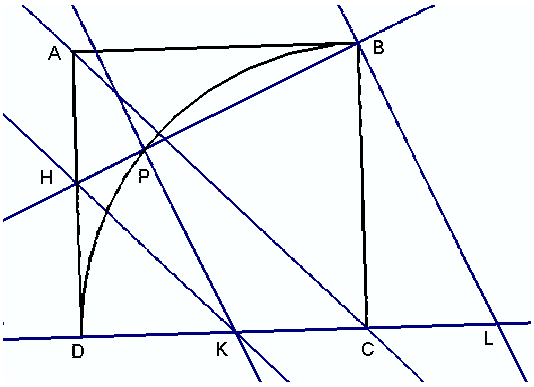
Comment construire un cercle sans compas ? Un exercice sur le carré.

Enoncé.

I. Le quadrilatère (A,B,C,D) **est un carré**.



Le point H est pris sur droite (AD) (sur $[AD]$). La parallèle à la droite (AC) passant par H coupe (CD), ($[CD]$) en K. Le point L est le symétrique de H par rapport à A. La parallèle à (BL) passant par H recoupe (BK) en P.

1. Trouver le lieu de P lorsque H décrit le segment $[A,D]$?
2. Trouver le lieu de P lorsque H décrit la droite (AD) ?

– Méthode synthétique.

On appelle respectivement $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ les symétries axiales d'axes (BD), (AB) ; $\mathfrak{S}$ transforme (B,C,K) en (B,A,H), $\mathfrak{S}'$ transforme (B,A,H) en (B,A,L). L'application $\mathfrak{S}' \circ \mathfrak{S}$ étant un quart de tour et transformant (BK) en (BL), (BK) et (BL) sont donc perpendiculaires et les droites (HP) et (BK) aussi. (On pouvait aussi remarquer : $(\widehat{BC,BK}) = (\widehat{BH,BA}) = (\widehat{BA,BL})$; comme $(\widehat{BC,BA}) = d$ on a : $(\widehat{BK,BL}) = d$).

Les points A,B,P,H sont cocycliques (sur le cercle de diamètre $[BH]$). Donc (Théorème de l'angle inscrit)

$$(\widehat{PH,PA}) = (\widehat{BH,BA}).$$

Si on note B' le symétrique de B par rapport à A, le triangle (B,H,B') est isocèle en H et donc par (*) le triangle (P,A,B') est isocèle en A. Ceci assure $AP = AB$ donc $P \in \mathcal{C}$, cercle de centre A et de rayon AB. Ceci nous donne de plus, puisque $[B,B']$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, $B'P$ et BP orthogonales donc les points P,H,B' sont alignés : *la droite (PH) passe par le point fixe B'*.

- Si H décrit le segment $[A,D]$ (cas i) : alors K décrit le segment $[C,D]$, P, étant à l'intérieur du carré, décrit le quart de cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BB']$ limité par B et D, points limites.

- Si la parallèle (HK) à (AC) décrit la droite (BD) (cas ii) : alors le lieu de P est inclus dans le cercle $\mathcal{C}$.

– Problème d'une réciproque lorsque H décrit la droite (AD).

Un point M étant pris sur $\mathcal{C} \setminus \{B'\}$, la droite $(B'P)$ coupe la droite (AD) en H, (BP) coupe (CD) en K, on vérifie aisément que (KH) et (AC) sont parallèles ainsi que $(B'P)$ et (BL). La position limite de $(B'P)$ quand P tend vers B' , en restant sur le cercle $\mathcal{C}$, est la tangente en B' à $\mathcal{C}$ qui, étant parallèle à (AD), coupe (AD) en un point *à l'infini*.

Conclusion : le lieu de P est le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BB']$ privé du point B', symétrique de B par rapport à A.

– Commentaire :

Une solution analytique est très abordable et a l'avantage de bien limiter le lieu des points P.

On considère la longueur du côté du carré égale à 1 et on se place par exemple dans le repère $(A, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AB})$. Une équation d'une parallèle à (AC) est $y = -x + \alpha$ (α décrivant $[-1, 1]$ dans le premier cas sinon $\mathbb{R}$).

Les coordonnés de P sont $\begin{cases} x = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \\ y = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \end{cases}$; soit en posant $\alpha = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ (θ décrivant $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cas i, sinon $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$) ; on obtient, avec ce paramétrage : $P \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$, ce qui donne immédiatement le résultat.

Le lieu de P est le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BB']$ privé du point B', B' correspondant à la position limite quand α tend vers $+\infty$.

Prolongement :

II. Le quadrilatère (A, B, C, D) **est un rectangle**.

Une affinité orthogonale d'axe la droite (AD) et de rapport $k = \frac{AD}{AB}$ transforme le rectangle (A, B, C, D) en le carré (A, B', C', D). L'ensemble des points P est alors, selon le cas, le quart d'ellipse ou l'ellipse de centre A et d'axes (AB) et (AD).

III. On pourrait poser une autre version de l'exercice :

Soit un losange (A, B, C, D) et B' le symétrique orthogonal de B par rapport à (AD). Le point H est pris sur la droite (AD). La parallèle à la droite (AC) passant par H coupe (CD) en K. Le point d'intersection de (BK) et $(B'M)$ est P.
Quel est le lieu de P quand H décrit (AD) ?