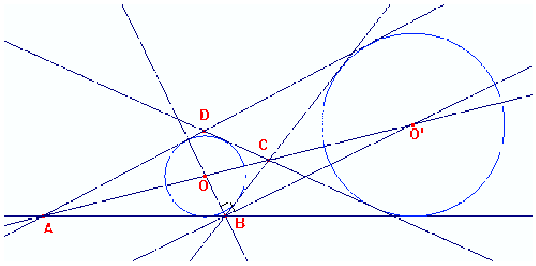
Construire les triangles connaissant trois bissectrices .

Analyse : ***des conditions nécessaires***

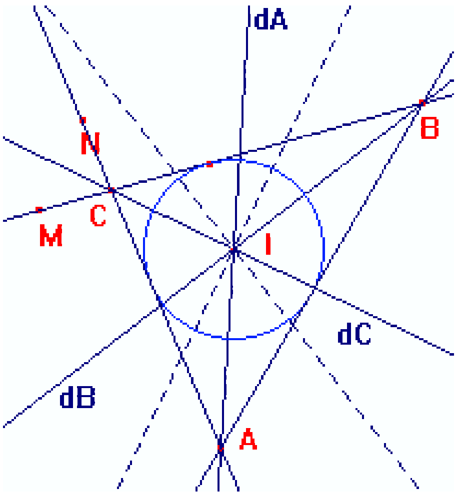


Considérons le triangle ABC. Soient d_A , d_B et d_C trois bissectrices respectivement en A , B et C (nous traçons trois droites). Sur la figure ci-contre, nous avons tracé les bissectrices intérieures.

Il faut que ces trois bissectrices soient concourantes ; soit I leur point commun ; on peut tracer le cercle inscrit ou exinscrit (I).

•**Comparaisons d'angles** : Nous appelons A, B et C les angles du triangle ABC.

$*$ Lorsque (I) est inscrit (figure ci-dessus), **il faut** que les trois angles $\widehat{AIB}$, $\widehat{BIC}$ et $\widehat{CIA}$ soient obtus : par exemple, en écrivant la somme des angles du triangle AIC, $\widehat{AIC}$ = 1 droit + $\frac{1}{2}\widehat{B}$. L'angle $\widehat{B}$ n'est pas nul , donc les droites (IA) et (IC) ne peuvent pas être perpendiculaires.
Il en est de même pour (IA) et (IB), et pour (IB) et (IC).



$*$ Lorsque (I) est exinscrit, par exemple dans l'angle $\widehat{A}$ du triangle, en écrivant la somme des angles du triangle ABI, $\widehat{AIB} = \frac{1}{2}[\Pi - (\widehat{A} + \widehat{B})] = \frac{1}{2}\widehat{C}$; l'angle $\widehat{C}$ n'est pas plat, donc les droites (IA) et (IB) ne peuvent pas être perpendiculaires.

Enfin, en écrivant la somme des angles du triangle BIC, $\widehat{BIC}$ = 1 droit + $\frac{1}{2}\widehat{A}$, donc les droites (IB) et (IC) ne peuvent pas être perpendiculaires.

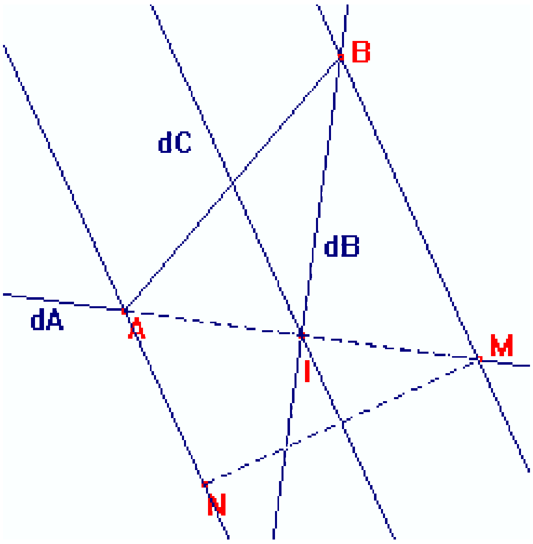
En conclusion, les trois droites (IA), (IB) et (IC) ne peuvent être perpendiculaires deux à deux.

•**En composant deux réflexions** :

$*$ Soit M le point symétrique de A par rapport à d_B , puis N le point symétrique de M par rapport à d_C. Par symétrie, M appartient à (BC) et N appartient à (AC).

Synthèse

•*Construction* :



Soient d_A, d_B et d_C trois droites concourantes en I, et A un point quelconque de d_A, distinct de I. D'après l'étude ci-dessus, il est justifié de supposer que ces droites dont deux à deux non perpendiculaires.

