# Un cerf-volant articulé.

A l'origine, nous sommes partis d'un texte de Hadamard[1] :

*" Un quadrilatère ABCD (rhomboïde) est tel que deux côtés adjacents AD, AB sont égaux, ainsi que les deux autres côtés CB,CD. Prouver que ce quadrilatère est circonscriptible à deux cercles. Trouver les lieux décrits par les centres de ces cercles lorsque le quadrilatère est articulé, un des côtés restant fixe. "*

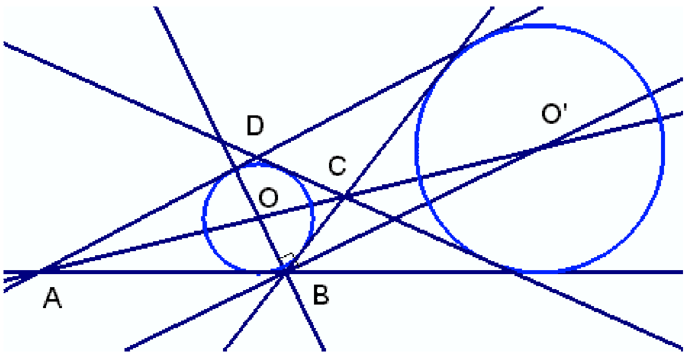
Supposons que le côté fixe est "$AB$", c'est-à-dire que les points $A$ et $B$ sont fixes.
L'hypothèse d'articulation suppose que les quatre côtés ont des longueurs données. Posons donc $AB = AD = a$ et $CB = CD = b$.

*L'étude des cercles tangents aux quatre côtés n'est pas la même selon qu'il s'agit de droites ou de segments. Nous proposons donc deux interprétations distinctes pour le problème.*

## I- Lorsque les cercles sont tangents aux droites $(AB)$, $(BC)$, $(CD)$ et $(DA)$.

Puisque $AB = AD$ et $CB = CD$, la droite $(AC)$ est axe de symétrie du quadrilatère $ABCD$, et en particulier bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$ et de l'angle $\widehat{DCB}$ .

1. **Construction des centres** :




**analyse** : <u>il faut</u> que les centres appartiennent à la droite $(AC)$, axe de symétrie et <u>il faut</u> que les centres appartiennent à l'une des deux bissectrices de l'angle $\widehat{ABC}$.

– Si $a \neq b$ , les deux bissectrices coupent $(AC)$ ; il y a donc deux points d'intersection $O$ et $O'$.
– Si $a = b$, $ABCD$ est un losange et la bissectrice extérieure est parallèle à $(AC)$, donc $O'$ n'existe pas.

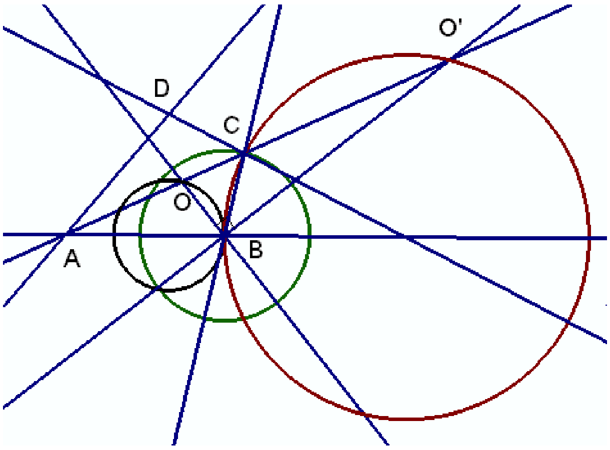
**synthèse** : *les deux conditions ci-dessus sont suffisantes. En effet*, pour $O$, soit $(O)$ le cercle de centre $O$ et tangent à $(AB)$ :
– d'une part, $(O)$ est tangent à $(BC)$ car $(OA)$ est bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ ;
– d'autre part, dans la symétrie d'axe $(AC)$, $(O)$ est aussi tangent aux droites $(DC)$ et $(DA)$.
Le raisonnement est le même pour $(O')$, cercle de centre $O'$ et tangent à $(AB)$, lorsque $O'$ existe.

