Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

INTRODUCTION AUX CONCEPTS DE LIMITE DE FONCTION ET DE SUITE EN PREMIÈRE ANNÉE D'UNIVERSITÉ : ADAPTATION DE DEUX INGÉNIERIES

Nicolas GRENIER-BOLEY[1] - Stéphanie BRIDOUX[2] - Martine De VLEESCHOUWER[3] - Viviane DURAND-GUERRIER[4] - Denise GRENIER[5] - Chantal MENINI[6] - Marc ROGALSKI[7] - Pascale SÉNÉCHAUD[8] - Fabrice VANDEBROUCK[9] (Commission InterIREM Université)

Résumé Dans cette communication, nous décrivons et argumentons l'adaptation de deux ingénieries didactiques développées au début des années quatre-vingt en France pour un public d'étudiants actuels de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences. La première (Robert 1983) vise à favoriser l'entrée des étudiants dans un point de vue conceptuel sur l'analyse à partir d'un travail sur les suites ; la seconde (Robinet 1983) vise à motiver et à introduire la définition formelle quantifiée de limite de fonction. Nous concluons en présentant des prolongements possibles de ce travail.

Mots-clefs : limite d'une suite, limite d'une fonction, ingénierie didactique, formalisme.

Abstract In this paper, we describe and motivate the adaptation of two didactical engineerings developped in the eighties for scientific students attending firts year university. The first one (Robert 1983) aims to favor the engagement of students toward a conceptual point of view on analysis from activities involving sequences. The second one (Robinet 1983) aims to motivate and introduce the formal quantified defintion of teh concept of limit of a function. Our conclusion open on possible developments of this work.

Keywords: limit of a sequence, limit of a function, didactical engineering, formalism.

[1] Université de Rouen (LDAR EA 4434) – France – nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr ;
[2] Université de Mons (LDAR EA 4434) – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be ;
[3] Université de Namur (CREAD EA 3875) – Belgique – mdv@math.unamur.be ;
[4] Université de Montpellier (IMAG UMR 5149), IREM de Montpellier – France – vdurandg@univ-montp2.fr ;
[5] Université de Grenoble (Institut Fourier UMR 5182), IREM de Grenoble – France – denise.grenier@ujf-grenoble.fr ;
[6] Université Bordeaux 1 (IMB UMR 5251), IREM de Bordeaux – France - Chantal.Menini@math.u-bordeaux1.fr ;
[7] Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, Université Pierre et Marie Curie et Université Paris Diderot (LDAR EA 4434), IREM de Paris 7 – France – marc.rogalski@imj-prg.fr ;
[8] Université de Limoges, IREM de Limoges – France – pascale.senechaud@unilim.fr ;
[9] Université Paris Diderot (LDAR EA 4434), IREM de Paris 7 – France – vandebro@univ.paris-diderot.fr

Commission Inter IREM Université (2015) Introduction aux limites de fonction et de suite : adaptation de deux ingénieries. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT7, pp. 666-676.

I. INTRODUCTION

Dans cette communication, nous décrivons et argumentons l'adaptation pour un public d'étudiants actuels de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences de deux ingénieries didactiques développées au début des années quatre-vingt en France. La première (Robert 1983) vise à favoriser l'entrée des étudiants dans un point de vue conceptuel sur l'analyse à partir d'un travail sur les suites ; la seconde (Robinet 1983) vise à motiver et à introduire la définition formelle quantifiée de limite de fonction.

Le projet de la reprise, en l'adaptant, d'une ingénierie didactique destinée à un public d'un autre temps (ici au début des années quatre-vingt) pose nécessairement question. Ces reprises sont sous-tendues dans les deux cas par un constat et une hypothèse.

Le constat est que les difficultés rencontrées en début d'université sur la compréhension et la formalisation du concept de limite sont toujours d'actualité, ceci étant bien documenté dans la littérature de recherche (voir par exemple Bloch (2000), Ghedamsi (2009), Roh (2010)) et corroborée par les observations naturalistes des enseignants des premières années d'université.

