Construire des polygones connaissant les milieux des côtés.

Exercice

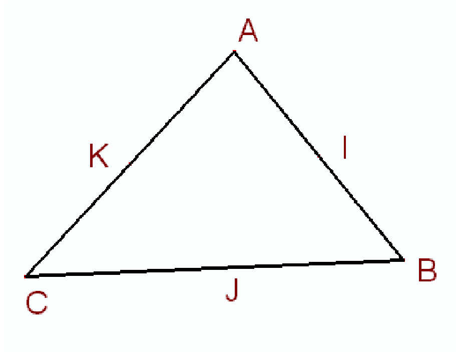
Construire un triangle ABC dont les milieux des côtés soient trois points donnés I J K deux à deux distincts.

Analyse :

La symétrie centrale de centre le milieu d'un segment échange les extrémités.
Dans un triangle ABC dont les milieux des côtés sont I J K on a donc, par exemple

$$(\mathfrak{S}_K \circ \mathfrak{S}_J \circ \mathfrak{S}_I)(A) = A.$$

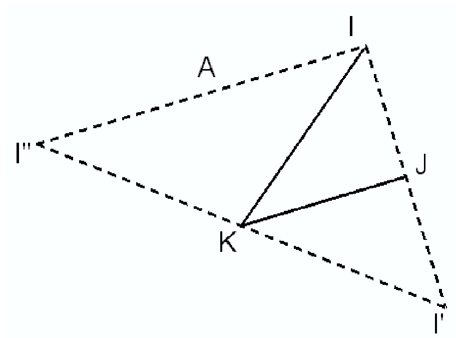
Comme le produit de trois symétries centrales est une symétrie centrale (en effet l'ensemble des symétries centrales et des translations est un sous-groupe du groupe affine, comme sous-ensemble des applications affines dont l'application linéaire appartient au sous-groupe $\{Id, -Id\}$ du groupe linéaire.) le point A est entièrement défini comme l'unique point fixe de $\mathfrak{S}_K \circ \mathfrak{S}_J \circ \mathfrak{S}_I$.



Construction :

Pour construire l'image du point A, il suffit donc de construire l'image d'un point quelconque du plan par la symétrie $\mathfrak{S}_K \circ \mathfrak{S}_J \circ \mathfrak{S}_I$. Par exemple

$$I \overset{\mathfrak{S}_I}{\longmapsto} I \overset{\mathfrak{S}_J}{\longmapsto} I' \overset{\mathfrak{S}_K}{\longmapsto} I''.$$



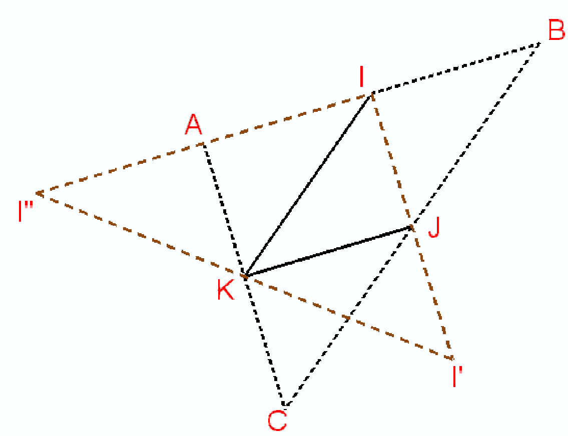
Le point A est le milieu de $[I, I'']$.

Synthèse : Sachant que $\mathfrak{S}_K \circ \mathfrak{S}_J \circ \mathfrak{S}_I = \mathfrak{S}_A$ on construit $B = \mathfrak{S}_I(A)$ et $C = (\mathfrak{S}_J \circ \mathfrak{S}_I)(A)$. On a donc

$$\mathfrak{S}_K(C) = (\mathfrak{S}_K \circ \mathfrak{S}_J \circ \mathfrak{S}_I)(A) = \mathfrak{S}_A(A) = A.$$

Ce qui montre que les points IJK sont bien les milieux du triangle ABC.

La solution existe et elle est unique.



Variantes :

– Tracer les parallèles aux côtés du triangle IJK passant par ses sommets.
– Montrer qu'on peut construire le triangle en translatant le point I du vecteur $\vec{KJ}$ pour obtenir B.

Exercice

Construire un quadrilatère $ABCD$ dont les milieux des côtés soient quatre points donnés $I\ J\ K\ L$ deux à deux distincts.

