Comment organiser un parcours pour enseigner le triangle au collège ?

Notre méthode de travail consiste à rechercher un enchaînement de questions à proposer aux élèves de sorte que l'étude du thème se poursuive au cours du temps et dans les classes successives. C'est ainsi que nous entendons le mot « parcours ».
A chaque étape de l'étude, nous veillons à ce que l'objet mathématique apparaisse comme réponse à un problème. Les élèves ont les moyens de comprendre ce problème et de le résoudre ou du moins d'envisager une solution. Les situations proposées leur permettent de mettre en œuvre la notion étudiée dans une situation problématique où elle prend du sens. Les élèves doivent pouvoir s'approprier la situation concrètement assez facilement et l'utilité de la notion mathématique étudiée doit apparaître sans ambiguïté. Le plus souvent, nous préférons utiliser un matériel assez dépouillé, pour rester le plus proche possible des mathématiques étudiées, cela facilite la dévolution de la question par les élèves.
La résolution de chaque problème amène d'autres questions qui motivent l'étude proposée dans les situations suivantes. L'enchaînement des questions a une importance fondamentale, car c'est justement l'ordre choisi qui garantit que les élèves ont les moyens de comprendre les réponses aux questions posées.

Nous essayons d'organiser les situations de manière à favoriser qui favorisent l'expression des élèves, la possibilité qu'ils auront de mettre en œuvre des stratégies diverses. Ainsi, souvent les questions suivantes découlent de leurs interrogations lors du travail de recherche, ou de l'observation de leurs productions. Parfois le professeur leur dit que la réponse à certaines de leurs questions viendra lors des études qu'ils feront les années suivantes.
Les élèves répondent donc à des questions qu'ils se posent vraiment, en classe.
Le sens se construit ainsi pour eux à deux niveaux : localement lors de chaque séance (AER) et globalement du fait l'enchaînement des problèmes au cours du temps (PER).

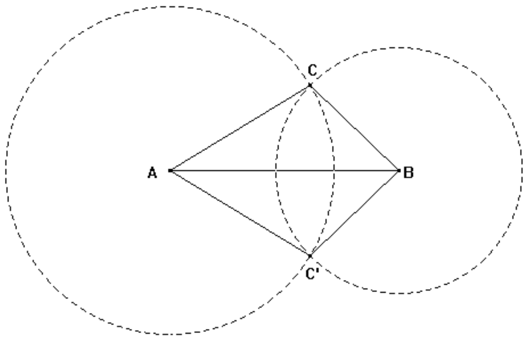
I. A quelle occasion les élèves rencontrent-ils des triangles dans le programme de sixième ?

1) La première rencontre avec le triangle dans le programme de sixième se fait dans la leçon sur le cercle.

Le problème central de cette leçon est de placer des points tous situés à une même distance donnée d’un point donné. C’est ainsi que l’on définit le cercle de centre A et de rayon *r* comme l’ensemble de tous les points situés à la distance *r* de A.

a) Le triangle apparaît comme solution du problème suivant : Etant donné un segment [AB] de 6 cm de longueur, placer tous les points situés à 5 cm de A et à 4 cm de B.

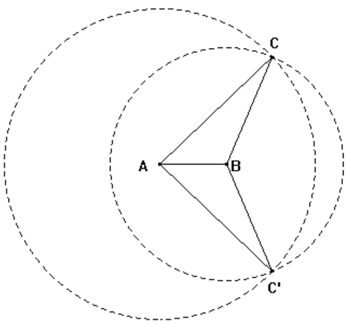
Les élèves dessinent d’eux mêmes le segment [AB] horizontal et en traçant les deux cercles ils obtiennent la figure suivante :



Ils voient deux triangles symétriques et disent que ces deux triangles sont égaux, car leurs trois côtés ont la même longueur.
Certains élèves voient aussi un « cerf-volant » selon la terminologie apprise à l’école élémentaire.

b) Le professeur peut leur proposer de répondre à la même question en prenant des longueurs différentes afin qu’ils soient confrontés à d’autres types de figures, où les triangles ont une apparence moins familière et où le « cerf-volant » est plus difficile à voir. .

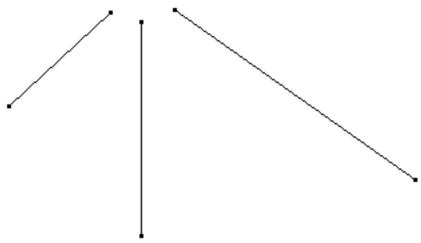
Par exemple :



Le professeur peut aussi proposer aux élèves de faire une construction similaire en partant d’un segment non horizontal, tracé à l’avance par l’enseignant sur une feuille blanche, afin que la figure soit la plus générale possible.

A ce stade, il ne fait aucun doute pour les élèves que les deux triangles symétriques obtenus sont les « mêmes ».

c) Le professeur peut ensuite poser le problème : *Dessiner un triangle dont les trois côtés ont les mêmes longueurs que celles de ces trois segments.*



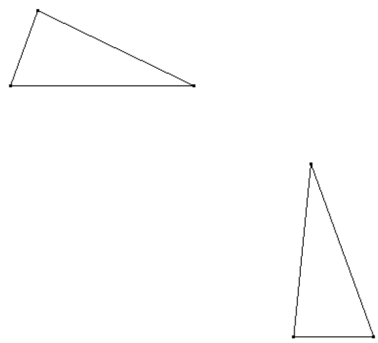
d) Ou bien encore : *Construire un triangle ayant ces trois mesures comme longueurs de côtés.*

Pour les problèmes c) et d), le professeur choisit bien entendu des mesures pour lesquelles le triangle existe.
Ainsi posée, les consignes n'induisent pas l'ordre dans lequel les élèves vont choisir les côtés et la position dans laquelle ils vont dessiner le triangle (surtout si on est sur du papier non quadrillé).

Il est presque certain qu'ils vont positionner le premier côté qu'ils tracent horizontalement, mais ils ne commenceront pas forcément tous par le même (certains commencent par la première mesure, d'autre commencent par la plus grande qui n'est pas nécessairement la première). Ils auront alors des triangles dont les formes peuvent leur sembler différentes.

L'objectif de ces problèmes est de persuader les élèves que pour dessiner un triangle connaissant les longueurs de ses trois côtés, il faut utiliser un compas et tracer des cercles ou des arcs de cercles et non tâtonner avec la règle graduée seule comme le font encore beaucoup d'élèves.

Cependant, des questions surgissent posées par les élèves eux mêmes, dans les problèmes c) et d) :

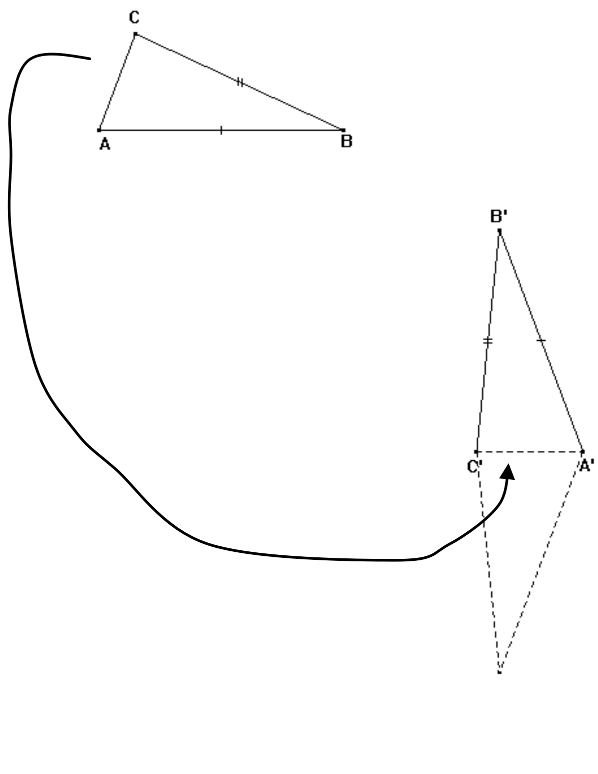


Dans une figure comme ci-contre, les deux triangles sont-ils les mêmes ?

Les triangles tracés par tous les élèves de la classe sont ils les mêmes ?

Le professeur doit donc préciser ce que l'on entend par l'expression « les mêmes triangles », dans un premier temps, on peut dire que deux triangles sont les mêmes, s'ils sont <u>superposables</u>.

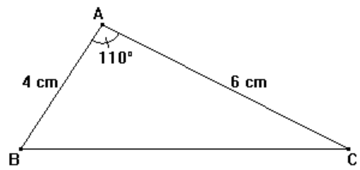
Reprenons la figure ci-dessus :   A l'aide d'un calque, je peux faire coïncider les deux côtés [AC] et [A'C'], puisqu'ils ont la même longueur. Ensuite, le point B est situé à la distance AB de A et à la distance CB de C : c'est le problème a). On a donc deux possibilités, ou bien c'est le même triangle, ou bien ils sont symétriques et dans ce cas, on a admis qu'ils sont superposables.



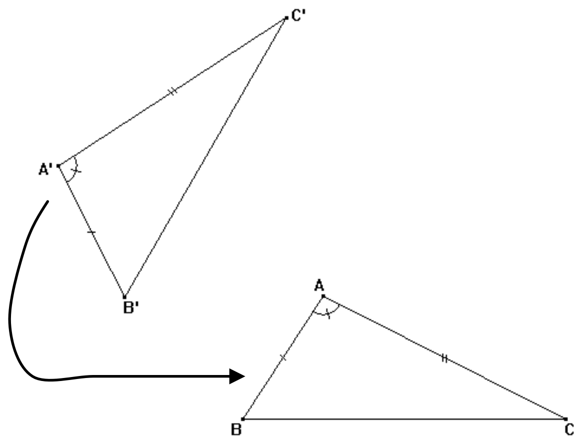
Cette explication n’est pas vraiment une démonstration, mais c’est déjà une façon un peu plus convaincante que de simplement déplacer un calque sans décomposer ce déplacement en deux temps (faire coïncider d’abord un seul côté et son homologue, puis les triangles).