Au sein de la commission Inter IREM Université qui réunit des enseignants chercheurs, des enseignants et des chercheurs en didactique de différentes universités françaises et belges, nous faisons l'hypothèse que malgré ces difficultés récurrentes, on ne peut pas faire l'impasse sur la question de la formalisation, car celle-ci est nécessaire pour une conceptualisation adéquate des concepts de l'analyse et en premier lieu du concept de limite.

On oppose souvent formalisme et signification dans la mesure où la mise en place d'un formalisme opératoire permet un traitement syntaxique des preuves. Néanmoins, dans l'activité mathématique, le contrôle sémantique sur les écritures manipulées joue un rôle essentiel, ceci étant une différence décisive entre novices et experts (Durand-Guerrier et Arsac 2003). En particulier, alors que la langue naturelle est par essence porteuse d'ambiguïté, dans la perspective sémantique initiée par Frege, le langage formel vise à lever ces ambiguïtés, et de ce point de vue, formaliser, c'est choisir une interprétation (Durand-Guerrier 2013). Dans le cas de la notion de limite de suite par exemple, nous pouvons l'illustrer en considérant la traduction formelle d'une définition informelle classique donnée au lycée en France : « la suite u converge vers un réel a en $+\infty$ *si et seulement si* on peut s'approcher de a aussi près que l'on veut à condition d'aller assez loin ». Pour formaliser un tel énoncé, il faut pouvoir d'une part traduire ce que signifie « s'approcher de a aussi près que l'on veut », ce qui correspond dans le cas qui nous intéresse à définir une distance entre deux réels, ici la valeur absolue, et traduire qu'on peut la rendre inférieure à n'importe quel nombre réel strictement positif fixé à l'avance, d'autre part traduire ce que signifie l'expression « à condition d'aller assez loin ». La formalisation de ce deuxième point s'appuie sur le fait que l'ensemble des entiers naturels est non borné (on peut considérer des entiers aussi grands que l'on veut) ; ceci fait, il reste deux interprétations possibles :

1./ étant donné un réel strictement positif ε, pour tout entier N on peut trouver un entier n supérieur à N tel que la distance entre le terme de la suite de rang n et le réel a soit inférieure à ε ; formellement : $\forall\varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N\ |u_n - a| < \varepsilon$□□

2./ étant donné un réel strictement positif ε, on peut trouver un entier N tel que quel que soit l'entier naturel n supérieur à N, la distance entre le terme de la suite de rang n et le réel a soit inférieure à ε□□ formellement : $\forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N\ |u_n - a| < \varepsilon$□□

La première correspond à l'idée de valeur d'adhérence, la deuxième, que nous retenons ici, à la définition de la limite.

Dans ce qui suit, nous expliquons ce que nous avons gardé de ces deux ingénieries et nous insistons sur les choix d'adaptations qui nous semblent nécessaires afin de pouvoir les expérimenter auprès d'étudiants de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences « actuels ».

II. REPRISE ET ADAPTATION DE L'INGENIERIE DE ROBERT

1. Motivations

À partir du dépouillement de copies d'environ 1200 étudiants en début de parcours universitaire, Robert (1983) a mis en évidence des régularités sur l'acquisition de la notion de convergence. Elle avait notamment repéré chez les étudiants deux types de représentation de la notion. Les représentations dynamiques sont des représentations en termes d'action où converger est exprimé en termes de « se rapprocher de ». Les représentations statiques sont des représentations en langue naturelle de la définition formalisée. Or, Robert a montré que les étudiants chez qui le modèle statique était présent réussissaient mieux les exercices portant sur la notion de convergence. Des représentations erronées où converger est assimilé à être « monotone borné » étaient également présentes et menaient au même constat.

Un pré-test visant à étudier les acquis des étudiants (manipulation d'inégalités, ordre sur les réels, la valeur absolue,…) révélait aussi leurs difficultés à donner du sens à des phrases formalisées et à tenir compte de l'ordre des quantificateurs. Cet obstacle du formalisme continue d'être évoqué dans les travaux qui se situent à la transition secondaire-supérieur (Dorier 1997 et Gueudet 2008).