Le point N construit comme il est dit ci-dessus, à partir de A, permet de tracer la droite (AN) qui coupe d_C en C ; soit B l'intersection de la droite d_B avec (CM).

Notons dès à présent que, avec un autre point A' sur d_A, la figure est homothétique de la précédente dans une homothétie de centre I : s'il existe une solution, il en existe une infinité.

•**La figure ainsi obtenue convient** :

Dans la mesure où la figure est constructible (c'est-à-dire où les intersections B et C existent), en utilisant les deux symétries,

- CMN est isocèle en C, donc (CI) est l'une des bissectrices de l'angle $\widehat{ACB}$ ou de son supplément ;
- ABM est isocèle en B, donc (BI) est l'une des bissectrices de l'angle $\widehat{ABC}$ ou de son supplément ;

Ainsi I est le centre de l'un des quatre cercles tangents aux côtés du triangle ABC.

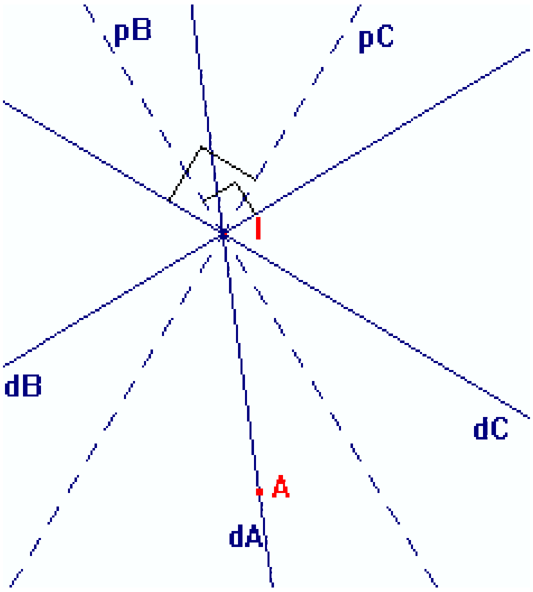
A étant choisi, le point B et le point C, s'ils existent, sont uniques.

•**L'unicité de la solution (à une homothétie près)** :

Un triangle ABC étant obtenu à partir d'un point A de d_A, si l'on reprend le même type de construction à partir de B ou de C, on obtient le même triangle ABC.

En effet, dans chacune des symétries utilisée, l'image appartient à l'un des côtés du triangle déjà construit.

•La nature du cercle (I) tangent aux trois droites (AB), (BC) et (CA) :

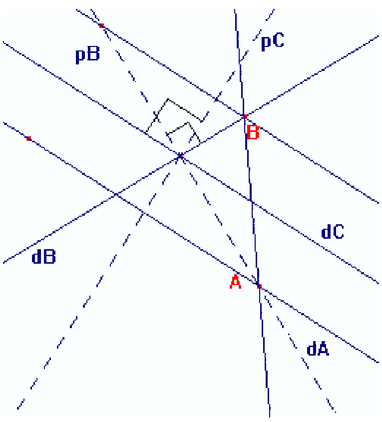


L'analyse faite à propos des angles nous conduit à tracer la droite p_B perpendiculaire en I à d_B et la droite p_C perpendiculaire en I à d_C . Sans nuire à la généralité de la discussion, le point de départ est A, point de la droite variable d_A. Notre discussion est faite suivant la position de A dans le plan.

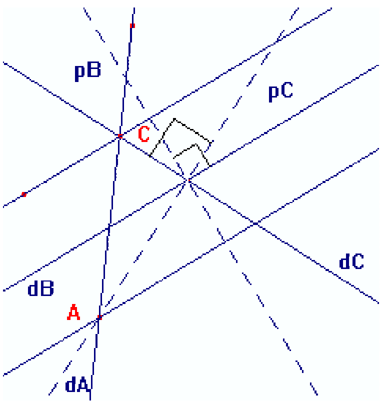
Les numéros renvoient aux figures présentées en fin d'article.
Le cas où $d_B \perp d_C$ est à mettre à part : $I = B = C$ (figure 3).
Le logiciel CABRI est bien utile pour parcourir rapidement les différents cas .

