 - 2b^2c - bc^2 = (a-b)\left(a^2 + 2ac + ba + b^2 + 2bc + c^2\right) = (a-b)N$$

avec N un réel strictement positif. On a donc

$$AD_A{}^2 - BD_B{}^2 = (b-a)c\left[1 + \frac{abN}{\Delta}\right]$$

quantité qui est nulle si et seulement si $b = a$.

un peu d'Analyse : Comme la dérivée de f vaut

$$f'(x) = \frac{1}{(b+c)^2} + 2\frac{b}{(x+c)^3}$$

f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et comme elle s'annule en b, on peut former le tableau de signe des deux termes qui forment

$$AD_A{}^2 - BD_B{}^2$$

a	0		b		$+\infty$
$(b-a)$	b	$+$	0	$-$	
$-abc\,f(a)$	0	$+$	0	$-$	

Ceci prouve que

$$AD_A = BD_B \quad \Longleftrightarrow \quad a = b$$

autrement dit, les longueurs des bissectrices sont égales, si et seulement si le triangle est isocèle.

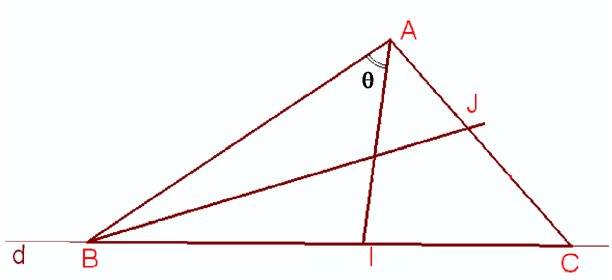
Une autre solution.

Le point de départ est une idée de Thierry Hamel. Si l'on montre que la longueur de l'une des bissectrices est une fonction (continue) strictement croissante, on pourra conclure grâce à un célèbre théorème d'Analyse de *Terminale*. Mais au pied du mur, on s'aperçoit que démontrer la monotonie de la longueur de la bissectrice n'est pas chose facile. On peut réussir en employant l'Analyse tout de suite...

Mise en oeuvre

On prend une droite d fixé, contenant I et un point A donné. Le segment $[AI]$ sera la première bissectrice (fixe) du triangle. A tout point B de la droite d correspond donc un point[a] C de la même droite telle que $[AI]$ soit la bissectrice de $\widehat{A}$ dans le triangle (ABC). On note J le pied de la bissectrice de $\widehat{B}$ dans le même triangle.
Le problème est donc le suivant : montrer que lorsque $\widehat{IAB}$ varie la fonction BJ est monotone.

[a]On construit C à l'intersection de l'image de (AB) dans la réflexion par rapport à (AI).



Démonstration.

On a construit deux configurations, correspondants aux points B_1 et B_2. On va supposer que B_1 est fixé, alors que B_2 varie. La parallèle à la bissectrice (B_2J_2) menée par B_1 coupe (AC_1) en H_1. La droite (B_2J_2) coupe, quant à elle, (AC_1) en H_2, et (B_1J_1) coupe (AC_2) en K_1.

Pour finir, notons $\theta = \widehat{B_1AI}$ et $\theta + h = \widehat{B_2AI}$.

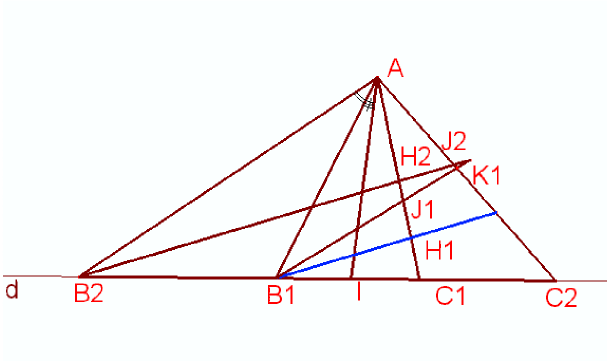
– Lorsque h tend vers 0, le point H_1 tend vers J_1. Le rapport k de la similitude de centre B qui envoie H_1 sur J_1 tend donc continuement vers 1.
– Si l'on suppose que $h > 0$, le point B_1 appartient au segment $[B_2I]$ et dans la configuration de *Thalès* $(C_1B_1H_1B_2H_2)$ on a facilement $B_1H_1 < B_2H_2$.
– Toujours puisque h est positif, le point H_2 appartient lui au segment $[B_2J_2]$.
– En regroupant les trois *item* précédents,

$$B_1J_1 = kB_1H_1 < kB_2H_2 = (k-1)B_2H_2 + B_2H_2.$$

Comme la quantité B_2H_2 est bornée, et $k-1$ tend vers 0, le terme $(k-1)B_2H_2$ tend vers 0. Dans le même temps, la fonction H_2J_2 elle tend vers $H_1K_1 > 0$. Il existe donc un voisinage de 0 pour h tel que $(k-1)B_2H_2 < H_2J_2$ et en revenant à l'inégalité précédente

$$B_1J_1 < (k-1)B_2H_2 + B_2H_2 \leqslant H_2J_2 + B_2H_2 = B_2J_2.$$

La fonction BJ est donc strictement croissante.



Conclusion.

Comme $\theta \mapsto BJ$ est strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0, +\infty[$, et il existe donc une unique configuration qui réalise l'égalité des bissectrices AI et BJ. Cette configuration correspond bien sûr au cas (donc unique) où le triangle est isocèle en C.