Enfin, l'enseignement au lycée, en Belgique et en France au moins, met l'accent sur l'algèbre des limites ; les exercices proposés aux élèves restent souvent de nature calculatoire. À l'université en revanche, la définition en (ε, N) devient un outil de démonstration et la notion de limite amène également un nouveau point de vue sur l'égalité entre deux nombres réels[10]. Il y a donc un saut conceptuel important à franchir par les étudiants pour accepter la nécessité de la définition formalisée de la convergence.

2. Description de l'ingénierie

L'ingénierie comporte deux séquences. Nous n'abordons ici que la première[11]. Elle démarre avec les trois questions suivantes:

a) Représenter graphiquement les suites de terme général suivant :

1. $u_n = \frac{n^2-25}{2n^2+1}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 2cm).*
2. $u_n = (-1)^n$
3. $u_n = \frac{1}{n} \cos n$ *(attention, sur les calculettes, n en radians !)*
4. $u_n = \cos n$
5. $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = -1, u_n = 2$ *pour tout* $n \geq 5$.
6. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).*
7. $u_n = \cos n\frac{\pi}{6}$

---

[10] $\forall a, b$ réels (ou rationnels), $(\forall \varepsilon > 0, |a-b| < \varepsilon) \Longrightarrow a = b$. Cette propriété peut par exemple être utilisée pour démontrer l'unicité de la limite d'une suite.

[11] Les deux séquences sont présentées dans (Robert, 1983).

8. $u_n = sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).*
9. $u_n = n^2 + 1$
10. $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ $(n \geq 2)$

b) Pouvez-vous classer ces dessins ? Rédigez rapidement les critères permettant vos classements.

c) Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre l et un entier n à partir duquel $|u_n - l|$ reste inférieur à $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{100}\right)$; mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.

Nous avons choisi de conserver le travail papier-crayon pour la première question en ajoutant un choix d'échelle pour chaque suite et en demandant préalablement de réaliser un tableau de valeurs permettant de calculer les dix premiers termes de chaque suite. Nous faisons l'hypothèse que ce travail peut amorcer une réflexion sur des comportements plus globaux tels que la croissance, le caractère borné ou non des suites et sur leur convergence. Nous avons remplacé la deuxième suite par la suite $\left(\frac{(-1)^n}{20}\right)$. Ce choix sera motivé à la troisième question.

Si les notions de croissance et de suite majorée/minorée/bornée ont déjà été travaillées dans le cours, la question 2 peut être conservée telle quelle. D'autres alternatives seront développées plus loin dans le texte.

Ce travail graphique et les classements établis en petits groupes par les étudiants servent alors d'appui pour introduire, à la troisième question, une formulation « numérique » de la définition en (ε, N). Nous avons choisi ici de remplacer l'inégalité avec valeur absolue par la double inégalité $l - \frac{1}{10} \leq x_n \leq l + \frac{1}{10}$. Celle-ci peut selon nous être un levier pour faire émerger plus facilement une interprétation géométrique en termes de bande autour de la limite *l.* Les dessins permettent de répondre pour 1/10 mais pas pour 1/100. La suite 2 que nous avons modifiée vérifie les inégalités avec 1/10 mais pas avec 1/100, alors qu'elle ne converge pas.

La question suivante est alors ensuite proposée aux étudiants.

d) Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier vos réponses par écrit.

i) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
ii) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

La suite 10 est un contre-exemple pour la première affirmation. Pour la deuxième affirmation, nous faisons l'hypothèse que la première représentation développée à la question 3 permet aux étudiants de conjecturer le résultat mais pas de le démontrer car il manque une définition de la convergence. C'est à ce moment que la définition formalisée est introduite par l'enseignant.

Sur le plan mathématique, nous n'avons donc apporté que très peu de modifications à l'ingénierie initiale. Une expérimentation de l'ingénierie auprès d'étudiants universitaires donnant notamment des précisions sur le rôle de l'enseignant à chacune de ses étapes est présentée dans Bridoux (2016).