2. **Pour conjecturer le lieu géométrique de $O$ et de $O'$ avec CABRI** :

*lieu auxiliaire* : Soient $AB = a$ et $BC = b$. Le cerf-volant est articulé, donc $C$ a pour lieu le cercle $(B;b)$.

Note : *CABRI trace la bissectrice intérieure ; la bissectrice extérieure lui est perpendiculaire.*

[1]Leçons de Géométrie élémentaire, Géométrie plane, Paris Colin 1947, page 302 N° 384, rééd. Gabay 1988, première édition 1898.




Si $a \neq b$ , lorsque $C$ décrit le cercle $(B, b)$, CABRI affiche pour les lieux de 0 et de $0'$ deux cercles qui passent par $B$

3. **Le lieu géométrique de $O$.**
   Avec le théorème de la bissectrice,

$$\frac{OA}{OC} = \frac{BA}{BC} = \frac{a}{b} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{AO}{AC} = \frac{a}{a+b}.$$

   Le lieu géométrique de $O$ est donc inclus dans un cercle $\Gamma$ homothétique du cercle $(B;b)$ par une homothétie de centre $A$ et de rapport $\frac{a}{a+b}$
   *Réciproquement* : à tout point $\Omega$ de $\Gamma$ correspond un cerf-volant $ABCD$ dont $\Omega$ est le centre d'un cercle tangent aux quatre côtés.
   *En effet*, soit $C$ l'intersection de $(A\Omega)$ et du cercle $(B, b)$ telle que $\Omega$ soit entre $A$ et $C$, et $D$ le point symétrique de $B$ par rapport à $(AC)$. Le point image de $C$ par l'homothétie, $\Omega$, s'identifie avec le centre du cercle tangent à $(AB)$, $(BC)$, $(CD)$ et $(DA)$.

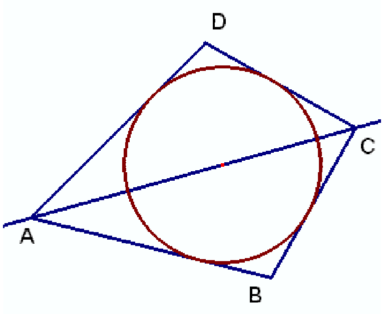
   Note : la première relation ci-dessus engendre $b.\overrightarrow{OA} + a.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$, donc $O$ est le barycentre du système $\{(A;b);(B;a)\}$.

4. **Le lieu géométrique de $O'$** $(a \neq b)$ : l'étude est analogue avec l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\frac{a}{a-b}$ ; on peut noter que ce rapport est positif si $a > b$ et négatif si $a < b$ .

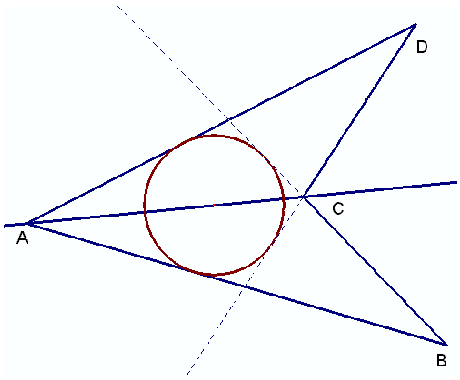
## II- Lorsque le cercle est inscrit dans le quadrilatère ABCD .

C'est-à-dire que le cercle est tangent aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, et $[DA]$ . Nous ne nous intéressons donc qu'au cercle de centre 0.