2) La deuxième rencontre avec le triangle en sixième se fait dans la leçon sur les angles.

Les élèves étudient ce qu’est un angle en partant de ce qu’ils ont appris à l’école primaire. On travaille avec des gabarits, l’objectif est d’insister sur le fait que deux angles sont égaux si leurs côtés se superposent sur au moins une partie (les deux demi-droites sont les mêmes), la longueur des côtés tracés n’ayant aucune influence sur la mesure de l’angle.
Le professeur demande aux élèves de reproduire le triangle suivant dessiné ainsi sur le manuel :



Des élèves veulent commencer par le côté horizontal sur lequel ils n’ont aucun renseignements et sont bloqués. D’autres font un segment de 4 cm, penché presque comme le côté [AB] et obtiennent un triangle qui n’a pas la même position que celui du manuel, le côté [BC] n’étant pas horizontal.



Ils se demandent si leur triangle est bien le même que celui qu’on leur a demandé de reproduire.

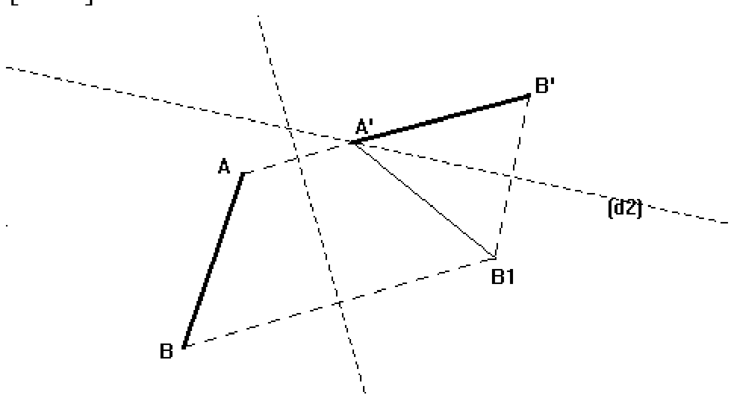
Avec le calque on peut amener le point A’ sur le point A et le point B’sur le point B, puisque les deux segments ont la même longueur.
Les deux angles A et A’ étant égaux, les deux côtés [AC] et [A’C’] vont se superposer ou être symétriques par rapport à (AB) et comme ils ont la même longueur, les points C et C’ vont coïncider, ou être symétriques par rapport à (AB). Les deux triangles sont donc identiques.

On procède de même pour un triangle déterminé par deux angles et un côté compris.

3) Pour terminer

lors de la leçon sur la symétrie, on peut proposer aux élèves de faire coïncider deux segments de même longueur à l’aide de deux symétries axiales, en les guidant. La figure peut être réalisée grâce à un logiciel de géométrie.

Trouver l’axe d’une symétrie qui amène A sur A’, dessiner le symétrique [A’B_1] du segment [AB].
Trouver alors l’axe d’une deuxième symétrie qui amène B1 sur B’, le symétrique du segment [A’B_1] est le segment [A’B’].



Ainsi, on arrive de manière presque rigoureuse, compte tenu du niveau des élèves, à démontrer que les triangles que les élèves ont tracés dans l'année, sont bien superposables quelle que soit leur position dans la feuille.
Les critères de détermination des triangles en question, ne sont pas définis, sauf pour le cas des longueurs des trois côtés.

C'est en cinquième que l'on aborde la question de la détermination des triangles.

II. Triangle déterminé par la donnée de ses trois côtés :

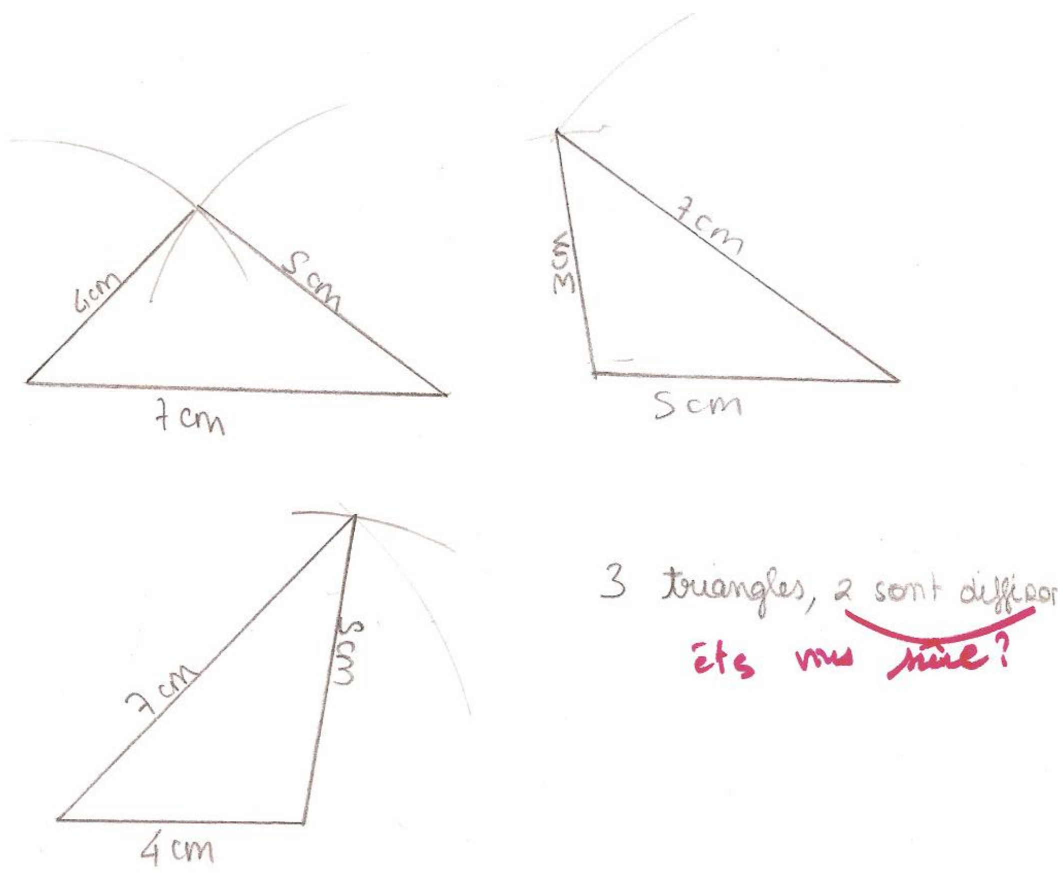
On reprend d'abord avec un triangle déterminé par les longueurs de ses trois côtés dans le cas où il existe, le professeur choisissant lui-même les trois mesures en cm.

La consigne est la suivante : *Combien pouvez vous tracer de triangles ayant ces trois nombres comme longueurs de côtés ?*

Les élèves proposent 2 triangles symétriques, 4 triangles (en prenant les symétriques de chaque triangle par rapport au côté et par rapport à la médiatrice du côté), 3 triangles (en commençant successivement par chacun des côtés), 6 triangles (avec en plus les symétriques des 3 triangles obtenus) ou 12 triangles en combinant toutes ces possibilités.

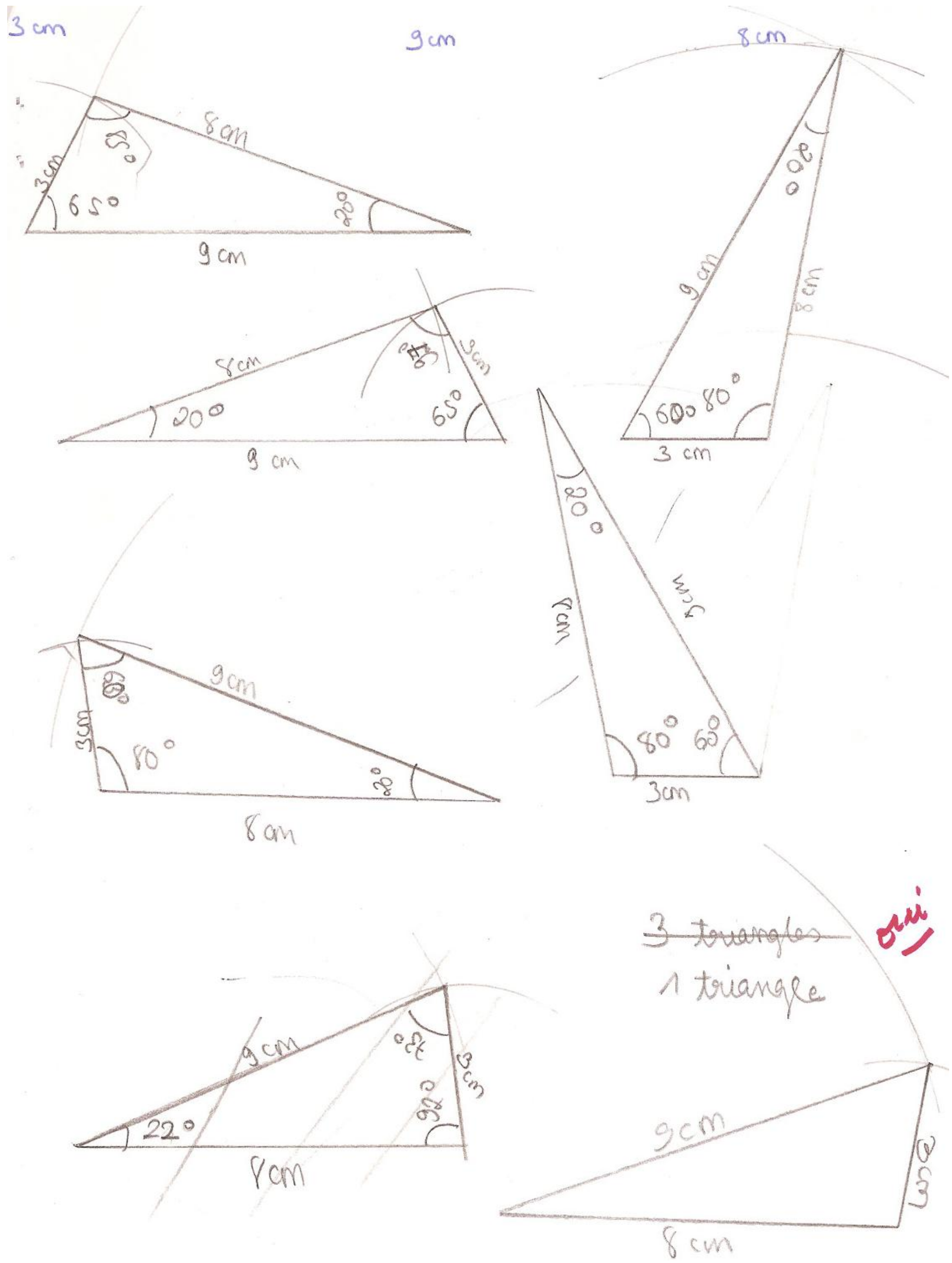
Que trouve-t-on comme productions des élèves dans le cas où le triangle existe ?