3. *Principaux objectifs de l'ingénierie*

L'objectif principal de cette ingénierie est de sensibiliser les étudiants aux enjeux de l'analyse réelle à l'Université afin de favoriser une entrée dans le point de vue conceptuel nécessaire pour une appropriation de la notion de limite si l'on ne veut pas se limiter à l'approche intuitive dynamique mentionnée plus haut. Pour cela, il est nécessaire que les étudiants soient capables de mobiliser les différentes manières de traduire l'égalité de deux réels à l'aide des valeurs absolues, des doubles inégalités, des intervalles centrés et des bandes de largeur *arbitrairement petite*, entre *langage naturel*, *représentation graph*ique et *langage formel.* Il s'agit de permettre aux étudiants de s'approprier les outils qui permettent d'approcher le concept de nombre réel, sa continuité (ou sa complétude) au sens de Dedekind, qui suivant Sinaceur, réduit la continuité de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels à l'ordre (Vergnac et Durand-Guerrier 2014). Ceci motivant l'introduction d'une définition formelle puisqu'en effet, les représentations graphiques ne permettent pas de distinguer entre la droite rationnelle ou décimale et la droite réelle. Un autre objectif important est de questionner un certain nombre de théorèmes en acte (Vergnaud 1990) que l'on observe fréquemment chez les étudiants tels que par exemple : « Toute suite strictement croissante diverge vers $+\infty$ », ou « Toute suite convergente est monotone à partir d'un certain rang », en proposant aux étudiants un « herbier » de suites leur permettant d'identifier que certaines suites strictement croissantes divergent tandis que d'autres convergent, et que certaines suites convergentes sont monotones, et d'autres non.

4. *Des prolongements possibles et leurs effets sur les pratiques en classe*

La mise en place de l'ingénierie de Robert telle que décrite plus haut présuppose l'existence préalable d'un milieu organisé pour les étudiants (notion de suite majorée/minorée/bornée, croissante, répertoire de suites). Nous sommes conscients que l'énoncé de la question *II* laisse aux étudiants une variété de réponses possibles et peut dès lors représenter une difficulté de gestion en classe pour l'enseignant. Nous y reviendrons dans le point suivant. Notons cependant que l'ouverture de cette question *II* permet de faire émerger des critères liés non seulement à la convergence, mais aussi à la croissance des suites considérées. Cela permet donc de travailler également des conceptions erronées (comme par exemple que "*seules les suites croissantes majorées sont convergentes*"), comme le montre Bridoux (2016).

Enfin, un prolongement de cette ingénierie pourrait être d'amener les étudiants à réfléchir à une manière opérationnelle d'énoncer le "théorème des gendarmes", en appliquant le principe de la bande définie à ε près: "si une suite est comprise entre deux suites convergentes vers la même limite, alors, à partir d'un certain rang, les termes de cette suite sont compris dans une bande de largeur 2ε autour de cette limite". Bien entendu, l'idée de bande à ε près peut encore se traduire au moyen d'une double inégalité comme mentionné plus haut.

5. *Conclusions et perspectives*

L'objectif premier de cette ingénierie est de faire émerger une première représentation de la notion de convergence, en termes de bande. C'est en ce sens qu'il faut comprendre la question *III*, et non comme un travail algébrique pour justifier les inégalités en jeu (comme un mathématicien pourrait être tenté de le faire). Et la nécessité d'une définition en (ε, N) est ressentie, à la deuxième partie de la question *IV*, comme un outil (Douady 1986) permettant de démontrer une propriété. Cependant, certains pourraient penser que des étudiants de L1 ne sont pas sensibles à cette manière d'amener la définition. Une alternative qui pourrait leur être proposée, dans la perspective de l'approximation de la limite (Bloch (2000) et Ghedamsi

(2008)) serait alors d'être explicite dès la formulation de la question *II* sur le but recherché: étudier le comportement "se rapprocher de". La nécessité d'une définition de la convergence sera alors ici liée à la discrimination des critères fournis par les étudiants dans l'étude du comportement des suites. Reste encore la question de la mise en œuvre de cette alternative dans la classe: continuation de travail en petits groupes ou instauration d'un débat scientifique en amphi (Legrand 1993)?