Le point A	**est**	**résultat**
sur p_B	(figure 1)	C n'existe pas
sur p_C	(figure 2)	B n'existe pas
à l'intérieur de l'un des angles aigus de p_B et de p_C	(figure 4)	(I) est inscrit dans le triangle ABC
à l'intérieur de l'un des	et dans un angle aigu de p_B et de d_C (fig 5)	(I) est exinscrit dans l'angle $\widehat{C}$
angles obtus de p_B et de p_C	et dans un angle aigu de d_C et de d_B (fig 6)	(I) est exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$
	et dans un angle aigu de d_B et de p_C (fig 7)	(I) est exinscrit dans l'angle $\widehat{B}$

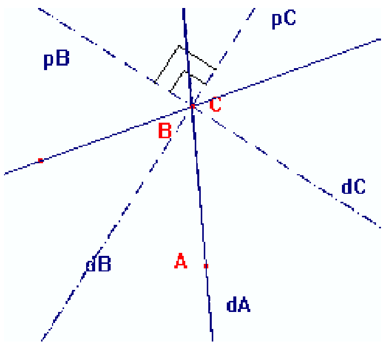
•Les trois cas où deux des trois droites sont perpendiculaires :



lorsque $d_A \perp d_B$, C n'existe pas



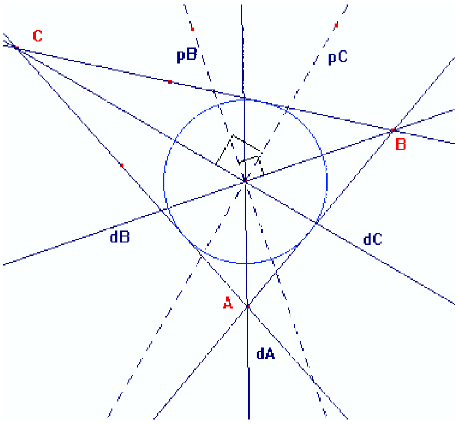
lorsque $d_A \perp d_C$, B n'existe pas



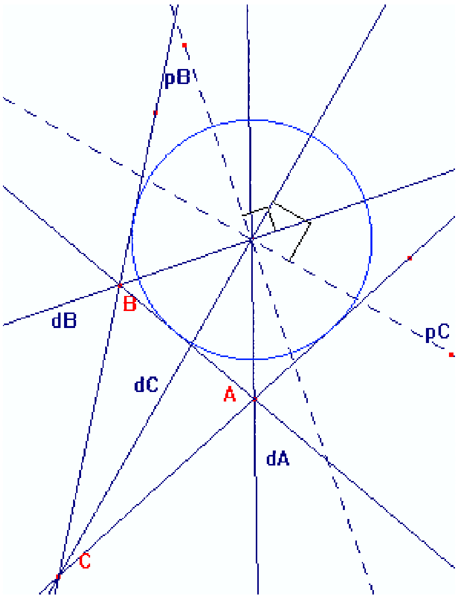
lorsque $d_B \perp d_C$, $I = B = C$.

(la différence entre le cas de la figure 3 et les deux autres résulte du choix initial de A : nous dirons aussi que le triangle n'existe pas)

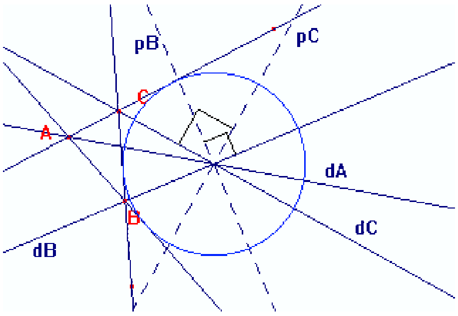
•Les quatre cas non triviaux :



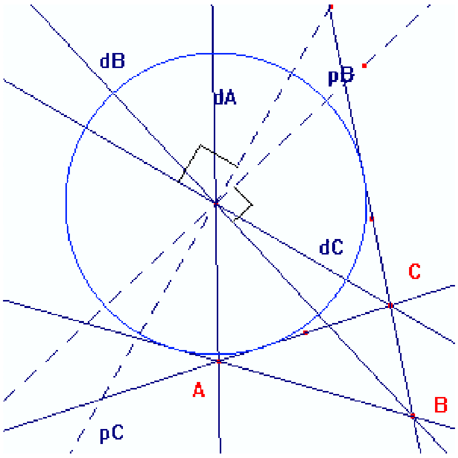
(I) est inscrit.



(I) est exinscrit dans l'angle $\widehat{C}$.



(I) est exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$.



(I) est exinscrit dans l'angle $\widehat{B}$.

•En conclusion.

Pour commencer la construction du triangle ABC, nous avons bien été obligés de placer a priori un des trois sommets (nous avons choisi le point A).

Il n'y a jamais au plus qu'une solution à une homothétie près de centre I. En plaçant d'abord A, les différents cas dépendent de la position de ce point par rapport à deux des droites d_B, d_C, p_B et p_C.