Enseigner les nombres négatifs au collège

Groupe Didactique des mathématiques- IREM d'Aquitaine –AMPERES-INRP

A. Berté - C.Desnavres - J.Chagneau - J.Lafourcade - L.Conquer - M.C.Mauratille- C.Sageaux - D.Roumilhac

Nous ne disons pas qu'il s'agit d'enseigner les nombres relatifs mais plutôt les nombres négatifs. L'expression « nombres relatifs » pourrait laisser croire que nous nous limitons aux entiers et que nous allons introduire des nouveaux entiers aussi bien positifs que négatifs. Dans les classes de 5ème et 4ème les élèves connaissent assez bien les décimaux. Le professeur peut commencer à introduire seulement les entiers négatifs, puis passer progressivement aux décimaux négatifs qui viennent compléter les décimaux déjà connus et permettre la mise en place des opérations dans l'ensemble des décimaux. Il s'agit de confondre dès le début les décimaux positifs avec les nombres connus et d'adjoindre simplement les nouveaux nombres négatifs.

Ceci étant notre point de départ, il s'agit maintenant de savoir quelle(s) question(s) poser aux élèves pour donner du sens à l'apprentissage.

Sommaire

I. Quel contexte choisir pour poser la question ?

1) Un contexte « concret »

La notion de nombre négatif semble familière car nos élèves rencontrent ces nombres dans leur environnement proche et dans la vie courante du moins pour les entiers (températures, chronologie en histoire, ascenseurs .... etc..).
Dans quelle mesure le professeur peut-il s'appuyer sur ces connaissances culturelles pour fonder un enseignement des entiers relatifs ?

Examiner l'histoire de la pensée est utile avant d'enseigner les nombres négatifs à double titre :

- pour préciser les obstacles dans la construction du concept : les difficultés ont été nombreuses et l'émergence des nombres négatifs en tant que nombres à part entière a été longue et difficile. La référence à un modèle concret s'est révélée être un obstacle à la compréhension de ce qu'est un nombre négatif.
- pour chercher comment introduire les nombres négatifs en 5ème par une tâche mathématiquement significative donnée aux élèves

a) Les obstacles épistémologiques[1]

i) <u>Premier obstacle :</u> donner du sens à des quantités négatives isolées et les manipuler

Les nombres négatifs sont apparus dès le premier siècle en Chine (époque des Han) pour les besoins de la comptabilité avec la manipulations de jonchets, en couleur pour les nombres positifs, et remplacés par des jonchets noirs dès que les négatifs apparaissent. Jusqu'au XVIIIe siècle en Europe, on ne parle pas de «nombres négatifs» mais de «quantités négatives».
Les nombres ne peuvent être que positifs, et les quantités négatives sont définies par opposition aux quantités positives.

Carnot (1753-1823) dit : « Pour obtenir une quantité négative isolée, il faudrait retirer une quantité effective de zéro, quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ? » et il conclut : « L'usage des nombres négatifs conduit à des conclusions erronées.»

ii) <u>Deuxième obstacle :</u> renoncer au zéro absolu et unifier la droite numérique en y plaçant un zéro commun aux positifs et aux négatifs

Comme on l'entend dans la phrase de Carnot, un deuxième obstacle vient interférer avec le premier : l'obstacle du zéro absolu en dessous duquel il n'y a rien. On décrit la droite comme la juxtaposition de deux demi- droites opposées portant des symboles hétérogènes, avec des signes (–) du côté des négatifs et sans signes du côté des positifs.

---

[1] Sources : - *Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs* Anne Boyé « IREM de Nantes. »
- *Recherches en Didactique des mathématiques*- Epistémologie de nombres relatifs- Georges Glaeser- Vol 2-N° 3-1981

En géométrie analytique Descartes s'arrange pour choisir les axes de façon à n'avoir que des points dont les coordonnées sont positives. Il faudra attendre le XVIIIe siècle pour que Maclaurin, et surtout Euler, expliquent comment l'on peut prendre des coordonnées négatives.

On manipule peu de quantités négatives pour les sciences. En 1715, Fahrenheit conçoit un thermomètre qui évite les températures négatives. En 1741 Celsius (1701-1744) fait construire son thermomètre à mercure avec 0° pour la température de solidification et 100° pour la température d'ébullition de l'eau, mais il faudra attendre le début du XIXème siècle pour qu'il entre dans les mœurs.

iii) <u>Troisième obstacle :</u> vouloir donner un sens concret aux êtres numériques

Pendant des siècles, les nombres négatifs apparaissent comme auxiliaires de calcul. De ce fait les mathématiciens reconnaissent bien les négatifs comme des nombres mais ils en ont une pratique « clandestine » qui précède de loin leur compréhension. Ainsi les énoncés et les solutions des problèmes ne comportent que des nombres positifs.

Le perse Al Khwarizmi (780-850) accepte les termes négatifs dans les équations mais il s 'en débarrasse au plus vite.
Les nombres négatifs apparaissent en Occident par la résolution d'équations.

- Chuquet (1445-1500) est le premier à isoler une quantité négative dans l'un des membres d'une équation.
- Cardan (1501-1576) est un des premiers à admettre l'existence de solutions négatives.
- En 1591, Viète (1540-1630) pose les bases du calcul littéral, mais les lettres ne représentent que des quantités positives et les solutions négatives des équations ne sont pas admises.
- Presque jusqu'au XXe siècle, lorsqu'on aboutit à une solution négative, on conseille de réécrire le problème de manière à l'éviter.

iv) <u>Quatrième obstacle :</u> impossibilité de trouver un modèle concret unifiant permettant d'illustrer à la fois les deux opérations, addition et multiplication

Clairaut (1713-1765) exprime dans « Eléments d'algèbre » la nuance entre le signe d'un nombre et celui de l'opération addition ou soustraction.
Ainsi progressivement les règles de calcul sur les nombres négatifs vont se mettre en place mais la règle de multiplication de deux nombres négatifs pose de nombreuses difficultés. En effet pour la cohérence des calculs il y a nécessité d'admettre que le produit de deux négatifs est positif, mais cette règle heurte le bon sens.

Stendhal dans son autobiographie (1835) écrit[2]
[….] « supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000, cinq millions de francs ? »

[2] Vie d'Henry Brulard – Stendhal- Edition Gallimard -1973

Carnot, exprime son incompréhension en disant qu'il n'est pas possible que :
$\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$ ou que $(-3)^2>2^2$ car il veut conserver quelques idées reçues, à savoir

- qu'un nombre (-1) divisé par un plus grand que lui (1) ne peut donner le même quotient que le grand (1) divisé par le petit (-1)
- que le carré d'un nombre (-3) ne peut être supérieur au carré d'un nombre plus grand (2)

Ce rapide examen de l'histoire de la pensée mathématique montre entre autres faits que le modèle concret, sous la forme « gain- dette » par exemple pourra constituer une aide pédagogique pour l'addition mais il peut devenir un obstacle pour enseigner la multiplication.

Les nombres négatifs doivent acquérir pour nos élèves le statut de nombres, et nous ne pouvons pas leur laisser parcourir le long chemin historique pour arriver à cela. Une transposition didactique est nécessaire.
En mathématique, pour nos élèves de 5ème un nombre c'est tour à tour

- ce qui sert à compter des objets (il s'agit des entiers positifs, conception en principe dépassée avec l'apprentissage réussi des décimaux positifs)
- ce qui sert à mesurer des longueurs, conception valable pour les décimaux positifs mais à dépasser puisque dire « une mesure –1 est plus petite qu'une mesure +1 » n'a pas de sens
- ce qui sert à graduer une demi-droite, que nous allons transformer en droite entière
- ce qui sert à calculer

Le contexte du repérage sur une droite et des déplacements sur la graduation est très près du modèle « gains et pertes » dont nous venons de parler et donc certainement porteur du même obstacle à la multiplication. Examinons-le plus en détail.

b) Le contexte de la droite orientée et des déplacements sur une graduation[3]

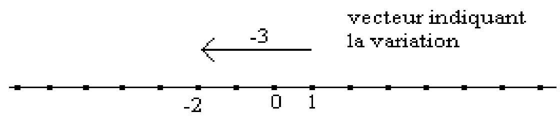
Dans les nombreux contextes concrets que nous pouvons utiliser avec nos élèves (recettes et dépenses, gains et pertes, températures, altitudes, chronologie, ascenseurs, avancer et reculer), le nombre relatif peut avoir deux significations différentes.