1) <u>3 triangles</u> car ils font des petits arcs de cercle mais ils commencent tour à tour par chacun des côtés. Parfois il leur paraît que ces triangles (ou 2 d'entre eux) ne sont pas isométriques.
Par exemple une élève trace trois triangles pour conclure que 2 sont différents (triplet 4,7,5)

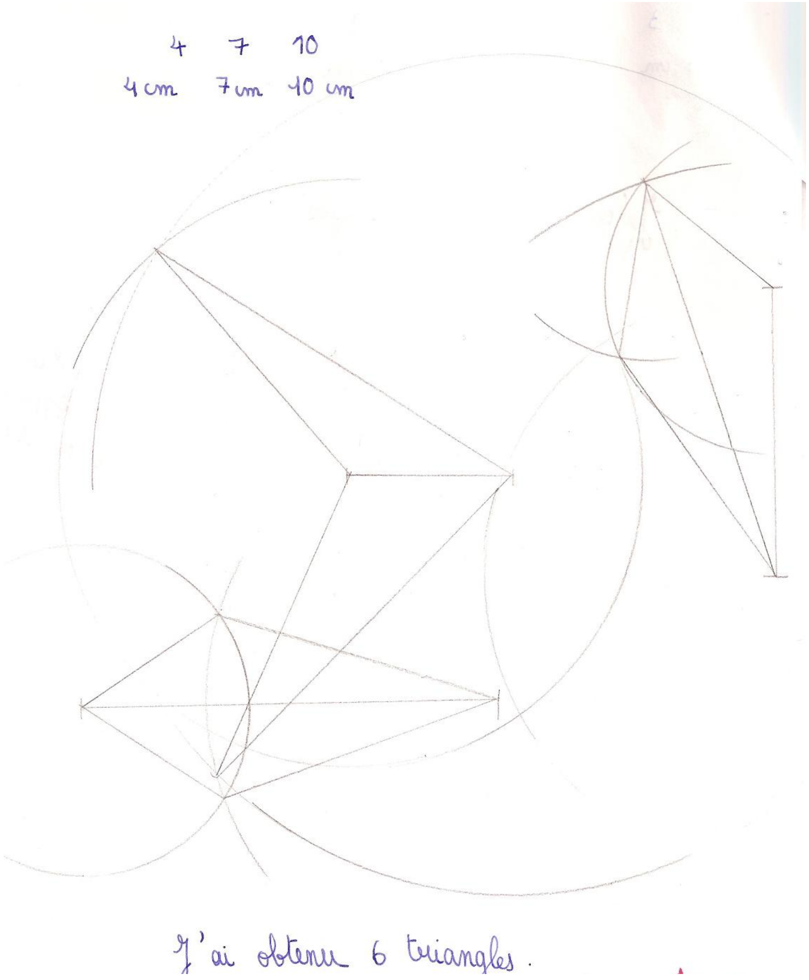


2) Puis avec le triplet 3,9,8 la même élève trace 6 triangles dont elle mesure les angles avec le rapporteur (la leçon sur la somme des angles n'est pas faite et on voit que ses mesures sont très approximatives). Dans 3 d'entre eux elle trouve les mêmes angles, ce qui lui donne un doute sur son dernier triangle qui avait des angles différents des autres. Elle le barre et refait une autre construction. Elle avait trouvé au départ 3 triangles différents. Elle barre pour conclure à un seul triangle peut-être après la démonstration du professeur.

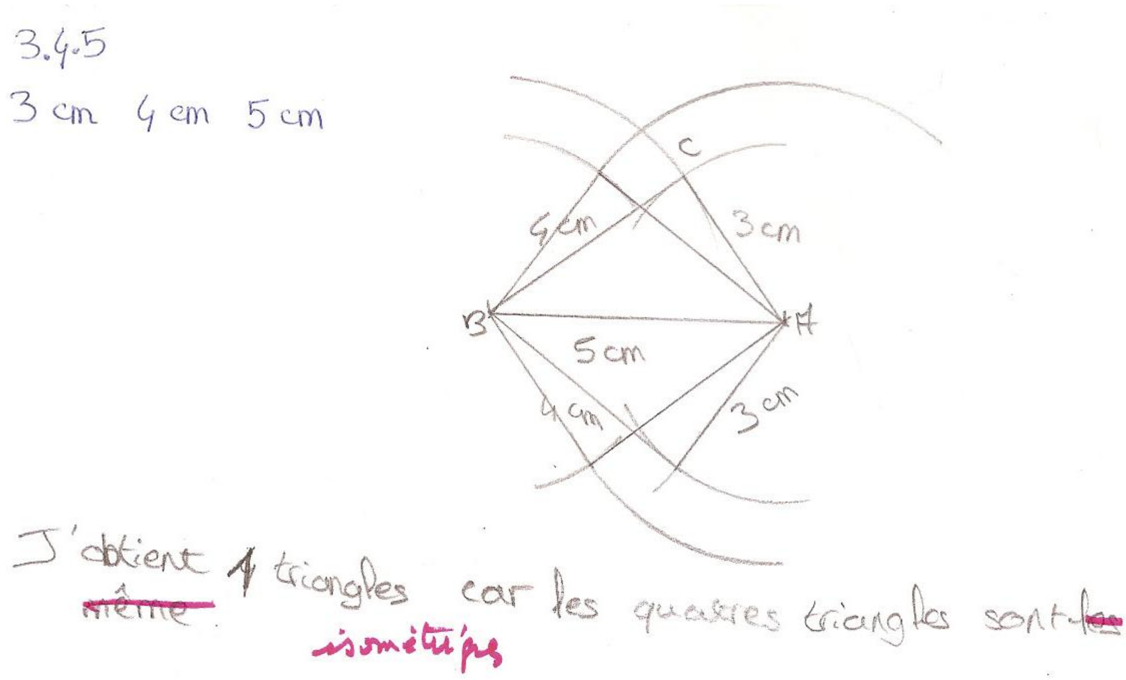
Une preuve empirique (avec des mesures ou même des calques) des cas d'isométrie des triangles (ici le 3ème cas) ne peut pas convaincre certains élèves. Ils perçoivent des triangles différents après leurs constructions et leurs mesures nécessairement plus ou moins approchées et ils en restent là. D'autres modélisent spontanément et sont persuadés sans preuve empirique que les triangles sont « les mêmes », mais ce n'est pas de cas de tous les élèves.



3) <u>2 triangles symétriques</u> , voire <u>6 triangles</u> (2 symétriques, 2 autres symétriques en changeant le premier côté, et encore 2 autres symétriques en changeant encore de premier côté)



3) <u>4 triangles</u> à partir du seul premier côté tracé et en trouvant les 3 autres triangles symétriques du premier.