1. **Cerf-volant ou fer de lance** ?
   Dans le même esprit que certains auteurs, nous distinguons les deux objets :




cerf-volant $ABCD$
(figure convexe)

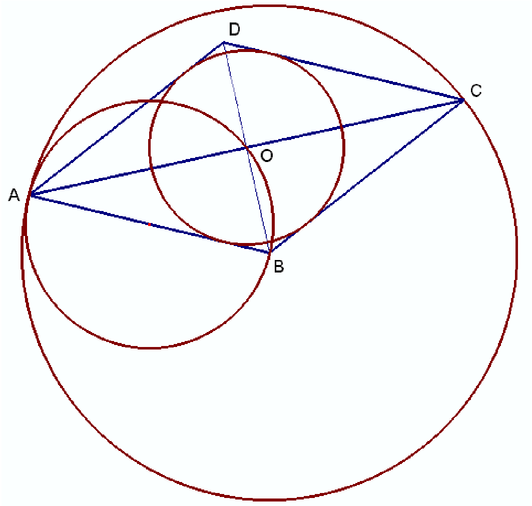



fer de lance $ABCD$
(figure concave)

Dans l'exemple de fer de lance ci-dessus, le cercle tangent aux quatre droites est à l'intérieur de l'angle opposé par le sommet à l'angle $\widehat{BCD}$ ; il n'est pas tangent aux segments $[CB]$ et $[CD]$.

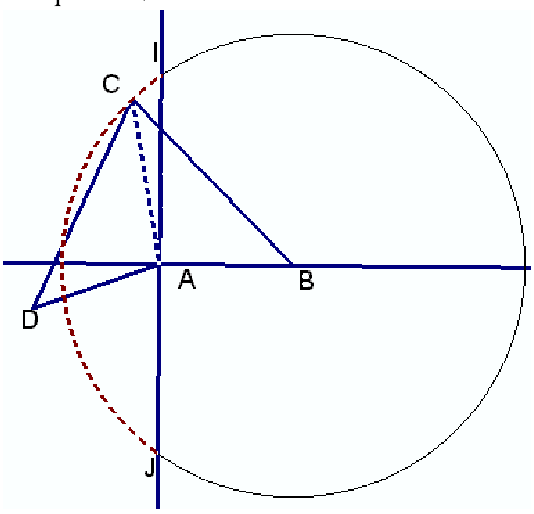
2. **Le nouveau problème qui se pose ainsi est donc de rechercher pour quelles positions de $C$ sur le cercle $(B;b)$ le quadrilatère $ABCD$ est convexe.**
La solution dépend de la nature des angles en $A$ ou en $C$ du quadrilatère $ABCD$, saillants ou rentrants. Nous traitons d'abord le cas où $a = b$ .

   (a) Cas particulier :




si $a = b$, $ABCD$, qui est un losange, est un quadrilatère convexe. Le lieu de $O$ est le cercle de diamètre $[AB]$ en entier, si l'on admet les cas où $ABCD$ est aplati. A noter que le rapport de l'homothétie est $0,5$ ; ce qui est bien conforme au résultat général.

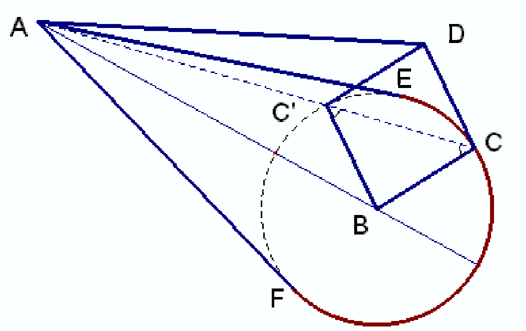
   (b) Lorsque $a < b$ :




La perpendiculaire à $(AB)$ en $A$ coupe le cercle $(B;b)$ en $I$ et en $J$. Appelons $(B)$ celui des deux arcs d'extrémités $I$ et $J$ tel que l'angle $\widehat{BAC}$ soit aigu ($\widehat{BAC} < \widehat{BAI}$) ; $\widehat{BAD} = 2\widehat{BAC}$, donc $\widehat{BAD}$ est saillant et $ABCD$ est un cerf-volant. Sinon $ABCD$ est un fer de lance (voir la figure ci-contre).