- <u>un état :</u> il fait –3°C ou l'année de naissance d'un personnage est –50 av JC.
- <u>une variation :</u> la température a baissé de 3°C ou l'ascenseur est descendu de 3 étages.

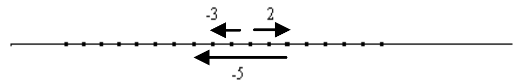
De même dans le contexte de repérage sur une droite un nombre relatif peut traduire des situations différentes.

[3] Nous avons trouvé un bon appui avec le travail de l'IREM de Poitiers dans Suivi scientifique Cycle central- Tome 1

Dans ce premier calcul : $1+(-3)=-2$
les nombres ont des significations différentes
1 et (–2) sont des repères, (-3) est la mesure
algébrique d'un déplacement orienté



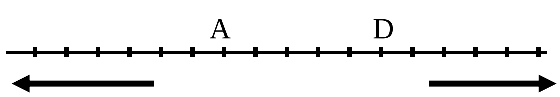
Dans ce deuxième calcul : $2+(-5)=-3$
les nombres relatifs ont la même signification.
Ce sont des mesures algébriques de déplacements.



Avec deux nombres « repères » comme les températures aucune opération n'est possible.
Nous avons observé un élève incapable de faire une addition car il avait pour seule image mentale des relatifs un repère sur une graduation. Il allait chercher mentalement tour à tour le premier terme puis le deuxième terme de la somme sans pouvoir faire aucune opération avec ces repères inertes.

Pour introduire l'addition, n'est-il pas préférable de travailler seulement avec des variations afin de privilégier les situations dans lesquelles les significations des deux nombres sont les mêmes ?
Ainsi il n'y a pas de confusions possibles pour les élèves.

Dans ses travaux Gérard Vergnaud[4] a montré à propos des problèmes additifs qu'il est difficile pour un enfant de se représenter une situation où deux transformations sont composées pour en former une troisième, et de calculer le bilan, alors que l'on ne connaît pas la valeur de l'état initial. Effectivement il semble raisonnable de ne pas placer des élèves de l'école élémentaire, devant ce genre de question, du moins dès le CE1 quand ils commencent à travailler sur de petits problèmes résolus par une addition ou une soustraction. Nos observations en début de 6ème ont confirmé que certains avaient encore quelques difficultés mais tout à fait franchissables pour eux à cette époque de leur développement, encore mieux au niveau de la 5ème où se place l'introduction des relatifs.



On peut alors représenter les variations sur une droite graduée sans marquer l'origine, seulement le départ (D) et l'arrivée (A). Mais cela constitue un usage non familier de la droite graduée, nécessitant, s'il est introduit, un apprentissage spécifique.

Introduire l'addition par ces contextes pose donc des problèmes.

- Le signe + traduit une succession de déplacements ou un bilan.

Pourquoi ces situations se traduisent-elles par une addition ? Pourquoi cette opération ?

---

[4] Vergnaud G. :
- *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques*, Grand N n°38, novembre 1986
- *Question de représentation et de formulation dans la résolution des problèmes mathématiques*, Annales de didactique et des sciences cognitives, Strasbourg, 1988

- Pour effectuer cette addition, il faut faire parfois une addition arithmétique et parfois une soustraction arithmétique.

Pourquoi parle t-on dans les deux cas de l'addition des nombres relatifs ?

Enfin des contextes concrets cités plus haut font obstacle à l'introduction de la multiplication de deux négatifs comme l'a montré l'histoire de la pensée. C'est aussi vrai pour nos élèves.

Nous avons observé dans une classe lors de l'enseignement de la multiplication une élève qui refusait absolument d'admettre que **Erreur ! Des objets ne peuvent pas être créés à partir des codes de champs de mise en forme.**. Pour elle le résultat était (–15) avec la justification suivante : « si je descends trois fois 5 marches, je descends 15 marches, donc je suis bien à –15 ». Le professeur lui disait : « mais non, trois fois c'est +3 » , et elle répondait : « mais non c'est –3 puisque c'est 3 fois en descendant ! »

C'est ainsi qu'une image mentale forte « monter descendre » ou « avance recule » devient un énorme obstacle à la multiplication. L'image mentale sera d'autant plus forte qu'elle viendra de l'enseignant qui, dans le souci louable de bien faire comprendre l'addition, aura par exemple mis en scène un déplacement « avance- recule » avec des élèves se déplaçant sur une ligne tracée dans la classe, ou un pion se déplaçant sur une droite tracée au tableau.

2) Un contexte interne aux mathématiques

Dans une introduction mathématique « moderne » basée sur les structures, les nombres entiers aussi bien positifs que négatifs sont de nouveaux êtres notés par exemple (+3) ou (–2).
Dans l'écriture (+3) + (–2), les deux signes + n'ont pas le même statut,

- le premier est le signe du nombre positif 3
- et le deuxième est un signe d'addition,

et de même pour le signe – dans (+3)-(-2).
Le plongement de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, avec $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$ vient ensuite.

Dans une introduction plus conforme au cheminement historique, nous pouvons faire apparaître les nombres négatifs comme des objets utiles à introduire dans un calcul pour le simplifier ou nécessaires pour résoudre des équations. Dans ce cas les négatifs vont apparaître seuls comme nouveaux nombres, au détriment d'une cohérence de notation dans l'ensemble des nombres. Il y aura toujours des difficultés de notation et d'écriture, notamment signe opératoire et signe prédicatoire notés de la même façon avec passage de l'un à l'autre, et on ne peut pas éviter ces difficultés.

Nous devons maintenant formuler la question de départ qui va permettre d'introduire ces nouveaux êtres mathématiques. Les questions suivantes découleront ensuite d'une interrogation fondamentale : ces objets sont-ils vraiment des nombres, c'est à dire peut-on les ajouter, les comparer, les soustraire, les multiplier, les diviser ?

Nous avons examiné deux types de questions de départ à poser aux élèves.

a) Première possibilité

Le professeur demande aux élèves de résoudre des équations comme cela se fait en 5ème à partir de la définition de la différence :

38 + …. = 83   438 + … =   8 + … = 58   9 + … = 7

Les élèves seront conduits à trouver pour la dernière équation la solution $(7-9)$.

Ils vérifieront que cette solution convient en admettant que :

$$9+(7-9)=(9+7)-9=16-9$$

prolongeant ainsi la propriété suivante qui est conjecturée naturellement par les élèves :

si b >c   on peut écrire $(a+b)-c=a+(b-c)$.

Il faut admettre qu'il en va de même pour b < c.

Les élèves pourront compléter aussi l'égalité 9 + … = 7 par (6–8) ou (0–2)

Toutes ces écritures représenteront le même objet que l'on notera (-2) et qui va acquérir avec les questions suivantes le statut de nombre.

b) Deuxième possibilité

Le professeur pose par exemple aux élèves plusieurs calculs comme 1243 + 34 –35 =
ce qui peut certes se calculer par (1243 + 34) – 35, mais se calculera plus vite en comprenant que retrancher 34 et ajouter 35 revient à retrancher 1.