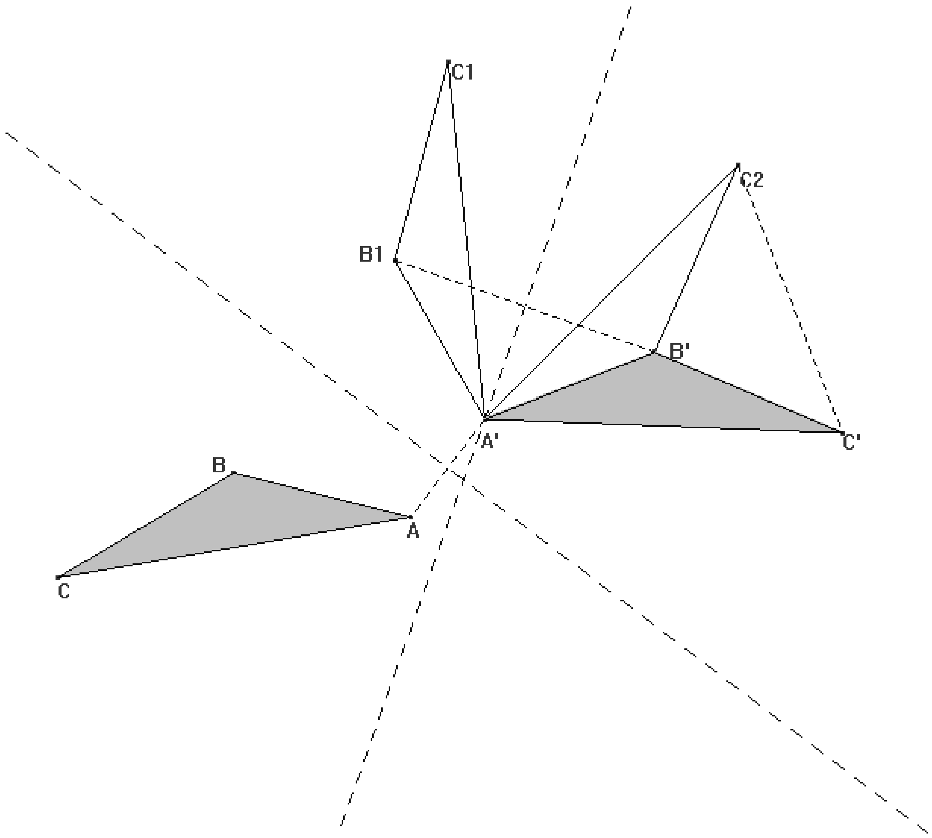


En fait

les élèves pourraient trouver jusqu'à 12 triangles (4 x 3) en prenant successivement un des trois côtés « horizontal » pour commencer.

C'est pour cette raison que dans la consigne, le professeur demande jusqu'à 4 triangles, et prévoit des points de suspension.

On rappelle ce que l'on appelle des <u>triangles différents</u> et on peut faire construire aux élèves les symétries qui font correspondre deux triangles superposables, à l'aide d'un logiciel de géométrie. On peut le faire avec 3 symétries au maximum.



<u>Bilan :</u> Deux triangles ayant les mêmes longueurs de côtés sont identiques.

Dans une des deux classes observées un élève (Antoine) a fait, en aparté à l'observateur, la remarque suivante : « c'est parce qu'un triangle est déterminé par ses trois côtés qu'il est stable ». L'observateur lui a demandé s'il tenait cette information d'un architecte , il a répondu : « c'est moi qui veut devenir architecte ». Le professeur peut amener à ce propos des tiges de meccano ou des baguettes aimantées pour montrer aux élèves un triangle ou un tétraèdre bien plus stables qu'un rectangle ou un parallélépipède par exemple.

III. Détermination des triangles

On peut alors se demander : *quels sont les éléments qui permettent de déterminer un triangle et un seul, à part les longueurs des trois côtés, ce cas étant réglé par le problème précédent ?*

Le professeur donne certaines mesures et le défi proposé aux élèves est de construire quand c'est possible <u>au moins deux triangles</u> non superposables répondant à la question, ou d'affirmer sans se tromper qu'un seul dessin est possible. Ils travaillent par équipe de 2.

Le professeur choisit chaque fois les variables didactiques de façon judicieuse autant dans l'ordre des constructions demandées que dans les mesures.

1- A = 30°, B = 45°
2- A = 60°, AB = 5 cm , AC = 8 cm
3- AB = 4 cm, BC = 6cm
4- A =30°, AB = 8 cm , BC = 5 cm
5- A = 75°, B = 30°, AB = 5 cm
6- A = 90°, AB = 5 cm , BC = 8 cm

On commence par la donnée de deux angles qui rend le défi possible (des triangles différents mais semble-t-il tous de « même forme »), puis un cas où le triangle est unique (2), puis un cas où les triangles sont différents mais sans la conservation de la forme (3), puis un cas où il y a deux triangles seulement ni isométriques ni semblables (4). Dans ce dernier cas certaines équipes gagnent et d'autres non. Puis à nouveau en 5 il n'y a qu'un triangle possible. Le cas 6 semble échapper à la conjecture que le travail précédent a permis d'énoncer à savoir les trois cas de détermination d'un triangle quelconque[1]. Elle s'explique en se référant à la construction des deux triangles du 4. Dans le cas où A = 90° (et non 30°) les deux triangles obtenus sont symétriques. Cet ordre dans les questions permet de ménager une découverte à chaque étape, ce qui maintient l'intérêt des élèves jusqu'au bout.

Chacun des membres de l'équipe trace un triangle avec les mesures demandées, puis ils vérifient ensemble si leurs triangles sont superposables. S'ils ne le sont pas, soit il y a des erreurs de mesures et, en les rectifiant, les triangles doivent se superposer, soit effectivement les données ne permettent pas de déterminer un seul triangle. L'équipe doit trancher entre les deux hypothèses.[2]

Avec les mêmes mesures pour deux côtés, quand l'angle A vaut 30° il existe deux triangles et s'il vaut 90° il n'y en a qu'un. Pour mieux comprendre ce résultat, le professeur peut aller plus loin s'il juge que la classe va suivre.
Il demande aux élèves de proposer d'autres valeurs de l'angle A et il en retient certaines , par exemple 45° ou 60° ou 120°. Qu'arrive-t-il ?
Et si maintenant on faisait varier les longueurs fournies, AB = BC = 8 cm par exemple ?
Dans une bonne classe la discussion sur les données peut aller encore plus loin, mais cela nous semble difficile en cinquième.
On peut reprendre avec rigueur cette fois les démonstrations esquissées en sixième : on fait correspondre par deux symétries, deux des sommets du triangle, puis on démontre que le dernier sommet coïncide avec des égalités d'angles.

---

[1] L'angle droit connu n'est pas compris entre les deux côtés connus.
[2] Ceci se trouve dans notre publication : *Géométrie au cycle central (5ème et 4ème). Un enchaînement d'activités.* par le groupe Didactique des mathématiques au collège- IREM – février 2000.
La proposition de Marseille sur Thalès (première étape) est très proche de nous. Le professeur demande à l'élève de construire des triangles en donnant des mesures précises d'angles puis de comparer avec ses voisins.

Le souci du professeur de $5^{ème}$ lors de la séance basée sur cette situation 1 est triple :

- gérer les erreurs de tracé, particulièrement avec le rapporteur, en expliquant individuellement son usage si nécessaire.
- mettre l'accent sur la formulation (bilans intermédiaires, puis bilan final)
- introduire une preuve théorique car par suite des erreurs de tracés il y a parfois un doute certain sur le fait qu'il soit impossible d'obtenir des triangles différents. Les élèves doivent se convaincre qu'ils obtiennent le même triangle quel que soit le côté par lequel ils commencent le tracé.

<u>Bilan :</u> Un triangle est déterminé par la donnée de ses trois côtés ou de deux angles et le côté compris ou d'un angle et les deux côtés.

IV. On travaille maintenant l'inégalité triangulaire.

Etant donnés trois nombres, peut-on toujours tracer au moins un triangle ayant ces trois nombres comme longueur de côtés ?

Pour le professeur, une question se pose, doit-il imposer les trois nombres aux élèves ou bien les laisser les choisir eux mêmes ?

a) Le professeur impose les trois nombres en commençant classiquement par un premier cas où le triangle existe, suivi du cas limite, puis du cas où le triangle n'existe pas. On peut croire que beaucoup d'élèves sont poussés à dessiner un triangle quand ils passent du premier cas au second. Ils pensent que le professeur n'a pas choisi les nombres au hasard et s'efforcent de trouver un triangle par effet de contrat.
b) Les élèves choisissent eux mêmes plusieurs triplets, avec le risque que certains aient plusieurs fois le même cas ce qui peut occasionner une perte de temps ou du moins un ralentissement du rythme de la séance quand ils ont par exemple deux ou trois fois le cas où le triangle existe ou bien deux ou trois fois le cas où visiblement le triangle n'existe pas. La mise en commun présente des difficultés car le professeur doit bien exploiter les différents triplés choisis de façon à permettre à tous les élèves d'avoir tenté de dessiner un triangle dans tous les cas et d'avoir discuté en classe entière des conclusions différentes auxquelles ils ont abouti dans le cas limite (le triangle existe ou non).

   En effet on a constaté que même si on laisse les élèves libres de choisir leurs triplets, ils construisent bien des triangles y compris dans le cas limite, spontanément, (et d'autant plus s'ils sont stimulés par la question « <u>combien</u> pouvez vous construire de triangles ? »).