Le lieu de $C$ est l'arc de cercle $(B)$ ; d'après l'étude du I-, celui de $O$ est l'homothétique de $(B')$ par l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\frac{a}{a+b}$. Noter qu'ici, ce rapport est inférieur à $0,5$.

   (c) Lorsque $a > b$ :

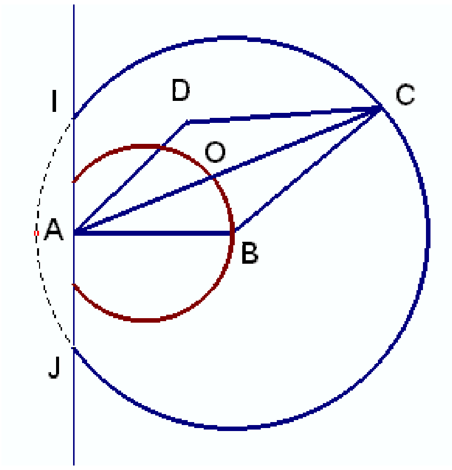



Soient $E$ et $F$ les points de contact des tangentes au cercle $(B;b)$ issues de $A$. Appelons $(B')$ celui des deux arcs d'extrémités $E$ et $F$ tel que l'angle $\widehat{BCA}$ soit aigu , et $C'$ le second point d'intersection de $(AC)$ avec le cercle $(B;b)$ ?

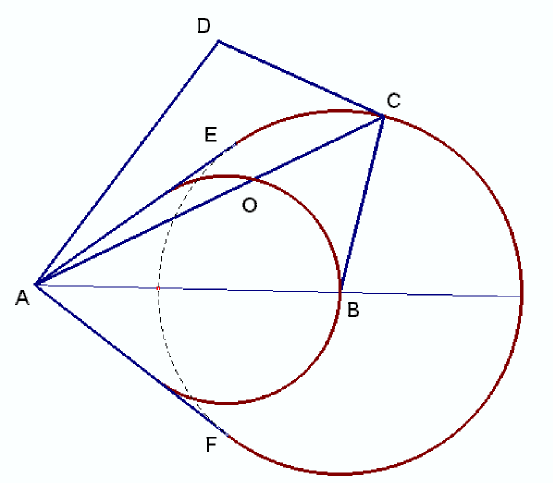
Dans le triangle $BCC'$, les angles en $C$ et $C'$ sont aigus, et par suite l'angle $\widehat{BC'A}$ est obtus. Ainsi, avec $D$ symétrique de $B$ par rapport à $(AC)$, $ABCD$ est un cerf-volant et $ABC'D$ est un fer de lance.

Le lieu de $C$ est l'arc de cercle $(B')$ ; d'après l'étude du I, celui de $O$ est l'homothétique de $(B)$ par l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\frac{a}{a+b}$ . Noter qu'ici, ce rapport est supérieur à $0,5$.

**En conclusion** : Pour les cas $a < b$ et $a > b$, on peut réaliser avec CABRI le lieu de $O$ tel que le cercle $(O)$ est inscrit dans $ABCD$.

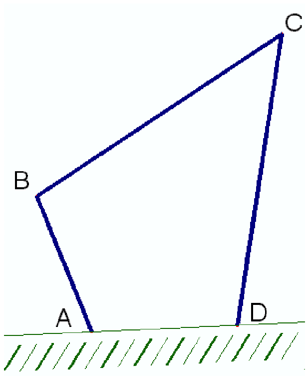



lieu de $C$ et de $O$ lorsque $a < b$




lieu de $C$ et de $O$ lorsque $a > b$

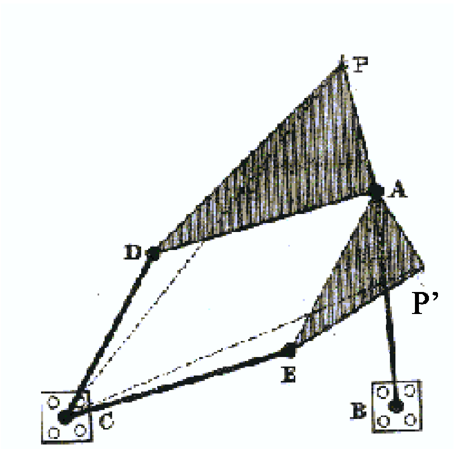
## III- Le cerf-volant et les mouvements articulés.