Le professeur peut alors conduire les élèves à interpréter ceci de deux façons :

i) Action de deux variations, considérées comme des opérateurs additifs

On interprète ce calcul de la façon suivante, on part d'un état 1243 sur lequel on fait agir deux variations, considérées comme des opérateurs additifs (+34) et (-35) dont la succession équivaut à l'opérateur (-1). Dans ce cas le nouvel objet introduit, la succession de deux opérateurs, apparaît comme un opérateur additif.

Plus tard, la multiplication des opérateurs additifs entre eux ne va-t-elle pas soulever le même obstacle que les contextes concrets de « gains et pertes » ou de translation sur un axe évoqués plus haut ?

ii) Le calcul peut se faire simplement

Le calcul peut se faire simplement car

$$(1243 +34) – 35 = 1243 +(34 – 35) = 1243 + (0 –1) = 1242$$

L'égalité 34 – 35 = 0 – 1 résulte d'une propriété de la soustraction que nous étendons à ces nouvelles opérations dont le premier terme est plus petit que le deuxième.

On aurait le même résultat si le calcul de départ était 1243 +37 – 38 = 1243 +(37 – 38) = 1242

Nous avons introduit un nouveau nombre, que nous ajoutons à 1243, ce nombre est le résultat des soustractions (34 –35)= (37–38) = (0–1) que l'on notera (-1). On aboutit à

$$1243 + (-1) = 1243 - 1$$

Avec cette interprétation, on retrouve l'égalité $(a+b)-c=a+(b-c)$ que l'on prolonge au cas où b < c.

Dans l'option i) le professeur évite l'usage des parenthèses, certes. Mais à notre avis il introduit un obstacle didactique à la multiplication que l'introduction des négatifs dans un contexte interne aux mathématiques avait justement pour but d'éviter. Dans l'option ii) admettre cette égalité anticipe sans doute sur la manipulation des parenthèses dans les sommes de nombres relatifs, mais de toutes façons ce sera une propriété admise à un certain moment. Il ne nous semble pas choquant de l'admettre tout de suite. Le signe + et le signe – restent opératoires sauf tout à la fin où on transforme 0 – 1 en (–1) , ce qu'il faudra bien admettre plus tard. Les élèves restent ainsi dans le cadre des opérations entre des nombres ayant le même statut, sans en transformer certains, notamment les nouveaux introduits, en opérateurs additifs.
Le travail qui suit, sur les opérations avec des nombres négatifs, consistera à prolonger les propriétés des opérations, associativité, commutativité, élément neutre de l'addition et de la multiplication, et distributivité.

iii) Conclusion

Aucun mode d'introduction ne peut à lui seul, permettre d'atteindre tous les buts recherchés et il y aura nécessairement des obstacles à franchir et des difficultés. Néanmoins il semble raisonnable :

- de prendre de la distance par rapport aux contextes concrets de façon à donner un statut de nombres aux négatifs.
- de veiller lors de l'introduction des négatifs à ne pas créer inutilement des obstacles didactiques qui se révèleraient lors de la mise en place des règles de l'addition et surtout de la multiplication.

D'où nos choix didactiques qui en résultent :

3) Nos choix didactiques

En accord avec l'orientation générale ci-dessus et en examinant les différents contextes d'utilisation des nombres négatifs, précisons nos choix didactiques.

a) Donner aux négatifs un statut de nombre

Pour donner aux négatifs un statut de nombre, nous introduisons très vite dans cet ensemble des opérations connues déjà avec les positifs. Nous disons aux élèves quelles sont les propriétés de ces opérations que l'on voudrait conserver dans un nouvel ensemble qui contiendra aussi les nombres positifs qu'ils connaissent.

b) Introduction des nombres négatifs par la résolution d'équations

En conséquence nous avons prévu une introduction des nombres négatifs par la résolution d'équations, de sorte que l'addition arrive en même temps, tout en restant dans un contexte interne aux mathématiques et en justifiant les résultats sur des exemples. Le lien entre des résultats que l'on aura justifiés et des situations concrètes de gain et de perte sera fait en fin de séquence, car il ne s'agit pas de nier leur intérêt dans la construction du sens des nombres négatifs. Les placer en fin de séquence nous paraît meilleur pour éviter les obstacles en permettant aux élèves de concevoir d'abord les négatifs comme des nombres abstraits.

c) Prolongement de la structure de l'ensemble des nombres positifs

Pour bien faire comprendre pourquoi on prolonge la structure de l'ensemble des nombres positifs et pour éviter une coupure entre les nombres positifs déjà connus et ces nouveaux nombres, les négatifs, le professeur n'introduit pas d'écriture du type (+3). Cette écriture est proposée par les élèves eux-mêmes pour le nombre 3 par opposition avec (-3).
Les écritures (+3) et 3 sont ainsi présentées dès le départ comme deux écritures d'un même nombre.

Le signe + garde le seul statut opératoire. Cela évite des exercices de « simplification d'écriture », qui font que les élèves ne savent plus reconnaître que (+2) + (+3) ..... c'est tout simplement 2 + 3 !
Certains manuels et professeurs expliquent aux élèves qu'une écriture comme (-2) + (+4) se remplace par –2 + 4 , obtenue en enlevant les parenthèses et le signe opératoire +, ce qui apporte des confusions abyssales car il n'y a plus le signe opératoire de l'addition !

Limiter la difficulté à savoir manipuler les trois statuts du signe - nous semble raisonnable!

d) Situation traitée en classe

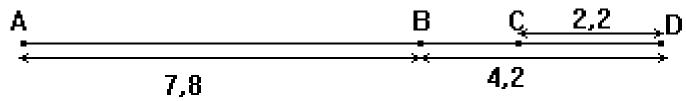
Il est indispensable qu'avant la leçon d'introduction des négatifs, une situation soit traitée en classe pour manipuler l'égalité $(a+b)-c=a+(b-c)$.

Nous suggérons ceci :
Cette étape n'est pas nécessairement à faire juste avant l'introduction des nombres relatifs, mais plutôt dans un des thèmes précédents, le thème concernant l'organisation des calculs par exemple.

Margot va à la librairie, elle achète deux articles : un cahier à 2,75 € et un livre à 8,25 €. Le libraire lui fait une réduction de 0,50 € sur le prix du livre. Calculer le prix total que Margot doit payer de deux façons différentes et pour chaque façon, écrire les calculs sur une seule ligne.

Lors de la mise en commun, le professeur écrit au tableau l'égalité suivante :

$$2{,}75 + (8{,}75 – 0{,}50) = (2{,}75 + 8{,}25) – 0{,}50$$



Calculer la longueur AC de deux façons différentes et pour chaque façon, écrire les calculs en une seule ligne.

La mise en commun aboutit à l'égalité : (7,8 + 4,2) – 2,2 = 7,8 + (4,2 – 2,2)

Les deux égalités étant au tableau, le professeur demande aux élèves d'écrire d'autres égalités du même type avec des nombres de leur choix pour s'assurer qu'ils ont bien repéré la structure commune à ces deux égalités. Puis il demande aux élèves de formuler la propriété commune à toutes ces égalités. Ils auront beaucoup de mal à le faire avec une phrase car ici il ne s'agit pas de traduire une procédure. Il s'agit de traduire l'égalité de deux formules qui diffèrent par leur structure. Le fait que les élèves n'arrivent pas à formuler la règle par une phrase va leur permettre de voir l'intérêt de l'usage des lettres comme ils l'auront peut-être déjà vu pour traduire la distributivité.

Bilan : Etant donnés trois nombres a,b et c quelconques, les deux expressions suivantes sont égales : $(a+b)-c=a+(b-c)$

Le professeur pourra proposer des calculs du type 1248 + 39 – 37 ; 2569 + 47 – 46 ; ….
Les nombres 39 – 37; 47 – 46 ; …. restant positifs.