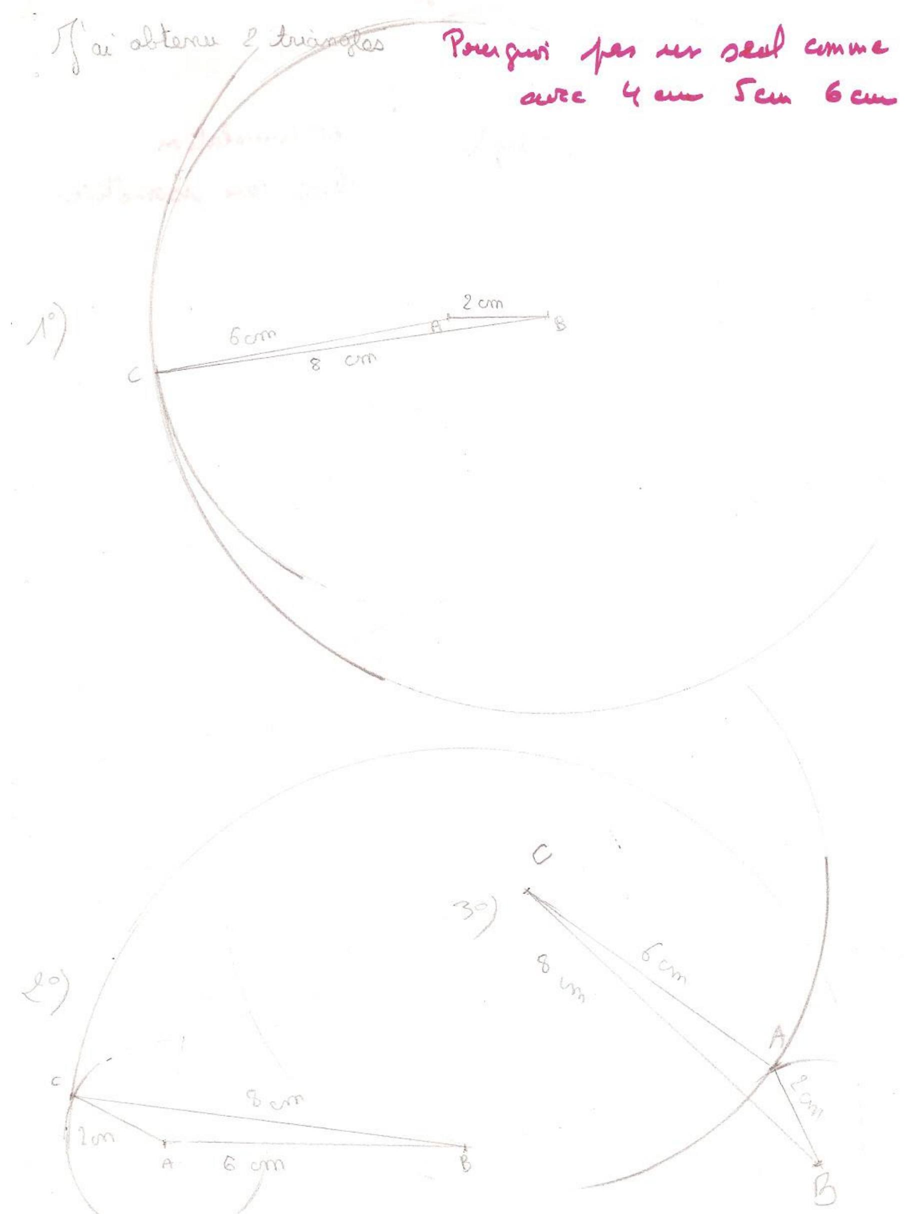
   De nombreux élèves :
   - ne modélisent pas de façon spontanée en prévoyant l'alignement des points
   - ne sont pas du tout convaincus de la non existence d'un vrai triangle même si le professeur leur montre les trois points alignés. Pour eux cet alignement n'empêche pas l'existence d'un ou plusieurs vrais triangles non plats.

L'explication de ce fait ne relève donc pas d'un phénomène de contrat.

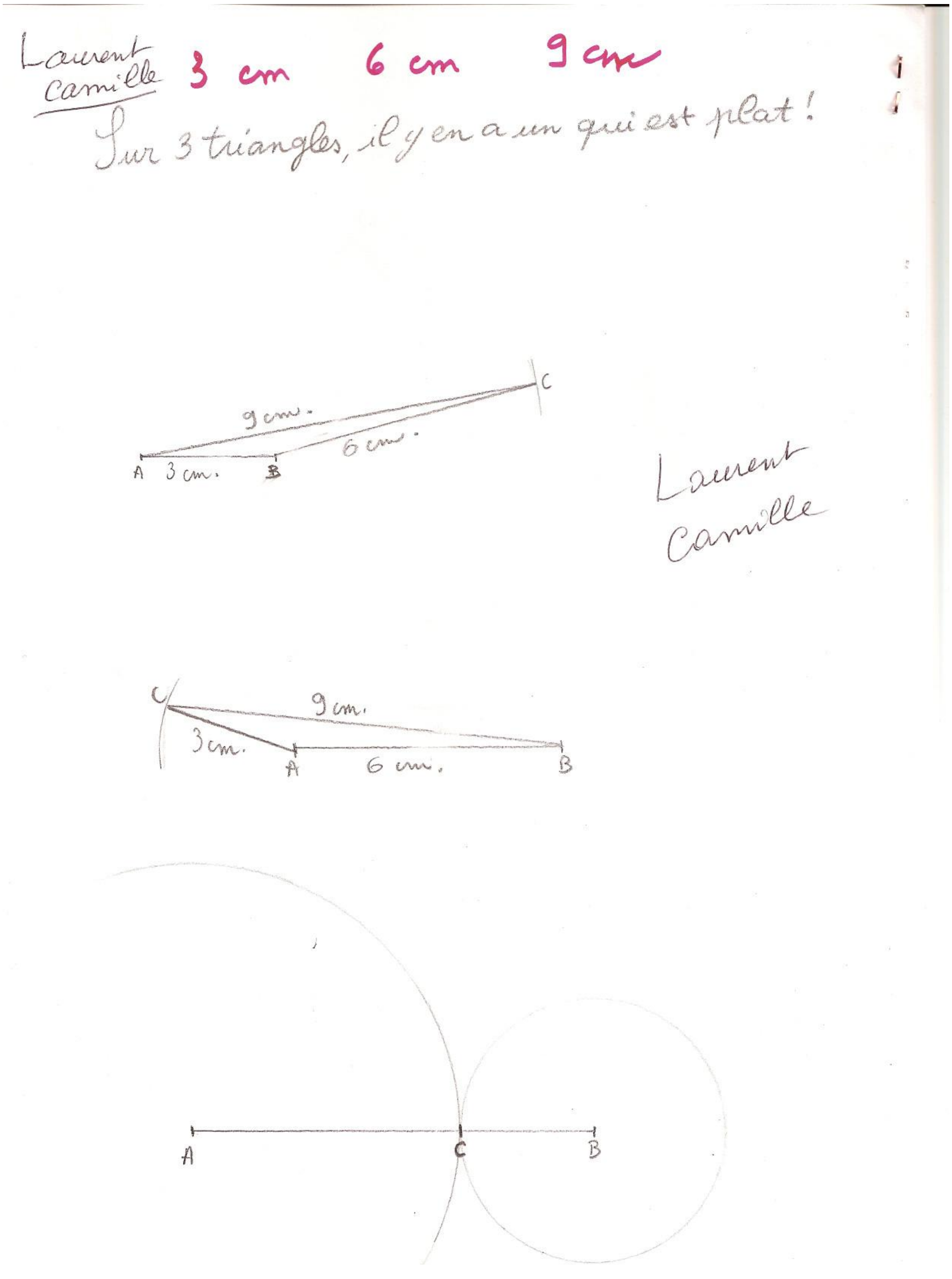
Nous avons décidé de laisser les élèves choisir chacun 3 triplets d'entiers entre 2 et 9, sans leur dire pourquoi dans un premier temps. Ils les écrivent au stylo et n'ont plus le droit d'en changer. On leur dit ensuite qu'il s'agit de trois longueurs et on leur demande s'il est possible ou non de tracer les triangles .

1) Des productions d'élèves pour le cas limite :

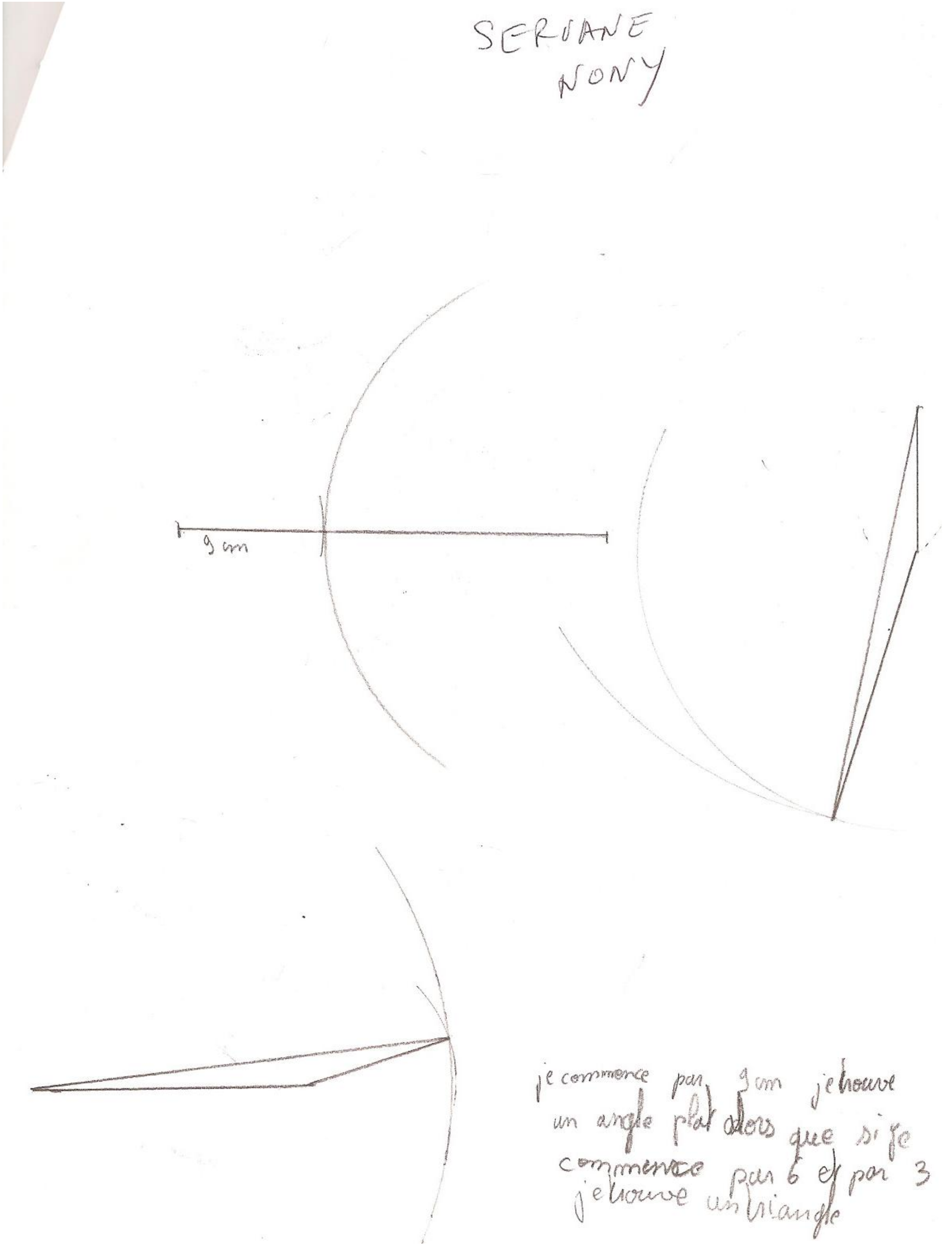
1) Eva a trouvé 2 triangles qui semblent isométriques en commençant par le côté de 6cm et en commençant par le côté de 8cm , mais un triangle beaucoup plus plat , mais pas complètement en commençant par le côté de 2cm. Pour cette raison elle a dit qu'elle trouve deux triangles différents