Nous avons aussi déjà mentionné, en début de cette partie, que cette ingénierie pourrait également poser les jalons d'une réflexion sur la construction des réels (avec une égalité "à epsilon près"). Cette perspective amène aussi la question de l'approximation qui peut être investie pour introduire la notion de convergence. En effet, une généralisation de la question *III* formulée en termes d'approche de la limite à « 10^{-n} près » pourrait permettre à l'enseignant d'utiliser l'image d'une bande (autour de la limite) dont la largeur est en relation avec le degré d'approximation que l'on s'est fixé. L'idée sous-jacente qu'il faudrait alors faire émerger est qu'il y a convergence lorsqu'on peut envisager n'importe quel degré d'approximation.

III. REPRISE ET ADAPTATION DE L'INGENIERIE DE ROBINET

1. Introduction

L'ingénierie construite par Robinet (1983) dans les années quatre-vingt semblait avoir permis, d'après son auteur, de partir d'une étude qualitative pour conduire les élèves de la classe de Première B (filière *économique et social*) vers une définition formalisée du concept de limite, et d'introduire ensuite des théorèmes généraux.

Actuellement au lycée, l'enseignement construit une *conception ponctuelle et technique* de la limite d'une fonction en un point ou en l'infini, la justification des techniques étant renvoyée à l'intuition. Expliquons cela. Conception *ponctuelle,* car les seuls moments où le point de vue « local » est présent sont l'introduction et la définition, et ce point de vue est délaissé ensuite au profit de techniques algébriques opératoires, à partir de fonctions de référence et de nombres dérivés donnés (tels $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$). Le point de vue analytique est absent : les infiniment petits ou infiniment grands, à peine évoqués par des expressions telles que « aussi près que » ou « aussi grand que » ne sont pas travaillés, même si on trouve quelques exercices « alibis ». Conception *technique* : les manuels proposent un grand nombre de « théorèmes » ou propriétés qui consistent uniquement en une liste de limites prêtes à l'emploi, ou en des règles algébriques sur les limites. Comme ces « théorèmes » ne sont pas démontrés et qu'on renvoie l'élève à l'intuition pour les comprendre (et même les justifier !), la boucle est bouclée. Il manque dans les programmes actuels :

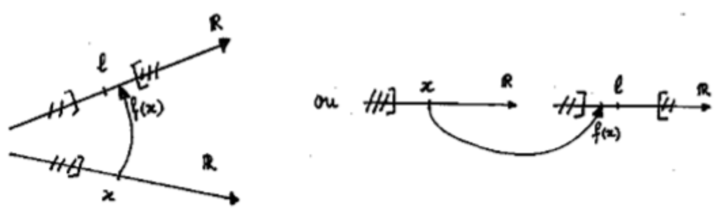
- une approche qualitative du concept de limite de fonction ;
- un travail introductif sur les approximations numériques. Par exemple : que dois-je choisir pour x pour que $f(x)$ soit inférieur en valeur absolue à une puissance de 10 donnée (pour une fonction à limite nulle).
- de vrais problèmes qui mettraient en relation les calculs d'approximation et les représentations des voisinages (par des bandes) dans l'objectif de donner du sens à des expressions comme « être près de » ou « être plus grand que », etc.., préliminaires à celles dont on se sert pour les limites.

2. *Description brève de l'ingénierie de Robinet*

Robinet a situé son ingénierie didactique entre deux extrêmes :

- une approche uniquement quantitative, reliant la notion de limite aux phénomènes réels qui peuvent lui donner du sens, mais ne permettant pas d'établir des théorèmes généraux ;
- une approche formalisée qui permet de résoudre des problèmes de limite pour un large ensemble de fonctions (y compris non explicitées), mais risquant de créer des décalages formels (et épistémologiques).