4) Conclusion

Nous avons fait le choix d'une introduction utilisant un contexte interne aux mathématiques et cela n'a pas empêché les élèves de manifester leur motivation pour l'apprentissage des nombres négatifs.

Nous pensons que nos élèves sont capables de comprendre que des nombres sont des concepts abstraits, qu'ils ont des propriétés définies à l'intérieur des mathématiques, indépendamment de leur interprétation dans un modèle concret quelconque.

Nous n'avons pas pour autant procédé à une symétrisation de l'ensemble des entiers naturels car nous n'avons pas construit l'ensemble des entiers relatifs, mais étendu l'ensemble de tous les nombres positifs que les élèves connaissaient déjà.

II. Détail de séquences en classe pour l'introduction des relatifs en $5^{ème}$

Nous avons décidé d'introduire les nombres relatifs à partir d'égalités à compléter du type

$$9 + \ldots = 7$$

Même s'il opte pour la question de départ en termes d'équations, le professeur peut commencer par proposer aux élèves des calculs du genre 1243 + 35 – 34. Il ne tirera pas alors de bilan en termes d'opérateur, par exemple ici l'opérateur (+1), mais dira que l'on ajoute le nombre 1 à 1243. Ce sera l'occasion de rappeler l'égalité déjà vue et qui sera immédiatement utile ensuite. Après résolution des équations du genre 9 + … = 7, le professeur posera des calculs comme 1243 + 34 – 35, et le bilan cette fois sera que l'on ajoute le nombre (-1) à 1243.

1) Introduction des nombres négatifs

a) Etape1 : Compléter les pointillés

12 + …. = 27
38 + …. = 83
438 + … = 705
58 + … = 58
9 + … = 7

D'abord les élèves complètent en calculant mentalement, puis quand les nombres deviennent grands, ils posent la soustraction.

Pour 9 + … = 7

La plupart des élèves disent dans un premier temps que c'est impossible, mais parfois un ou deux proposent de remplacer les pointillés par l'objet –2, trouvé par intuition.

Le professeur relance alors le travail en exigeant que cette égalité soit complétée. Il explique que jusque là effectivement c'était impossible, mais ce jour un grand pas va être franchi.

Des élèves demandent alors s'ils peuvent compléter par autre chose qu'un nombre seul, le professeur leur répond par l'affirmative et ils proposent alors de remplacer les pointillés par 7 – 9 ou par 2 – 4, ou 0 – 2.
Ce qui donne : 9 + (7 – 9) = 7 ou 9 + (2 – 4) = 7.

On a établi dans une situation précédente, à un autre moment de l'année, et en se limitant aux calculs dans les décimaux positifs que : $(a+b)-c=a+(b-c)$

Le professeur explique qu'on peut supposer que cette propriété se généralise pour le calcul qui occupe la classe. Ce calcul devient ainsi possible car : 9 + (7 – 9) = (9 + 7) – 9 = 7

Lors de la mise en commun, les élèves confrontent leurs solutions. Le bilan conduit à écrire que :

$$7 - 9 = 2 - 4 = 1 - 3 = \ldots = 0 - 2 = -2$$

Le professeur explique alors que les écritures 7 – 9; 2 – 4; 0 - 2 sont différentes écritures d'un nouveau nombre désormais noté –2.

Noter que :

- nous affranchissons les élèves, dès le départ, des parenthèses autour de -2 sauf quand il est situé après un signe d'addition ;
- le nombre négatif est introduit comme différence de deux positifs, ce qui est cohérent avec la conception de la fraction comme nombre rationnel et quotient de deux entiers, que les élèves ont rencontré en 6ème . [5]

Nous retrouvons de façon sous-jacente la construction des nombres relatifs comme classe d'équivalence de couples d'entiers : les couples (7,9) ; (2,4) ; (1,3) ; (0,2) sont équivalents et leur classe est notée –2.
Nous récupérons ainsi la cohérence mathématique de la construction des nombres relatifs et rationnels comme ensemble quotient, un peu difficile à enseigner au collège comme cela fut fait dans les années 70.

b) Exercice : Ecrire plusieurs égalités à trous ayant –2 comme solution

Les élèves écrivent par exemple:

3 + ... = 1	ou	1 – 3 = ...
5 + (-2) = 3	ou	3 – 5 = -2
2 + (-2) = 0	ou	0 – 2 = -2

<u>BILAN :</u> On peut effectuer des soustractions pour lesquelles le premier nombre est plus petit que le deuxième, le résultat est un nombre négatif, il s'écrit avec un signe –

$$\mathbf{-2 = 0 - 2 = 1 - 3 = 7 - 9 = \ldots.}$$

On a alors 9 + (–2) = 7

[5] Pour les fractions comme quotient de deux entiers, introduites comme solution d'équation, voir notre brochure *Entrées dans l'algèbre, 6ème et 5ème*, IREM d'Aquitaine. Notons que la situation d'introduction des fractions par l'épaisseur des feuilles de papier (travail de l'Ecole Michelet -Equipe G .Brousseau) utilisait les classes d'équivalence, mais en partant d'un contexte « concret ».

c) Etape 2 : Opposés

Le professeur propose alors en exercice une liste d'additions de deux termes où il change la place du nombre manquant, le calcul se faisant grâce à la commutativité de l'addition que l'on prolonge.

En fin de liste , le professeur propose de compléter : …. + 7 = 0 où le nombre manquant est 0 – 7 = -7
Ce travail permet ainsi de définir l'opposé d'un nombre relatif.

> **<u>BILAN :</u> Deux nombres sont opposés quand leur somme vaut zéro.**
>
> **7 + (–7) = 0 Les deux nombres (–7) et 7 sont opposés.**

d) Exercices

i) Effectuer les soustractions suivantes

Effectuer les soustractions suivantes (certains résultats sont positifs d'autres négatifs). Le professeur jugera s'il peut introduire la difficulté des décimaux.

35 – 17	4,8 – 7,2
23 – 48	0,25 – 1,2
34 – 26	0,75 – 0,38
48 – 72	………..

ii) Effectuer les additions des nombres relatifs suivants

Effectuer les additions des nombres relatifs suivants (les résultats des additions sont tous positifs)
7 + (-4)   12 + (-5)   54 + (-29)   -35 +68   -17 + 21

2) Addition de nombres relatifs, généralisation

Les élèves ont déjà rencontré des opérations du type 9 + (-2) = 7 et 7 – 9 = –2, dans des exercices. Mais ils n'ont jamais rencontré encore d'additions dont le résultat est un nombre négatif.

a) Le professeur leur pose donc la question suivante

« Pouvez vous imaginer des additions dont le résultat soit un nombre négatif [6]? »

Les élèves proposent par exemple -5 + 3 et donnent comme résultats possibles -8 , -2

Il faut départager les élèves de la classe qui ne sont pas d'accord sur les différents résultats.