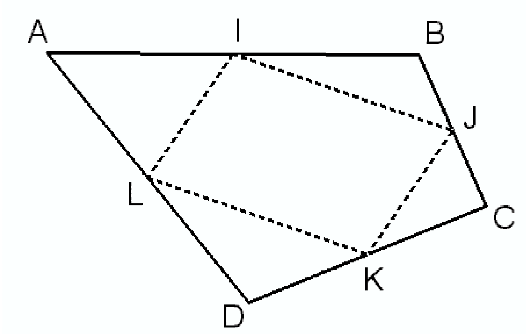
Solution

Analyse :

Dans un quadrilatère $ABCD$ dont les milieux des côtés sont $I\ J\ K\ L$ on a par exemple

$$(\mathfrak{S}_L \circ \mathfrak{S}_K \circ \mathfrak{S}_J \circ \mathfrak{S}_I)(A) = A.$$

Comme la composée de quatre symétries centrales est une translation une condition nécessaire est donc que cette translation soit l'identité.



Or

$$\mathfrak{S}_L \circ \mathfrak{S}_K \circ \mathfrak{S}_J \circ \mathfrak{S}_I = \mathrm{Id} \iff 2\mathfrak{T}_{\overrightarrow{IJ}} = \mathfrak{S}_J \circ \mathfrak{S}_I = \mathfrak{S}_K \circ \mathfrak{S}_L = 2\mathfrak{T}_{\overrightarrow{LK}}.$$

Une condition nécessaire est donc que le quadrilatère $(IJLK)$ forme un parallèlogramme.

Synthèse :

Si $(IJLK)$ est un parallélogramme, pour tout point A du plan on construit successivement $B = \mathfrak{S}_I(A)$, $C = (\mathfrak{S}_J \circ \mathfrak{S}_I)(A)$ $D = (\mathfrak{S}_K \circ \mathfrak{S}_J \circ \mathfrak{S}_I)(A)$. On a alors, compte tenu de l'équivalence de l'analyse qui précède, $\mathfrak{S}_L(D) = Id(A) = A$. Donc toutes les conditions imposées sont vérifiées, le quadrilatère $(ABCD)$ a pour milieux des côtés $(IJKL)$.

Une solution existe si et seulement si $(IJKL)$ est parallélogramme, et dans ce cas tout point du plan est sommet d'un quadrilatère admettant les points I, J, K, L comme milieux.

Exercice

Construire un polygone $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ dont les milieux des côtés soient n ($n \in \mathbb{N}^*$) points donnés $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$.

Solution

Compte tenu des exercices qui précèdent on peut écrire directement.

– Si n est donné impair, alors la composée $\mathfrak{S}_{I_n} \circ \ldots \circ \mathfrak{S}_{I_2} \circ \mathfrak{S}_{I_1}$ est une symétrie centrale dont l'unique point fixe est la solution A_1 du problème.
– Si $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) est donné pair, alors la composée $\mathfrak{S}_{I_n} \circ \ldots \circ \mathfrak{S}_{I_2} \circ \mathfrak{S}_{I_1}$ est une translation. Il existe donc des solutions si et seulement si cette translation se réduit à l'identité, autrement dit si et seulement si

$$\mathfrak{S}_{I_n} \circ \mathfrak{S}_{I_{n-1}} \circ \mathfrak{S}_{I_{n-p+1}} \circ \cdots \mathfrak{S}_{I_p} \circ \ldots \circ \mathfrak{S}_{I_2} \circ \mathfrak{S}_{I_1} = Id$$

Cette condition est équivalente à la condition vectorielle suivante

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\overrightarrow{I_{2k-1}I_{2k}}}{2} = \vec{0}.$$

ou encore en introduisant Ω un point quelconque du plan

$$\sum_{k=1}^{p} \vec{\Omega I_{2k}} = \sum_{i=k}^{p} \vec{\Omega I_{2k-1}}.$$

En résumé si n est impair, il existe une unique solution, si n est pair tout point du plan convient à condition que les systèmes de points $(I_{2k})_{1\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}$ et $(I_{2k-1})_{1\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}$ aient même isobarycentre.

Exercice

Etant donnés n complexes fixés $(a_1, a_2, \dots a_n)$ résoudre dans $\mathbb{C}^n$ le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} z_1 & + & z_2 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & 2a_1 \\ & & z_2 & + & z_3 & + & \cdots & + & z_n & = & 2a_2 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & & = & \vdots \\ & & & & & \cdots & z_{n-1} & + & z_n & = & 2a_{n-1} \\ z_1 & & & & & & & + & z_n & = & 2a_n \end{array}\right.$$

Solution

On appelle I_k les points d'affixes a_k et A_k les points d'affixes z_k. Les équations du système à résoudre traduisent la situation géométrique suivante : les points I_k sont milieux des segments $[A_k, A_{k+1}]$, avec la convention que I_n est le milieu de $[A_n A_1]$. Résoudre le système revient donc à construire un polygone de sommets A_k connaissant les milieux des côtés. Ce problème a été résolu à l'exercice précédent. On trouve donc la même solution avec la même discussion.