Cette ingénierie était destinée à des élèves de Première B (filière *économique et social*) dans les années quatre-vingt. Dans les programmes de l'époque, le cours devait « être assis sur des fondements théoriques précis et clairement définis » – i.e. la théorie générale des fonctions réelles d'une variable réelle appuyée sur la topologie générale, les notions et propriétés devaient être présentées chacune en déduction logique des précédentes, et les théorèmes démontrés. Les manuels étudiés par Robinet révélaient un même schéma d'enseignement : étude topologique de $\mathbb{R}$, formalisation de la continuité puis définition et formalisation de la limite d'une fonction en un point en termes de voisinages. Robinet avait en revanche constaté une grande diversité d'utilisation des graphiques dans les manuels, plusieurs ne donnant aucune représentation cartésienne des limites et de la continuité, et les seuls graphiques présents étant du type ci-dessous.



Ces graphiques – un peu surprenants – ne représentent en rien la notion de limite ; on peut se demander ce qu'il reste dans la tête des étudiants après de tels dessins « généraux ».
L'ingénierie de Robinet était organisée pour introduire la formalisation comme outil nécessaire pour distinguer différents types de limites à l'infini ou en 0, à partir de l'étude globale et locale de courbes de fonctions. Elle était organisée en trois temps : étude locale puis globale de la parabole, étude des hyperboles et enfin une « généralisation ». Nous n'allons pas décrire cette ingénierie ici, mais elle sera présente en filigrane lorsque nous expliciterons les raisons pour lesquelles nous avons repris (ou non) certaines situations dans notre ingénierie, et les adaptations que nous en avons faites.

3. *Choix généraux pour la « nouvelle ingénierie »*

Ces choix ont été guidés à la fois par la volonté de garder l'esprit et les objectifs de l'ingénierie de Robinet et la nécessité de l'adapter aux élèves à qui elle est destinée (L1 Sciences) et aux évolutions des programmes depuis 1980. Notre objectif final est de construire des situations qui permettent de justifier l'intérêt et la nécessité de la formalisation pour l'étude générale des limites et des comportements asymptotiques des fonctions. Robinet avait elle aussi cet objectif dans son ingénierie, mais une question est restée ouverte : est-il possible de réduire le saut conceptuel entre une approche intuitive et qualitative du concept de limite (par une étude locale ou globale graphique) et sa formalisation. La mise en relation des notions de voisinage et d'encadrement et leurs représentations graphiques par des « bandes » peut être un pont entre les ostensifs associés à l'approche intuitive et qualitative et la formalisation.

Nous avons choisi de regrouper paraboles et hyperboles, et d'ajouter d'autre fonctions n'ayant pas d'asymptotes mais pour lesquelles on fait l'hypothèse que les tracés sont connus des étudiants (nous les donnons ci-après). Notre objectif premier est la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$ La situation de départ de l'ingénierie de Robinet (consigne 1 de la phase d'étude de la parabole) est abandonnée. Elle consistait en l'étude au voisinage de points très loin de l'origine ($x = 100, 1000$, etc.) de la position de la courbe représentative de la fonction $x \to x^2$ relativement à une sécante dans des voisinages de ces points. Nous n'avons pas conservé cette tâche car elle nous a semblé concerner davantage les notions de sécante et tangente à une courbe que la notion de limite. Mais aussi pour d'autres raisons : c'est une tâche chronophage si on l'exécute à la main, et elle pose des questions d'échelles non orthonormées si on utilise un logiciel ; enfin, un doute existe quant à la possibilité de motiver des étudiants sur une telle question.

4. Une expérimentation en 2014 de la « nouvelle ingénierie »

Un membre de notre groupe de travail (Menini) a expérimenté le tout début de notre projet d'ingénierie. Cette expérimentation a été réalisée en classe avec une trentaine d'étudiants, dans un parcours maths-informatique-physique-chimie de L1[12] Sciences au semestre 1, au début d'un cours sur les limites, et après le cours sur les suites. Nous ne donnons ici que les résultats les plus significatifs.