---

[6] Variante : Le professeur peut demander directement de calculer par exemple –5 + 3 et dans ce cas les réponses des élèves sont –8, ou –2 ou 2

On peut justifier le résultat – 2 en faisant intervenir la notion d'opposé

$$-5 + 3 = -5 + (5 - 2) = (-5 + 5) - 2 = 0 - 2 = -2$$

On peut procéder de même avec des propositions comme (-4) + (-7)

$$(-4) + (-7) = (-4) + (4 - 11) = -11$$

Remarque sur le bilan : Le professeur peut décider d'énoncer ces règles par des phrases ou donner seulement des exemples.

b) Une situation dans un contexte concret

Il s'agit de montrer comment l'addition modélise le bilan de deux variations.
Les élèves doivent compléter le tableau suivant :

Bilan du matin	Bilan de l'après-midi	Bilan de la journée	Bilan de la journée avec un nombre	Opération résumant la journée
Gagné 10 billes	Gagné 8 billes			
Perdu 8 billes	Gagné 12 billes			
Perdu 6 billes	Perdu 5 billes			
Gagné 5 billes	Perdu 8 billes			
Gagné 9 billes	Perdu 9 billes			
Perdu 4 billes	Gagné 0 bille			
Gagné 0 bille	Perdu 5 billes			

Le travail précédent permet de justifier que la succession de deux actions se traduit par une addition. En effet si la ligne 1 ne pose pas de problème, la ligne 2 se traduit naturellement pour les élèves par l'opération 12 – 8 . Ce que nous avons vu plus haut permet de comprendre que c'est aussi (-8) + 12

Pour la 4ème ligne (gagné 5 ; perdu 8) des élèves écrivent dans la dernière colonne :
8 – 5 au lieu de 5 – 8 , les autres élèves refusent ce calcul dont le résultat est 3 et non –3 comme il est écrit dans la colonne bilan.
Par contre, d'autres élèves proposent 5 + (-8), on justifie le résultat de l'addition en utilisant les opposés.

Exercices : Le professeur trouvera dans les manuels tous les exercices d'application qu'il désire en liaison avec la vie courante comme :

- l’ascenseur monte de 7 étages puis descend de 3 étages, peut-il faire le même déplacement en une seule fois ? (*bilan de deux variations)*
- ce matin il fait –3°, la température monte de 6° . Quelle est la nouvelle température ? *(état + variation = état)*

3) Graduation, comparaison, repérage

a) Etape 1

Compter à l’envers depuis 8 en enlevant à chaque fois 3.
On pourra représenter les nombres trouvés sur un schéma.

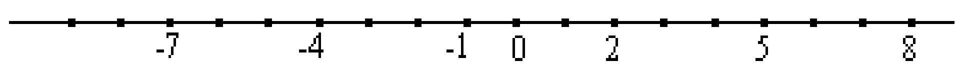
Les élèves trouvent les nombres 5 ;2 ;-1 ;-4 ;-7 ; ….
On pourra leur demander d’écrire les soustractions effectuées :

8 – 3 = 5   5 – 3 = 2   2 – 3 = -1

Il y a une discussion en classe à ce stade car certains élèves disent qu’on ne sait pas ce que veut dire –1 –3 . Il s’agit d’une soustraction pas encore vue. Cela permet au professeur d’annoncer la suite.
Certains élèves proposent de représenter ce « recul » de trois en trois sur une graduation d’axe vertical ou horizontal. Ainsi, en reculant de trois, tous les élèves peuvent trouver que

-1 – 3 = -4   et que   -4 –3 = -7

<u>BILAN :</u> On peut représenter ces nombres sur une graduation



b) Etape 2- Le nombre caché

Le professeur choisit un nombre négatif de grande valeur absolue, par exemple (–396), il le note sur un papier caché et les élèves doivent le deviner.
Chacun son tour les élèves proposent des nombres et le professeur leur indique si le nombre qu’ils proposent est inférieur ou supérieur au nombre cherché jusqu’à ce qu’un élève trouve le nombre.
Celui qui ne tient pas compte des informations obtenues par les réponses aux questions de ses camarades retarde la progression de la classe et diminue sa chance de gagner.

La détermination d'intervalles dans lequel le nombre est compris va poser problème. Le professeur peut proposer aux élèves, s'ils n'y ont pas pensé eux-mêmes, de représenter au fur et à mesure les renseignements obtenus sur une droite graduée.

Le professeur peut organiser à nouveau le jeu avec – 14 583 par exemple.
Il semble difficile de prendre un nombre décimal, car on cumule deux difficultés, le classement des décimaux et celui des négatifs, mais avec une bonne classe...

BILAN : Les élèves énoncent eux-mêmes le bilan pour la comparaison de deux relatifs. Ils peuvent dire par exemple : « dans les négatifs, l'ordre est inversé »

Cette remarque sur « l'ordre inversé » est importante car on la retrouvera à propos de la multiplication par (-1) en 4ème lors de l'étude des la multiplication.

4) Introduction de la soustraction de deux relatifs.

On passe de l'utilisation des règles de l'addition pour compléter des additions à trous à la définition de la différence de deux nombres puis à la méthode pour soustraire un nombre.

a) On donnera les trois colonnes séparément

Pour remplir la deuxième colonne, on invitera les élèves à observer comment on trouve la soustraction qui donne la solution de la première colonne.
Pour remplir la troisième colonne, on fera recopier les résultats de la deuxième dans les pointillés à droite du signe =.

Quand on aura tout complété, on demandera aux élèves de comparer les contenus des deux dernières colonnes et de décrire les ressemblances et les différences.
Pour faciliter ce travail, on pourra garder le tableau de l'activité précédente sous les yeux, on y trouve déjà des égalités entre additions et soustractions.

même résultat

Compléter :

3 + ….. = 7	7 – 3 = ………	7 + …… = …….
5 + ….. = 2	2 – 5 = ……..	2 + …… = ……
-7 + ….. = 3	3 – (-7) = ……..	3 + ……. = ……
6 + …… = -4	- 4 – 6 = ……..	- 4 + …... = ……
-9 + ….. = -5	- 5 - ….. = ……..	-5 + ……= ……
1 + ….. = -3	….. - ….. = …….	…..+…… = ……
-8 + ….. = -11	….. - ….. = …….	…..+…… = ……
7 + ….. = 0	….. - ….. = …….	…..+…… = ……
-10 + …. = -10	….. - ….. = …….	…..+…… = ……

<u>A Retenir :</u> Pour soustraire un nombre relatif, on peut ajouter son opposé.

a – b = a + opposé de b

<u>exemples :</u> 7 – (-4) = 7 + 4 = 11　　　-3 – 4 = -3 + (-4) = -7

Dans certains cas, la transformation est inutile :

8 – 6 = 2　　　3 – 8 = -5

b) Application : compléter

12 – (-20) =	-20 – (-14) =	-42 –42 =	13 – 30 =	-12 – 18 =
-39 – (-39) =	-18 – (-20) =	35 –25 =	-19 –11 =	28 –28 =

i) Remarque

Le professeur peut s'il le juge utile, justifier théoriquement cette règle sur des exemples. Il a deux possibilités :

ii) Première possibilité

Par exemple : Pour retrancher le nombre positif 4

-3 - 4 = -3 + 0 - 4 = -3 + ((-4)+4) - 4 = -3 + (-4) + (4 – 4) = -3 + (-4) + 0 = -3 + (-4)

Pour retrancher le nombre négatif (-4) :

-3 - (-4) = -3 + 0 - (-4) = -3 + (4 + (-4)) - (-4) = -3 + 4 + ((-4) - (-4)) = -3 + 4 + 0 = -3 + 4

On utilise deux propriétés :

- La somme de deux nombres opposés vaut zéro.
- La différence de deux nombres égaux vaut zéro.

iii) Deuxième possibilité

Par exemple : Pour retrancher le nombre positif 4
En partant de l'égalité : 4 + …. = –3, dont la solution est –3 – 4, on ajoute (–4) aux deux membres de l'égalité, on obtient (–4) + 4 + … = –3 + (–4)
Ou bien 0 + … = –3 + (–4) qui a la même solution, donc –3 – 4 = –3 + (–4) = –7
Pour retrancher le nombre négatif (-4) :
En partant de l'égalité : –4 + …. = –3, dont la solution est–3 – (–4), on ajoute 4 aux deux membres de l'égalité, on obtient 4 + (–4) + … = –3 + 4
Ou bien 0 + … = –3 + 4 qui a la même solution, donc –3 – (–4) = –3 + 4 = 1
On utilise

- La définition de la différence
- Une propriété de l'égalité

5) Sommes algébriques et simplification d'écriture

On propose des situations problèmes, dans des contextes concrets ou abstrait qui mènent à des calculs de sommes algébriques. Aucune virtuosité ne sera exigée dans ce type d'exercice.
On n'incitera pas forcément les élèves à aller systématiquement vers l'écriture simplifiée s'ils ne le souhaitent pas. Par contre, tout calcul astucieux sera vivement encouragé.

a) La simplification des écritures pose problème

Pour effectuer cette simplification, il y a deux méthodes

(+2) + (-5) + (+4)	
=(+2) – (+5) + (+4)	En transformant tous les nombres en nombres positifs.
= 2 – 5 + 4	Dans ce cas, le signe – qui reste est un signe de soustraction.