Mettre en mouvement un *cerf-volant*, autrement dit *articuler un trois barres*, c'est faire tourner, autour d'une barre fixe $AD$, deux *manivelles* $AB$ et $DC$ reliées par une *bielle* $BC$.
*Kempe* raconte que c'est en cherchant à déterminer le mouvement d'un point de la bielle, en fonction de celui d'un point de la manivelle[a] que s'est posé le problème du *plagiographe.*

[a]On appelle ainsi l'une des tiges réliée à un point fixe.

En effet, en effectuant l'échange de la bielle[2] et de la manivelle, Kempe[3] se ramène l'étude d'un parallélogramme articulé.

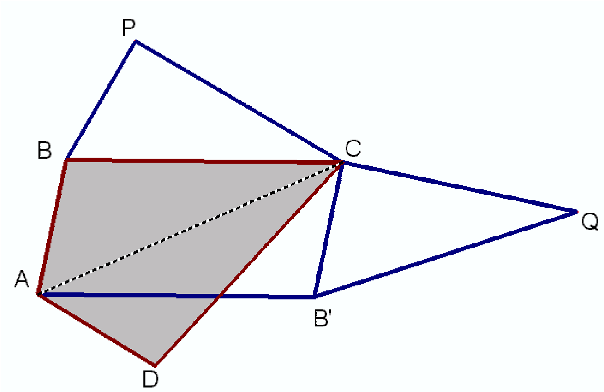



Or quand on articule un parallélogramme $(CEAD)$, avec deux manivelles $CD$ et $BA$, le mouvement du point $P'$ solidaire de la barre $AE$ se déduit du mouvement du point $P$ sur la barre $AD$ par une similitude.

[2]La bielle est la tige qui relie deux manivelles.
[3]Kempe (Alfred. Bray). *How to draw a straight line. A lecture on linkages* (1877).

Cette remarque est à la base de la construction de l'appareil[4].

Pour comprendre l'intérêt d'échanger les barres on peut considérer l'exemple suivant. On a construit sur le côté $BC$ d'un rhomboïde $ABCD$ une plaque $BCP$. On cherche la trajectoire du point $P$ lorsque le rhomboïde se déforme (les points $B$ et $D$ décrivent donc un cercle de rayon fixé autour de $A$ qui reste fixe).




En effectuant l'échange des bielles et des manivelles on construit un parallélogramme $(AB'CB)$, qui porte sur son côté $B'C$ un triangle $CB'Q$ semblable à $PBC$. Comme le mouvement du contre-parallélogramme $AB'CD$ est connu, on connaît la nature de la courbe décrite par $Q$ (une quartique bicirculaire). Comme $Q$ est l'image de $P$ par une similitude on connaît aussi le mouvement de $P$.

[4]le *plagiographe* généralise le *pantographe* du père *Scheiner* (1631). *Kempe* explique avoir fait cette découverte en même temps que *Sylvester*. Il associe ce mécanisme dans ses leçons sur les articulations à des inverseurs pour transformer des mouvements circulaires en mouvements rectilignes.
On pourra voir aussi Vivien Frédéric, Hamel Thierry, Sinègre Luc. *Les systèmes articulés et la géométrie des transformations* , Actes du colloque (inter-irem premier cycle de Montpellier, *quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental* (Irem), 2004
ou aussi Hamel Thierry, Sinègre Luc, Vivien Frédéric *Le mouvement rectiligne à la croisée des mathématiques et des techniques.* dans "Instruments scientifiques à travers l'Histoire", sous la direction d'Elizabeth Hébert, Paris, Ellipses, 2004.