La tâche consistait à tracer l'allure générale des courbes sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et le classement de quelques fonctions, pour moitié classiques et pour l'autre moitié moins connues. Les étudiants ont travaillé en groupes, chaque groupe a étudié deux fonctions, une « facile » et une « délicate ». Un représentant de chaque groupe est passé au tableau. Les constats sont les suivants : l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \to x^2$ n'a soulevé aucune difficulté, de même que celles des courbes représentatives des fonctions $x \to x^3$ et $x \to \frac{4}{(2-x)^2}$ qui sont en fait dans l'herbier usuel des étudiants, la courbe représentative de la fonction $x \to \frac{(2+x)}{(7-x)}$. d'allure correcte a été tracée avec un décalage vertical (le tracé correspondait à celui d'une fonction ayant une limite nulle à l'infini). En revanche, le tracé de la courbe repréentative de la fonction $x \to \sqrt{x}$ n'a pas été immédiat, les étudiants déclarant ne pas s'en souvenir ont hésité sur la forme – mais pas sur les limites. Pour la fonction $x \to x + \sin x$, c'était la panique : si les placements de quelques points ont été corrects, ceux-ci ont été reliés par une courbe régulière, les oscillations de la fonction $x \to \sin x$ semblant ne pas intervenir. Bien que l'enseignant ait proposé de placer plus de points et de réfléchir à l'incidence des oscillations bien connues de la fonction $x \to \sin x$ sur le tracé de la courbe représentative de cette fonction, le tracé n'a pas été produit. Enfin, pour les fonctions $\to \frac{\sin x}{x}$ et $x \to \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, l'échec a été total.

5. Description de notre ingénierie dans sa version actuelle

Les résultats de cette expérimentation nous ont amenés à préciser les choix de notre ingénierie. Sa version actuelle est présentée ci-après. Elle a été expérimentée début 2015 par un membre de notre groupe[13].

[12] Première année de licence
[13] Voir Sénéchaud (2015) pour un compte-rendu de l'expérimentation.

Nous avons choisi de ne pas utiliser de logiciel graphique pour deux raisons. D'une part, pour repérer ce que les étudiants ont retenu des représentations de fonctions par des courbes, après avoir utilisé largement ce type de support informatique au lycée. D'autre part, parce que l'utilisation de tels outils ne se justifie pas ici, l'objectif de cette ingénierie étant l'énoncé d'une définition formelle et la motivation de son intérêt.

Situation 1. Une étude qualitative globale de quelques fonctions (monotones, non monotones, ayant ou non une limite en l'infini, et des points de non-définition en 0, ou autre x_0) : $x \to x^3$; $x \to \sqrt{x}$; $x \to \frac{1}{x}$; $x \to x + \sin x$; $x \to \frac{4}{(2-x)^2}$; $x \to \frac{(2+x)}{(7-x)}$; $x \to \frac{\sin x}{x}$; $x \to \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. La tâche demandée est double : tracé de l'allure générale de la courbe de chacune de ces fonctions sur l'intervalle $]0; +\infty[$, puis classement – le critère du classement n'est pas explicité, mais on peut faire l'hypothèse que ce sera en relation avec les comportements supposés à l'infini. Les critères de classement pourraient être les suivants : limite finie ou infinie en $+\infty$, limite finie ou infinie en x_0, asymptote ou non. Les fonctions $x \to x^3$; $x \to \sqrt{x}$; $x \to \frac{1}{x}$ ne devraient pas poser (trop de) difficultés, de même que les fonctions homographiques usuelles.

Situation 2. Reprise et adaptation de la consigne 2 de la partie concernant la parabole de Robinet. Étude locale des courbes des fonctions $x \to x^2$ et $x \to \sqrt{x}$ avec la question : « Comment x pour que x^2 (respectivement $\sqrt{x}$) soit supérieur à 25, à 10^2, à 10^6 ? ». Il s'agit, pour chacune de ces fonctions, de trouver un nombre A à partir duquel les valeurs de la fonction sont plus grandes qu'une valeur donnée. Les encadrements matérialisés par des bandes devraient permettre de rendre visibles les différences de comportements en l'infini de ces deux fonctions, et susciter l'intérêt d'une formalisation de « limite en $+\infty$ » comme outil nécessaire pour préciser ces différences (voir par exemple Roh 2010).