(+2) + (-5) + (+4)	
= +2 –5 +4	En enlevant les signes d'addition et les parenthèses.
= 2 – 5 + 4	En enlevant le signe + du nombre +2
	Les signes qui restent sont des signes prédicatoires.

<u>Avec la méthode que nous proposons</u>, les seuls signes + sont des signes d'addition.

(+2) + (-5) + (+4) s'écrit 2 + (-5) + 4
En transformant l'addition en soustraction cela donne 2 – 5 + 4

Les seuls signes qui restent sont donc des signes d'opération, sauf dans le cas où la somme algébrique commence par un nombre négatif.

b) Les situations proposées aux élèves

i) Sommes de plusieurs relatifs

- Moyenne de températures, avec des températures opposées.
- Sommes algébriques ou sommes de plusieurs relatifs.
- Mouvements d'ascenseur.

Le professeur décrit oralement les mouvements de l'ascenseur, « *il monte de 7 étages, il descend de 3 étages, ….* » Les élèves doivent prendre des notes et résumer la suite de déplacements en un seul.
Les élèves proposent de traduire les déplacements
soit par : 7 + (-3) + 2 + (-6) + 5 + ….
soit par 7 – 3 + 2 - 6 + 5 ……

ii) Suites d'additions et de soustractions

- Programmes de calcul

Choisir un nombre, lui ajouter 7, soustraire 9, ajouter –2, soustraire –4
Pourquoi retrouve t-on le nombre de départ ?

- Calculer 1243 –35 + 34 ; etc ….

Cette fois ci les calculs sont interprétés comme une somme algébrique de nombres relatifs.

<u>A Retenir:</u> Pour effectuer une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs, on peut la transformer en une suite d'additions, alors :

- les opposés se neutralisent

- on peut regrouper les négatifs entre eux et les positifs entre eux.

6) Notation –*x*

On donne aux élèves les deux programmes de calcul suivants :

Programme 1 :	Programme 2 :
Choisir un nombre, prendre son opposé, ajouter 10	*Choisir un nombre, l'enlever de 10.*

Faire fonctionner ces deux programmes de calcul avec les nombres 7 ; 15 ; -4 ; -27
Que constatez vous ?

Les élèves ont déjà rencontré des programmes de calcul, ils ont donc l'habitude de les traduire par des expressions numériques. Cette fois ci ils peuvent le faire mais seulement en utilisant la notation opp(x)+10 pour le programme 1.

- Le programme 1 se traduit par l'expression *opp(x) + 10*.
- Le programme 2 se traduit par l'expression *10 – x*.

$10 - x = 10 + opp(x)$ en utilisant la définition de la soustraction de deux relatifs.
On a ainsi démontré que les deux programmes reviennent au même.

Le professeur va à cette occasion introduire la notation *(-x)* et proposer la justification suivante
Quand on a introduit les nombres négatifs, on avait 7 – 9= 5 – 7=3 – 5=….= 0 – 2= –2
De la même façon : x + opp(x) = 0 donc opp(x) = 0 – x = –x

A cette occasion, il est important de signaler aux élèves le changement de statut du signe – qui de signe de soustraction devient le symbole de l'opposé d'un nombre.

- On revient alors aux programmes de calcul, on peut désormais écrire

10 – x = 10 + (-x) = -x + 10

Le professeur propose enfin un tableau à compléter :

x	*3*	*-4*			*-0,2*
-x			*7*	*1,5*	

Il attire l'attention des élèves sur le fait que *–x* peut être positif quand *x* est négatif.

III. Détail de séquences en classe pour l'introduction des relatifs en $4^{ème}$

7) Séquences en classe pour le produit de deux nombres négatifs

a) Situation 1

Le professeur commence par annoncer aux élèves que l'objectif de cette situation est la mise en place de la multiplication des négatifs

i) Etape 1 : Le professeur propose aux élèves de compléter les égalités suivantes

$$-3+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=$$
$$-5+(-5)+(-5)=$$
$$\underbrace{-2{,}3+(-2{,}3)+............+(-2{,}3)+(-2{,}3)}_{100\ termes}=$$
$$0\times2=$$
$$0\times(-3)=$$

Les élèves calculent d'abord en faisant l'addition, puis ils s'aperçoivent qu'il est plus rapide d'utiliser la multiplication entre positifs comme ils la connaissent , et d'écrire le signe – devant le résultat.
Cette remarque leur permet de trouver la somme des 100 termes en calculant 2,3 x 100 = 230 sans faire effectivement l'addition et en donnant la réponse -230

Certains élèves sont surpris de constater que la règle des signes de l'addition n'est pas valable pour la multiplication : par exemple le résultat de (-3) x 5 est négatif bien que 5 soit plus grand que 3.

Les élèves admettent sans difficulté qu'on décide que le produit de n'importe quel nombre par 0 donne 0, comme c'est déjà le cas avec les positifs qu'ils connaissent.

ii) Etape 2 : Puis le professeur demande de calculer

$$(-3)\times6=$$
$$3\times(-6)=$$
$$(-4,2)\times8=$$

Les élèves peuvent prévoir le résultat car ils peuvent, comme ils viennent de le voir à l'étape précédente, remplacer par imagination chaque multiplication par une addition réitérée qu'ils savent faire :

6 fois (-3), 3 fois (-6), . 8 fois (-4,2)

iii) **<u>Etape 3 :</u> Le professeur propose une multiplication**

Le professeur propose une multiplication qui ne peut pas être remplacée par une addition réitérée car aucun des facteurs ne peut jouer le rôle du « nombre de fois ».
Par exemple : 4,2 x (– 8)
Les élèves conjecturent facilement le résultat. Il s'agit de prouver que c'est bien –33,6.

Le professeur dit alors aux élèves que l'on veut que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition soit étendue à l'ensemble des nombres qu'ils connaissent et que le produit par 0 donne 0 comme on l'a déjà admis.
En ayant ces propriétés on peut démontrer la conjecture sur le résultat de 4,2 x (-8).
La démonstration est faite au tableau en recherchant le plus possible la participation active des élèves en classe entière. Le professeur écrit ceci :

On sait que 4,2 x 8 = 33,6 et on conjecture que 4,2 x (– 8) = – 33,6
La conjecture consiste donc à dire que ces deux nombres sont opposés
On le vérifie en calculant leur somme : 4,2 x 8 + 4,2 x (– 8)
Comme on conserve la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on peut factoriser

[illegible]

Ces deux nombres sont bien opposés car leur somme est nulle. La conjecture est démontrée.