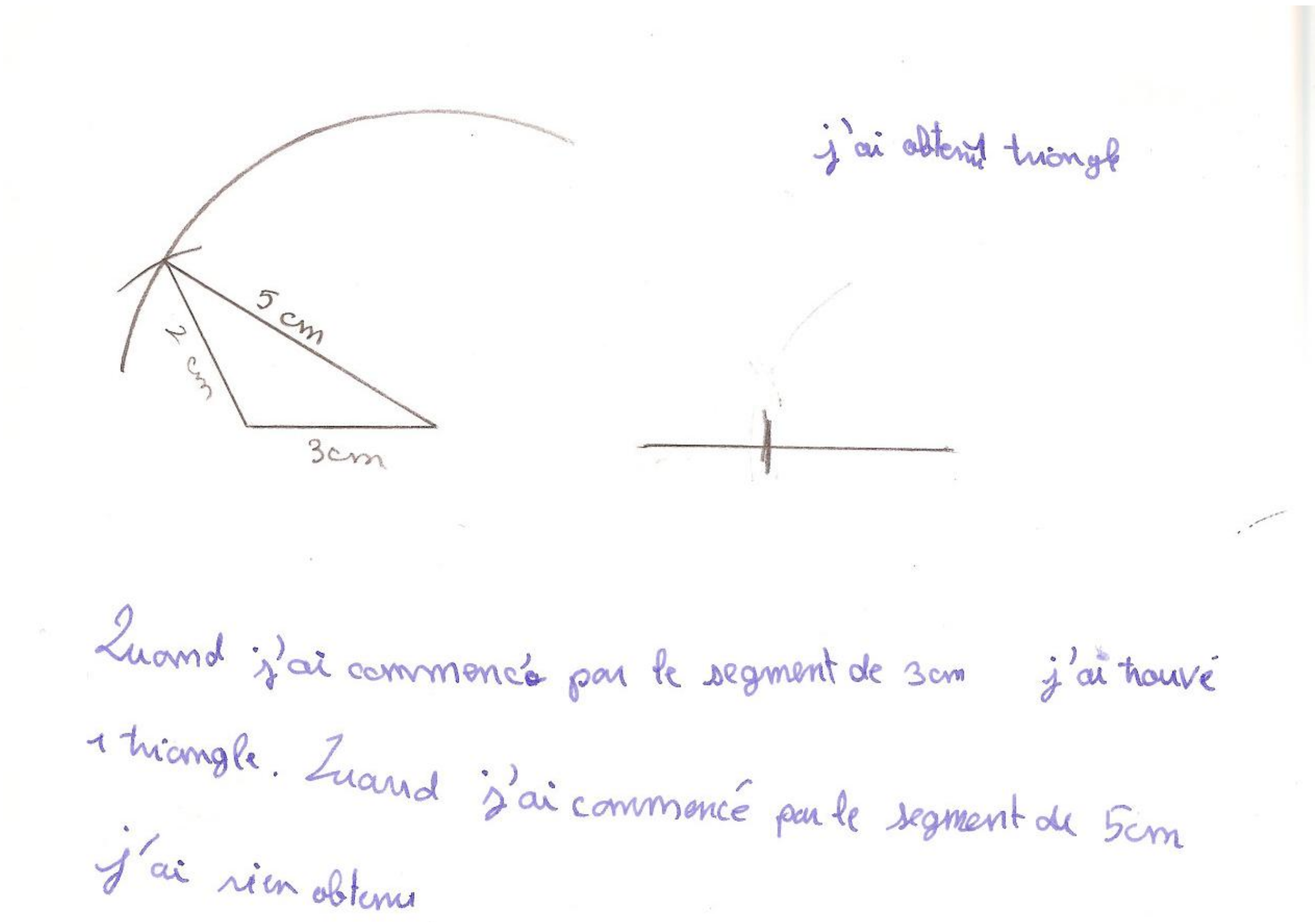
2) Camille trouve un vrai triangle plus ou moins écrasé en commençant par un côté, et des points alignés en commençant par un autre côté.



3) Servane a trouvé un angle plat quand elle commence par le côté de 9 cm et deux triangles isométriques un peu écrasés mais pas plats quand elle commence par le côté de 3cm ou de 6cm.



4) Pierre a choisi le triplet 2cm,3cm,5cm . Il commence par le côté de 3cm et trouve un vrai triangle, ce qui ne le choque pas car il n'y revient pas à la fin. Ensuite il commence par 5 cm et s'apprête à trouver de même un triangle (on voit les cercles sécants effacés) quand tout à coup (témoignage d'un observateur) il fait un gros trait vertical sur le segment de 5cm pour le séparer en 2cm et 3cm et il écrit : « quand j'ai commencé par 5 cm je n'ai rien obtenu » (c'est à dire pas de triangle qui était la question posée). Sollicité par le professeur il dit oralement c'est parce que 2+3 = 5 que le point est sur le segment.

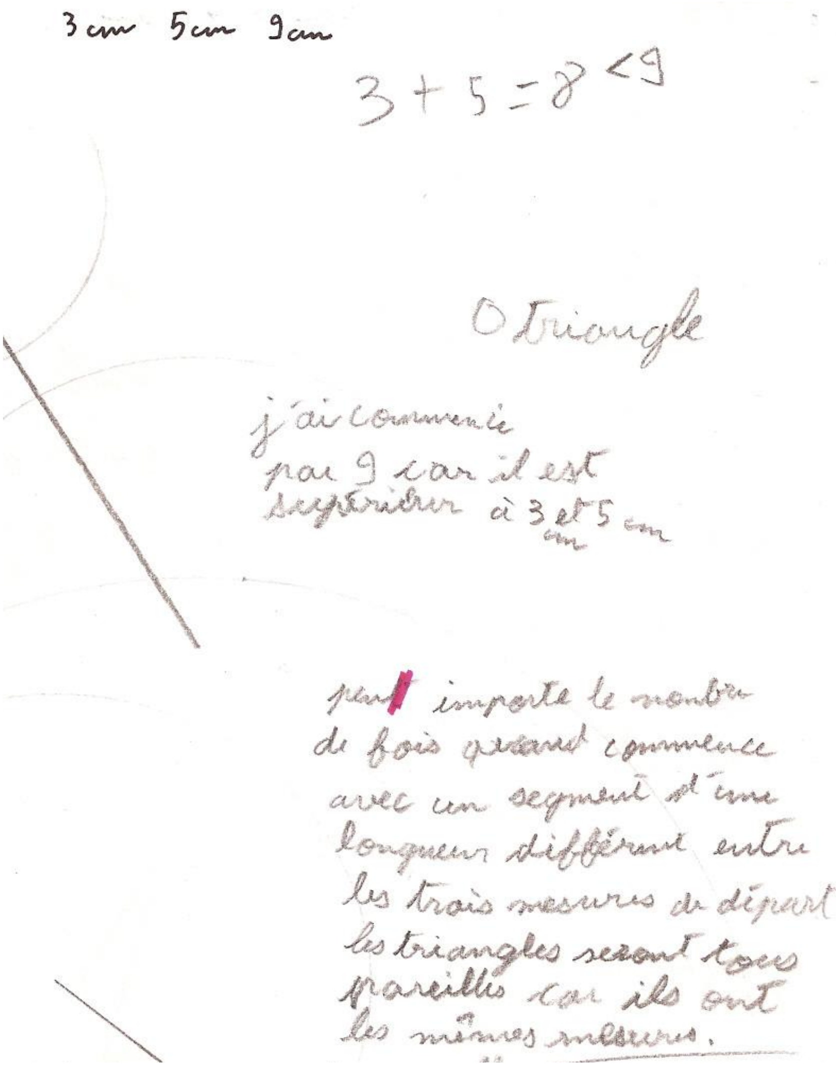


Quand il a commencé par 3cm et il a trouvé un vrai triangle, car il s'est trompé nettement dans la mesure 2cm qu'il a remplacé par erreur par 3cm. Nous disons que cet élève a modélisé spontanément dans le cas de la somme (2+3=5) c'est à dire pour les cercles tangents extérieurement. En revanche il n'a pas modélisé dans le cas des cercles tangents intérieurement (3= 5-2)., S'il n'avait pas commis une grosse erreur de mesure, il l'aurait peut-être fait mais rien n'est moins sûr, quand on voit les productions des élèves (voir n° 11, 13 et 14)