– Si n est impair, le système possède une unique solution.
– Si n est pair le système possède des solutions si et seulement si l'équation vectorielle la dernière équation de l'exercice précédent est satisfaite, c'est-à-dire si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{p} \vec{\Omega I_{2k}} - \sum_{i=k}^{p} \vec{\Omega I_{2k-1}} = \vec{0}.$$

En prenant Ω au centre du repère on peut donc écrire que le système possède des solutions si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (a_{2k} - a_{2k-1}) = 0.$$

Variante : Résoudre directement le système en utilisant les formules de Cramer ou la méthode du pivot de Gauss.

Prolongement

Trouver les polygones $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ dont les milieux des côtés sont points notés $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) pour lesquels il existe une similitude directe de centre Ω qui envoie les points A_k sur les points I_k pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Solution

Analyse :

Si cette similitude de centre Ω existe, considérons le point Ω comme centre du repère du plan complexe. Notons z_k l'affixe de A_k et a_k celle de I_k comme dans l'exercice précédent. L'écriture complexe de la similitude qui envoie les sommets du polygone sur les milieux, permet d'écrire qu'il existe un complexe ζ tel que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad z_k + z_{k+1} = 2\zeta z_k \quad \text{et} \quad z_n + z_1 = 2\zeta z_n.$$

Ceci qui revient à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} z_1 & + & z_2 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & 2\zeta z_1 \\ & & z_2 & + & z_3 & + & \cdots & + & z_n & = & 2\zeta z_2 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & & = & \vdots \\ & & & & & \cdots & z_{n-1} & + & z_n & = & 2\zeta z_{n-1} \\ z_1 & & & & & & & + & z_n & = & 2\zeta z_n \end{array}\right.$$

Si on introduit la matrice définies par les membres de gauche du système précédent :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & & 1 & 1 \\ 1 & & \ddots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système de conditions donne

$$P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots z_n \end{pmatrix} = 2\zeta \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots z_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit la valeur $2\zeta - 1$ est une valeur propre de la matrice $P - Id_n$.

Comme le polynôme caractéristique de $P - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & & 0 & 1 \\ 1 & & \ddots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est proportionnel à $X^n - 1$,

on détermine ζ par l'équation

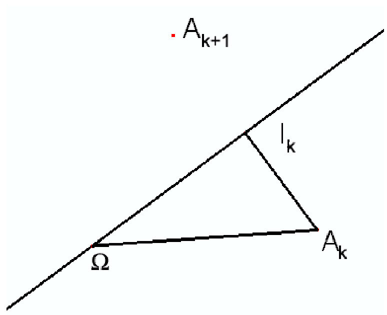
$$(2\zeta - 1)^n = 1.$$

Si l'on note ω la racine $n$ième primitive de 1 $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ on a donc pour $j \in [\![1, n-1]\!]$

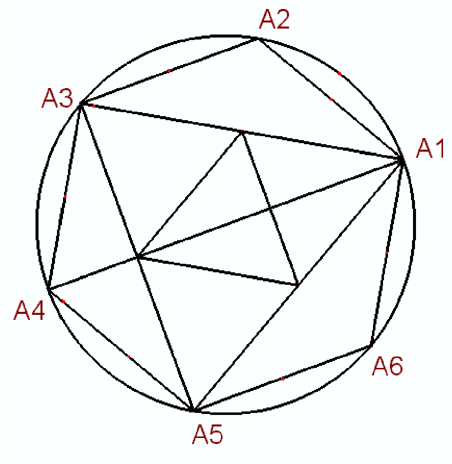
$$\zeta = \frac{\omega^j + 1}{2} = e^{\frac{ij\pi}{n}} \frac{e^{\frac{ij\pi}{n}} + e^{\frac{-ij\pi}{n}}}{2} = e^{\frac{ij\pi}{n}} \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right).$$

Compte tenu de la valeur de l'angle de la rotation, pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$ le triangle $A_k \Omega I_k$ est rectangle, et donc par symétrie, $\Omega A_k = \Omega A_{k+1}$.

La seule solution est constituée par les polygones réguliers de centre Ω, $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A_k}, \overrightarrow{\Omega A_{k+1}}}) = \frac{2j\pi}{n}$



Par exemple, si $n = 6$ on trouve l'hexagone régulier $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ et les milieux des côtés, hexagone associé à la similitude directe d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$; on trouve aussi l'hexagone dégénéré $A_1A_3A_5A_1A_3A_5$, parcouru deux fois et associé à la similitude directe d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$; l'hexagone complètement dégénéré $A_1A_4A_1A_4A_1A_4$ qui est parcouru trois fois est exclu car dans ce cas le rapport de la similitude est nul.



De même si $n = 5$ on trouve le pentagone régulier $A_1A_2A_3A_4A_5$ et les milieux des côtés, associé à la similitude directe d'angle $\frac{\pi}{5}$ et de rapport $\cos\frac{\pi}{5}$, mais aussi le pentagone $A_1A_3A_5A_2A_4$ associé à la similitude directe d'angle $\frac{2\pi}{5}$, et $A_1A_4A_2A_5A_3$, et $A_1A_5A_4A_3A_2$...