Le professeur peut aussi proposer une deuxième démonstration si les élèves sont familiers avec l'introduction ci-dessus exposée des nombres négatifs , c'est à dire s'il remplacent facilement –8 par 0 -8 Cette démonstration utilise la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction[7].
L'idée est de remplacer(–8) avec lequel on ne sait pas calculer par le nombre positif 8 en utilisant la possibilité de remplacer (–8) par la différence 0 – 8, ce qui fait changer la nature du signe – :

[illegible]

iv) **<u>Etape 4 :</u> Donner le résultat de** $(-5)\times(-3)$

Le professeur recueille les conjectures dans la classe. Les plus fréquentes sont 15 ou – 15

[illegible]

$$15=5\times3$$

Ce sont des nombres opposés. Il s'agit de trouver une preuve pour savoir lequel de ces deux résultats est le bon.
Les élèves travaillent par deux. Ils cherchent quelques minutes et le professeur observe en donnant quelques indications ou encouragements aux groupes. Certains réinvestissent ce qui vient d'être fait en classe en ajoutant au produit cherché un autre produit qu'ils savent calculer et de sorte qu'une mise en facteur soit possible. Ceci permet de trouver à l'aide de la distributivité

---

7 Les élèves ont vu en 5ème la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction dans l'ensemble des décimaux positifs. Ici il s'agit de la distributivité de la multiplication par rapport à une soustraction qui n'existait pas en 5ème. mais les élèves admettent ce prolongement sans difficultés.

que la deuxième conjecture est la bonne. Mais le coup de pouce est souvent nécessaire car il n'est pas facile pour les élèves de trouver le calcul à faire, même s'il a été suggéré par le travail fait en commun au tableau pour le cas précédent.
Le professeur peut aider les élèves en s'appuyant sur leurs conjectures.

- Si $(-5)\times(-3)=-15$, il faut qu'en ajoutant ce nombre avec $15=5\times3$ vous puissiez trouver 0.
- Si $(-5)\times(-3)=15$, il faut qu'en ajoutant ce nombre avec $-15=5\times(-3)=(-5)\times3$ vous puissiez trouver 0.

D'autres groupes restent bloqués dans l'idée que le produit de deux nombres négatifs ne peut être que négatif. Ils pensent qu'il est inutile de faire le moindre calcul car « c'est évident ! »

Une mise en commun en cours de recherche permet de s'accorder sur le calcul à faire en utilisant la distributivité pour factoriser la somme $(-5)\times(-3)+(-5)\times3=(-5)\times[(-3)+3]$

ou bien, $(-5)\times(-3)+5\times(-3)=[(-5)+5]\times(-3)$

ou bien, si certains élèves ont démarré ainsi, on peut aussi calculer $[(-5)+5]\times(-3)$

ou encore d'après l'effet de la multiplication par 0 qui a été présentée à l'étape 1 , on peut écrire :

[illegible]

Dans tous les cas on trouve 15 et non –15 qui était le résultat qui semblait « évident » à certains car « le produit de deux choses négatives ne peut pas donner quelque chose de positif !».

Bilan : Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie les valeurs numériques et pour trouver le signe du produit on applique la règle suivante :

- le produit de deux nombres positifs est positif

- le produit d'un positif et d'un négatif est négatif

- le produit de deux négatifs est positif

Ce bilan n'est pas très facile à énoncer, car on devrait dire « valeur absolue », notion hors programme. Nous avons opté pour « valeur numérique » ou « partie numérique » qui ne nous satisfait pas. Certains emploie le mot de « distance à zéro » ce qui suppose un travail sur ce vocabulaire qui n'est pas plus anodin que celui de « valeur absolue ». On peut aussi se limiter à énoncer la règle des signes, sans expliciter le calcul de la valeur absolue du produit, qui ne pose pas de problème.

b) Situation 2 : Multiplication par (−1) et nombre opposé

i) Etape 1

Calculer :

$(-1)\times 3$
$(-1)\times(-4)$
$(-3{,}2)\times(-1)$
$7{,}6\times(-1)$
$(-1)\times(-1)$
$(-1)\times 0$
$(-1)\times 1$

Quelle remarque peut-on faire sur le résultat du produit d'un nombre par (−1) ?

Les élèves calculent en appliquant la règle sur le produit de deux nombres relatifs et remarquent que le produit d'un nombre par (-1) est l'opposé de ce nombre.

ii) Etape 2 : Démonstration

Les élèves peuvent la faire eux-mêmes, avec deux méthodes, en désignant un nombre quelconque par la lettre *x*.

- <u>méthode par disjonction des cas</u> : d'après la règle des signes qui vient d'être démontrée pour tous les nombres

Si *x* est positif son produit par (– 1) est négatif donc c'est l'opposé de *x*
Si *x* est négatif son produit par (– 1) est positif donc c'est l'opposé de *x*
Dans tous les cas il s'agit de l'opposé de *x*

- méthode utilisant une démonstration semblable à celle de la situation précédente.

On conjecture que $x\times(-1)$ est l'opposé de *x*.
Pour en être certain on les ajoute :

$$x\times(-1)+x=x\times(-1)+x\times 1=x\times[(-1)+1]=x\times 0$$

Donc $x\times(-1)$ est l'opposé de *x*.

<u>Bilan:</u> Quand on multiplie un nombre par (–1) on obtient son opposé

$$x\times(-1)=-x \qquad (-1)\times x=-x$$

Le signe « – » a donc trois statuts :

- **le signe de la soustraction**
- **le signe des nombres négatifs**
- **le signe qui désigne l'opposé**

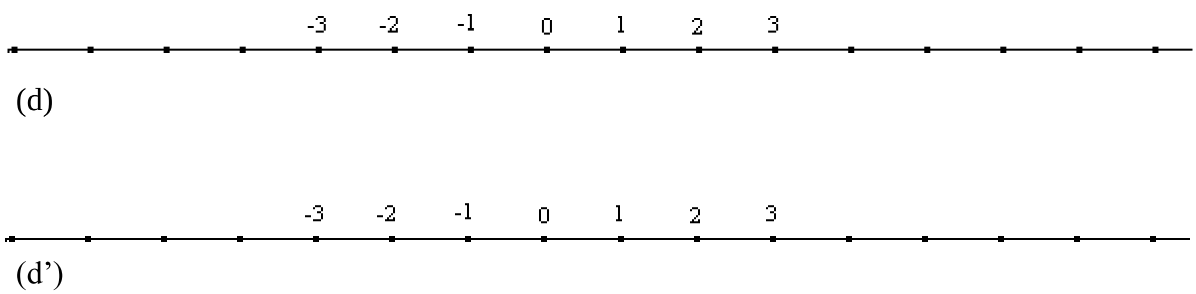
Cette propriété de la multiplication par (–1) est très utile pour démontrer des résultats en algèbre notamment :

$-3x = (-3) \times x$ mais aussi [illegible]

ou bien [illegible]

ou encore [illegible]

iii) <u>Etape 3 :</u> illustration géométrique



Le professeur montre le dessin suivant où l’on joint le point A d’abscisse 1 sur la droite (d) avec le point A’ ayant pour abscisse le produit de 1 par (-1) sur la droite (d’). Il demande aux élèves de le continuer en joignant chaque point d’abscisse entière à son produit par (-1).

La multiplication par (-1) correspond à une symétrie centrale, tous les segments se coupent au centre de symétrie. Un point de (d) et son symétrique sur (d’) ont des abscisses opposées.
Ce dessin fournit une illustration visuelle du fait que la multiplication par (-1) donne l’opposé du nombre de départ.[8]

iv) Exercices

- Exercice 1 : vérifier une égalité

a, b, c sont 3 nombres tels que a × b × c = - 100

Existe-t-il des nombres qui vérifient cette égalité ?