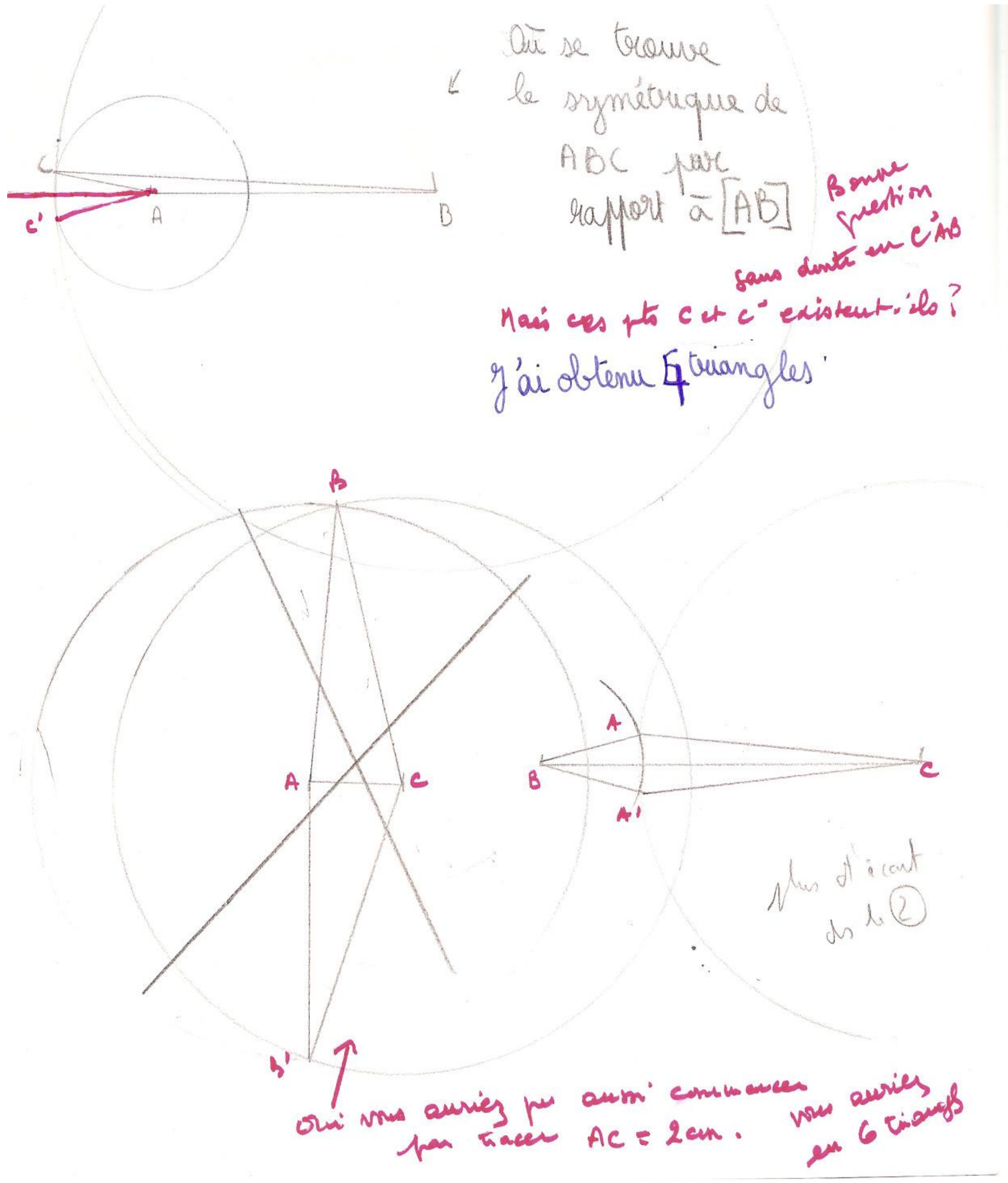
5) Antoine n'a rien dit oralement mais l'examen de son travail écrit montre qu'il a trouvé l'inégalité qui donne ou ne donne pas de triangle et l'égalité pour le triangle plat.

Cet élève signale en outre qu'il s'intéresse au plus grand nombre. Il le prend

- comme premier côté pour faire la construction sauf dans le cas impossible 3, 5, 9 où après avoir tracé les cercles extérieurs en commençant par 9, il essaie les cercles intérieurs en commençant par 3 pour être sûr de sa conclusion.
- pour le comparer à la somme des deux autres, ce qui permet d'affirmer qu'il a modélisé complètement la question



6) Alix trouve un seul triangle en commençant par 6cm. Elle a deux cercles tangents intérieurement qui se touchent sur un arc assez grand et elle choisi un point dans cette « intersection » au dessus de la ligne des centres pour avoir un triangle assez plat. Ensuite elle trouve 2 triangles symétriques entre eux et pas du tout plats en commençant par 2cm, deux autres triangles symétriques entre eux et assez plats en commençant par 8cm. Prenant alors un certain recul par rapport à ses dessins, elle barre les triangles pas assez plats à son avis qu'elle a obtenu en commençant par 2cm et elle écrit pour justifier cela : « plus d'écart dans le 2 » puis elle se demande où est le symétrique dans son premier dessin obtenu en commençant par 6cm.



2) La mise en commun :

Le professeur demande à la classe de ranger les triplets de nombres dans un tableau, selon que le triangle existe, qu'il n'existe pas ou bien qu'il y a un doute. Dans un premier temps, il pourra y avoir des cas limites classés dans la catégorie où le triangle existe ou n'existe pas, le classement sera revu après le bilan.
Il y a assez de triplets dans la classe pour que deux élèves aient choisi les mêmes, ils n'auront peut-être pas classé leur triplet dans la même catégorie, ce qui va susciter la discussion.
Le professeur pourra alors relancer les constructions sur les cas limites en demandant aux élèves d'essayer de commencer leur dessin dans un autre ordre.

a) Le professeur revient sur le bilan de la séance précédente après avoir vu les travaux de chaque élève et repéré certains:

Il y a deux cas très nets :

- le triangle existe car les cercles sont nettement sécants. L'unicité du triangle à une isométrie près dans le cas où la construction est possible a été déjà vue dans la leçon précédente sur la détermination d'un triangle.
- le triangle n'existe pas car les cercles n'ont pas de points communs.

Le professeur montre trois dessins selon qu'on commence par l'un ou l'autre des côtés. Il introduit le vocabulaire : cercles extérieurs et cercles intérieurs.

Comment modifier le triplet 2cm, 4cm , 8cm de façon à avoir un vrai triangle et en gardant le grand côté de 8 cm et le côté de 4 cm ?
Cette question du professeur est très importante car c'est elle qui va amener de nombreux élèves sur le chemin de la modélisation.
Le professeur pourra présenter deux dessins avec 8cm, 4cm et 6cm par exemple :
- en commençant par 8 avec cercles sécants à mettre en parallèle avec les cercles extérieurs
- et en commençant par 4 avec cercles sécants à mettre en parallèle avec les cercles intérieurs

et un cas pas net :

Nous terminons en démontrant que dans ce cas, le triangle n'existe pas.
Il serait dommage de ne pas prouver ce point qui est peut-être une des rares situations en géométrie au collège, où le doute est bien présent et ne peut pas se régler par des arguments concernant l'expérience puisque celle ci donne vraiment des résultats contradictoires.
La notion de démonstration mathématique prend ici tout son sens. On se convainc par des arguments logiques et non pratiques car justement dans ce cas, la pratique est mise en défaut.

b) Démonstration :

On commence par le cas impossible avec le grand côté et cercles extérieurs.
Puis les cercles se rapprochent et arrive la démonstration de l'alignement quand c'est douteux. Un élève dit clairement à toute la classe : « il y a toute une zone où les cercles se touchent et on dirait qu'il y a beaucoup de points communs »
Le professeur a préparé deux figures (fig 1 et fig 2) où il a noté le point C sur le segment (AB), et les points C' et C'' symétriques hors de la droite dans la zone où les cercles semblent encore se

toucher: Il y a deux cas de figure selon que AB est la plus grande des trois mesures (cercles tangents extérieurement) ou une des deux autres (cercles intérieurs)

Les élèves sont tentés de voir un petit segment de droite [C'C''] passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB) sans être gênés par le fait qu'un cercle contienne un petit segment de droite. Le professeur doit donc régler ce point d'abord en rappelant que par trois points alignés il ne passe aucun cercle et en expliquant pourquoi (on a vu dans la leçon sur le cercle circonscrit qu'il n'y a pas de cercle qui passe par trois points alignés).

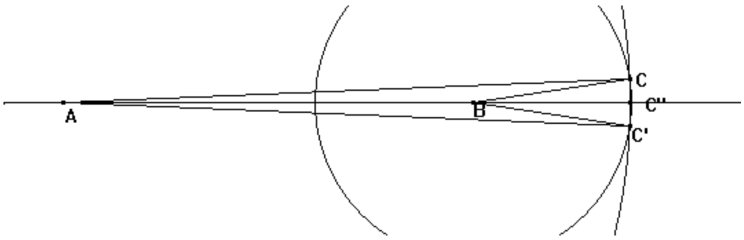


fig. 1

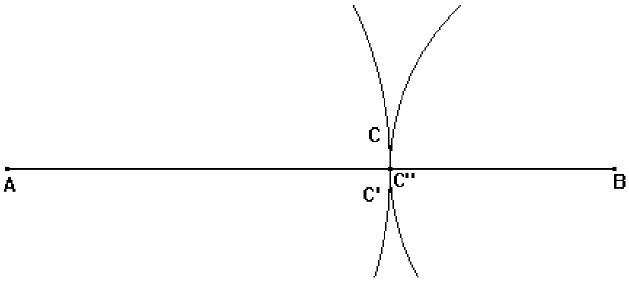


fig. 2

La suite utilise les figures 3 et 4. Le point C'' n'apparaît pas ici car il est inutile. On ne sait pas si le segment [CC'] est perpendiculaire à (AB) ou non, mais cela n'a pas d'importance. Le professeur conduit les élèves à raisonner sur les triangles isocèles C'AC et C'BC.:

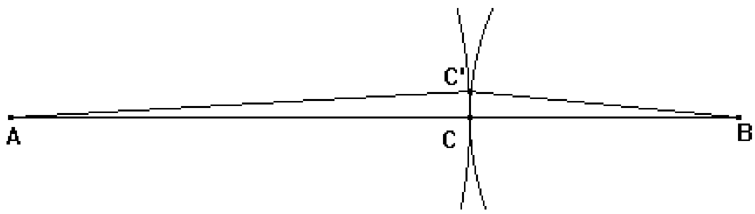


fig.3

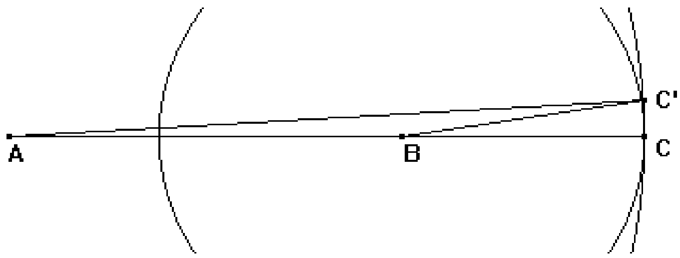


fig.4

a) on utilise le théorème : si un triangle est isocèle, ses angles à la base sont égaux, ce qui n'est pas toujours acquis après la symétrie orthogonale en $6^{ème}$. Le professeur de $5^{ème}$ doit l'avoir revu.

Les deux triangles ACC' et BCC' sont isocèles donc les angles ACC'' et $AC'C$ d'une part et BCC'' et $BC'C$ d'autre part sont égaux. La somme des deux angles $ACC' + BCC'$ vaut 180°

car les points ACB sont alignés donc $AC'C + BC'C$ vaut aussi 180°. Les points AC'B sont donc alignés aussi. Pour la figure 4, l'angle ACB est nul donc l'angle $AC'B$ aussi.

b) Le professeur peut donner aussi la démonstration avec l'unicité d'un cercle passant par trois points C', C et C'' (figures 1 et 2).
Ces deux démonstrations sont faites en maïeutique par le professeur, mais en général les élèves sont intéressés car ces triangles plats leur posent problème.

c) Formulation des résultats : Les élèves ont du mal à le dire avec des phrases.

Ceci permet au professeur de montrer l'utilité des lettres pour écrire les résultats

Etant donné trois longueurs a, b, c *en appelant* a *la plus grande.*
1- Si a > b + c *alors le triangle n'existe pas*
2- Si a = b + c *alors le triangle est plat*
3- Si a < b + c *alors le triangle existe*

d) Réciproque : Le professeur conduit la démonstration en classe entière.

On sait maintenant que le triangle existe (on le trace). Les mesures de ses côtés sont *a, b, c,* et *a* est la plus grande.
Si le triangle existe puis-je avoir $a>b+c$, ou $a = b+c$? Non car dans ces deux cas il n'existerait pas.

Donc nécessairement dans tous les triangles $a< b+c$, *a étant la mesure du plus grand côté*

Ce raisonnement « passe »en maïeutique dans une classe. Dans quelques exercices à la maison, l'élève aura besoin d'utiliser cette réciproque. N'est-ce pas le meilleur moyen, si on néglige sa formulation sous prétexte d'évidence, d'amener nos élèves à amalgamer dans d'autres cas un théorème direct et sa réciproque, ce que le professeur ne manquera pas alors de leur reprocher ?

Quand les élèves ont discuté de l'existence d'un triangle après avoir fait leur tracé ils sont bien arrivés à la conclusion suivante :

- Si *a* est inférieur à $b+c$ alors le triangle existe
- Si *a* n'est pas inférieur à $b+c$ alors le triangle n'existe pas

La deuxième proposition est la contraposée de la réciproque de la première, donc « en acte » les élèves ont bien exploré les deux théorèmes direct et réciproque. Il serait dommage qu'ils ne soient pas énoncés tous les deux clairement. C'est un phénomène courant en didactique de la géométrie : un théorème et sa réciproque apparaissent en même temps « en acte » mais ce n'est pas pour autant qu'il faut se dispenser de les énoncer clairement en les différenciant.

e) Vers un autre théorème où a désigne une des trois mesures, pas nécessairement la plus grande.

On pourrait écrire le théorème d'une autre façon sans supposer que *a* désigne la plus grande des trois longueurs

Pour les propositions 1 et 2 du bilan, l'implication est vraie si la relation est vérifiée pour n'importe quel côté, car en effet si la relation est vraie, ceci veut dire que a est nécessairement le plus grand côté.
Pour le 3 c'est différent. Si on ne sait pas que a est le plus grand côté il faut un quantificateur sous-jacent : l'inégalité doit être vraie quel que soit le côté.
Si $a< b+ c$ et si $b< a+ c$ et si $c< a+ b$ alors le triangle existe

Avec des élèves de lycée on peut montrer que

$$\begin{cases} b< a+ c \quad \text{équivaut à} \\ \\ c< a+ b \quad \text{équivaut à} \end{cases} \quad \begin{cases} a> b-c \\ \qquad\qquad \text{équivaut à } \ a>|b-c| \\ a> c-b \end{cases}$$

De sorte que l'existence du triangle est assurée si un des côtés a est tel que $|b-c| < a < b+c$

Le professeur peut montrer une animation avec un logiciel comme *géogébra* par exemple en commençant par deux cercles extérieurs. L'ordinateur indique à chaque fois les mesures des rayons b et c qui restent fixes (b ≥ c) et celle de la distance entre les centres (qui figure le côté par lequel on commence le dessin du triangle soit a . Cette mesure est d'abord très grande puis elle diminue progressivement .

On a d'abord $a > b + c$, puis $a = b + c$ et on voit le cas douteux, puis $a < b + c$ et on a les cercles sécants, puis on se trouve toujours avec la condition $a < b + c$ mais cela ne suffit plus pour assurer l'existence du triangle car les cercles deviennent intérieurs.

Le professeur montre les baguettes articulées. On retrouve le fait que le plus grand côté doit être inférieur à la somme des deux autres. Mais en diminuant progressivement ce côté, le professeur arrive à un autre butoir, celui de la différence. Le professeur revient à l'animation avec les cercles dont les centres se rapprochent (a diminue) pour arriver jusqu'aux cercles intérieurs
Si a est la mesure d'un côté quelconque, l'existence du triangle sera assuré par la double condition :
$b - c < a < b + c$ avec $b \geq c$ si on veut éviter la valeur absolue
On retrouve un cas limite avec $a = b - c$ qui revient à $b = a + c$ car cette fois c'est b qui désigne le plus grand côté.

V. Somme des angles d'un triangle :

Un triangle est il déterminé par deux angles , par trois angles ?
Dessiner un triangle ABC tel que $\hat{A} = 35°$ et $\hat{B} = 50°$. Est-ce que tous les élèves ont le même triangle ?
Les élèves remarquent que tous les triangles ont la même forme mais pas la même taille.
Ils en concluent que le troisième angle devrait être presque le même. Etant donné les erreurs de tracé et les imprécisions, ce n'est pas vraiment le cas. La démonstration s'avère nécessaire.
Pour le détail *cf.* notre fascicule[3]. Nous ne développerons pas ici.

Mettre en place les démonstrations en géométrie quand les élèves se posent vraiment des questions sur la conclusion est fondamental dans la construction du sens.

VI. En quatrième, le théorème de Thalès, le théorème de Pythagore et le cosinus.

[3] *Géométrie au Cycle central (5ème et 4ème) Un enchaînement d'activités* – Groupe didactique des mathématiques-IREM d'Aquitaine- février 2000

Ce sont toujours es questions sur la détermination des triangles qui permettent de démarrer les recherches sur ces deux sujets.

Pour le théorème de Thalès : *Un triangle est il déterminé par deux angles ?*
Quelles sont les autres propriétés communes aux triangles ayant les mêmes angles ?

Pour le théorème de Pythagore *: Combien de côtés sont nécessaires pour déterminer un triangle rectangle ? Quel est le moyen de calculer le troisième côté puisqu'il est déterminé par les deux autres ?*

Pour le cosinus : *Combien d'éléments sont nécessaires pour déterminer un triangle rectangle (angles et côtés) ? Connaissant deux côtés ou bien un angle aigu et un côté, comment peut-on calculer les autres éléments ?*