Sans chercher à connaître les valeurs de a, b, c, peut-on trouver les valeurs de :
a × 2 × b × (-5) × c
a × (-6) × c b
(-a) × b × c
(-a) × (-b) × c

---

[8] On pourrait faire cette transformation sur une seule droite en associant un point de la droite avec le point ayant comme abscisse son produit par (-1). Le centre de symétrie serait le point d’abscisse 0. On a décidé de dédoubler la droite pour plus de lisibilité.
De façon générale, ajouter un nombre peut-être associée à une translation de la droite et multiplier par un nombre à une homothétie. (voir Mathématiques Dynamiques d’Annie Berté chez Nathan Pédagogie)

a b c + 1 a × c × a × b × a × c × b a × 2 × c × 2 × b × 2 × a

L'objectif de cet exercice est de travailler les propriétés de l'égalité, mais aussi l'associativité et la commutativité de la multiplication.
Les élèves trouvent plusieurs solutions 5 × 2 ×(-10) ou (-10) ×(-10) ×(-1)

Les deux dernières expressions posent problème, le résultat contient encore une lettre. Cela étonne encore les élèves bien qu'on les ait habitués dès la sixième au fait qu'un résultat n'est pas toujours un nombre mais peut être une expression littérale.
On remarquera qu'on a quand même progressé en écrivant le résultat sous la forme –200 a : il suffit de connaître la valeur de la lettre a pour trouver le résultat, alors qu'avant il fallait a, b, et c.
Le professeur peut proposer des calculs dans lesquels le signe × est sous entendu, des élèves vont poser la question, ce sera le moment de rappeler que le signe × peut ne pas s'écrire.

Les élèves ont plus de difficulté pour les expressions $-a\times b\times c$ et $-a\times(-b)\times c$. C'est l'occasion de réinvestir la situation 3 (multiplication par (-1)) et de se familiariser avec le troisième statut du signe« - » : - a signifie l'opposé de a et – a=$(-1)\times a$.

- Exercice 2 : Prévoir le signe

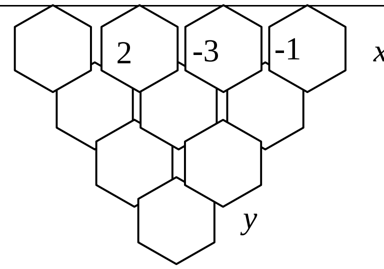
a, b et *c* sont des nombres relatifs non nuls. ***a*** **et** ***b*** **désignent des nombres négatifs,** ***c*** **désigne un nombre positif.**

	Est toujours positif	Est toujours négatif	Ça dépend
$a\times b$			
ac			
abc			
$a^2 = a \times a$			
c^2			
$-a$			
$-c$			
$a \times(-c)$			
$a+ b$			
$b + c$			

Ce travail est assez difficile pour les élèves mais il permet de réutiliser la notation (-a) et de leur faire utiliser la règle des signes sur des exemples littéraux.

- Exercice 3 : Nid d’abeille

Prouver que si x est négatif alors y est aussi négatif.
Exprimer y en fonction de x.



- Exercice 4 : Remplacer des lettres par leur valeur

$a = (-3)$ et $b = (-4)$ Calculer
$a + b$; $a - b$; ab ; $a^2 = a \times a$; $-a$; $2a$; $2a+3b+7$

Les élèves ont du mal avec -(-3) qu’ils n’ont rencontré que rarement (dans les sommes algébriques, on en a proposé une qui commence par -(-2) + …..)
Il faut rappeler que le signe (-) signifie ici l’opposé de (-3).

Pour calculer 2a, il faut remettre le signe $\times$. Certains élèves qui ne pensent pas à remettre le signe $\times$ confondent avec la soustraction 2-3.

- Exercice 5 : Le compte est bon

Avec les nombres –4 ; -1 ; 2 ; 3 ; -10 ; -6 trouver –100.

Quelques exemples de solutions :

- $(3-(-1)-(-6))\times(-10)$
- $(3\times2-(-4))\times(-10)$
- $(-1\times3\times(-4)-2)\times(-10)$
- $(-4-(-6))\times(-10)\times(3+2)$
- $(-1-(-6))\times(2+3)\times(-4)$
- $(3\times2\times(-4)\times(-1))\times(-10)$

Des élèves trouvent des expressions qui donnent 100, on peut alors rappeler la multiplication par (-1) qui donne l’opposé.

- Exercice 6 : Programme de calcul

On prend un nombre, on le multiplie par 2, on ajoute (- 10).
Faire fonctionner pour (-5) et 5.
On trouve 20, quel est le nombre de départ ?

8) Quotient de deux nombres relatifs

Avant d'aborder le quotient avec les nombres négatifs, il est important de réactiver cette notion avec des nombres positifs.

a) Etape 1

Compléter les égalités suivantes avec une valeur exacte :

2 × ….= 54 ….. × 3 = 2004 5 × ….. = 14 4 × …..= 1 …..× 0,4 = 3,2 3 × …..= 4

Les élèves hésitent encore sur cette situation que l'on a repris de la sixième et de la cinquième. Les difficultés sont toujours les mêmes :

Pour 4 × .....= 1, ils disent que c'est impossible car 1 < 4. C'est une conception de la multiplication comme une opération qui agrandit toujours. Sûrement une conséquence de l'introduction de la multiplication des entiers comme une addition réitérée.

Pour 3 × .....= 4, ils proposent des solutions décimales : 1,33 ; 1,333.Il faut revenir sur le statut de nombre de la fraction $\frac{4}{3}$.

A Retenir :

Le nombre $\frac{4}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, donne 4 : $3\times\frac{4}{3}=4$. C'est le quotient de 4 par 3.

b) Etape 2

Compléter les égalités suivantes avec une valeur exacte : $(-3) \times ... = (-36)$ $... \times 4 = (-12)$ $(-2) \times ... = 18$ $... \times 5 = (-16)$ $(-10) \times ... = 3$ $(-0,2) \times ... = (-7)$ $3 \times ... = (-4)$ $(-6) \times ... = 11$ $(-9) \times ... = (-7)$

Les premières égalités ont pour solution un nombre décimal ou entier que l'on obtient en faisant une division. La règle des signes de la multiplication aide à déterminer le signe de la solution.
En généralisant, on en déduit la règle des signes pour la division de deux nombres relatifs et on remarque que c'est la même que celle de la multiplication.
Pour les trois dernières, la solution n'est pas un décimal, on retrouve les difficultés de l'étape précédente.

On donne la définition de $\frac{-4}{3}$, de $\frac{11}{-6}$ et de $\frac{-7}{-9}$ en tant que quotients sans pour l'instant toucher aux signes

<u>A Retenir :</u> Pour diviser deux nombres relatifs, on divise les parties numériques et la règle des signes est la même que pour la multiplication. **Exemples : (- 36) $\div$(- 3) = 12 et 18 $\div$(-2) = 9** $\frac{-4}{3}$ **est le quotient de (-4) par 3**

c) Etape 3

Compléter les égalités suivantes. Dans chaque cas on donnera le nombre manquant sous forme décimale et sous forme fractionnaire.

(-3) × …..= (-36)   3× ….= 36   3× ….= (-36)   (-3) × …..= 36

On en déduit que :

$$12=\frac{-36}{-3}=\frac{36}{3} \qquad -12=\frac{-36}{3}=\frac{36}{-3}$$

mais, comme $-12=-\frac{36}{3}$ on a $\frac{-36}{3}=\frac{36}{-3}=-\frac{36}{3}$.

Si on admet que la règle de la simplification des écritures fractionnaires se prolonge avec les nombres négatifs on peut aussi prouver que :
$\frac{-36}{-3}=\frac{(-1)\times 36}{(-1)\times 3}=\frac{36}{3}$ et que $\frac{-36}{3}=\frac{(-1)\times 36}{(-1)\times(-3)}=\frac{36}{-3}$ occasion de réinvestir :

« si on multiplie un nombre par –1 on obtient son opposé ».

<u>A Retenir :</u> La règle des signes pour les quotients de nombres relatifs.

$\frac{-36}{-3}=\frac{36}{3}$ **désigne un nombre positif**

$\frac{-36}{3}=\frac{36}{-3}$ **désigne un nombre négatif**

et donc $\frac{-36}{3}=\frac{36}{-3}=-\frac{36}{3}$