Situation 3. Formalisation de la « limite infinie en $+\infty$ » illustrée avec les fonctions étudiées en situation 1 et 2 ($x \to x^2$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to x^3$ et $x \to x + \sin x$). Puis formalisation de la « limite finie en $+\infty$ », exemplifiée sur d'autres fonctions vues en situation 1 : $x \to \frac{1}{x}$; $x \to \frac{\sin x}{x}$; $x \to \frac{4}{(2-x)^2}$; $x \to \frac{(2+x)}{(7-x)}$ avec des représentations par des encadrements (bandes). Réinvestissement : étude de la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\lfloor 100 - x \rfloor$, en demandant de la tracer sur l'intervalle $[100; 110]$. On pourrait demander deux graphiques différents, dans une tâche papier-crayon, dans l'objectif de créer un herbier consistant de fonctions, dont on étudierait le comportement dans certaines « fenêtres ».

Situation 4. Définition de la limite en un point. Cette dernière phase distingue les notions de « limite de suite » et « limite de fonction ». Nous suggérons que le point choisi ne soit pas exclusivement situé en $x = 0$ et que la fonction n'ait pas forcément une limite nulle – bien que des difficultés calculatoires soient fréquentes lorsque la limite est non nulle. On peut reprendre les fonctions déjà étudiées dans les situations précédentes : $x \to \frac{1}{x}$ en $x = 0$; $x \to \frac{4}{(2-x)^2}$ en $x = 2$; $x \to \frac{(2+x)}{(7-x)}$ en $x = 7$; $x \to \frac{\sin x}{x}$ en $x = 0$; $x \to \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x = 0$. On pourrait rajouter $x \to \frac{(x^2-1)}{(x+1)}$ en $x = -1$.

6. *Conclusion*

Même si l'ingénierie de Robinet a trente ans, elle est, selon nous, toujours d'actualité dans son principe et ses objectifs pour des étudiants de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences. Définir le concept de « limite de fonction » de manière formelle et motiver le passage à l'abstraction par des situations bien choisies, ne peut qu'être positif pour une construction adéquate de ce concept chez les étudiants. Nous proposons dans ce texte des aménagements de cette ingénierie qui nous ont semblé pertinents pour amener à cette formalisation, en essayant de réduire le « saut conceptuel » – même s'il ne peut être totalement supprimé – entre une notion intuitive de la limite d'une fonction et le concept mathématique.

IV. CONCLUSION

A l'issue de ce retour sur des ingénieries anciennes sur le concept de convergence, un certain nombre de questions se posent.

D'abord, les deux ingénieries ici présentées ne sont évidemment pas les seules possibles. Par exemple, dans le même esprit, on peut citer l'exemple présenté par T. Lecorre dans le cadre du *débat scientifique* (Ghedamsi & al., à paraître). Pour une introduction possible dans le cadre de la problématique du « *degré choisi d'approximation de la limite* », on peut lire avec profit (Bloch 2000 et Ghedamis 2008), en pensant à la manière de l'adapter pour le niveau licence. Cette problématique reste fondamentale pour rendre opérationnel le concept de limite, et la suite dans l'enseignement des ingénieries proposées devrait de toute façon prendre en charge cette question.

Cela soulève une question dont la réponse dépend des projets curriculaires pour la licence : *jusqu'à quel degré d'expertise* sur la notion de convergence doit-on, peut-on, mener les étudiants ? Rendre cette notion opérationnalisable signifie la mettre en œuvre dans des problèmes non immédiats, et alors la question des enseignements de méthodes de résolution de problèmes dans ce domaine se pose. Voir à ce sujet (Rogalski 1990) et le projet de contribution (Rogalski et Rogalski 2015) dans ce même GT7 de EMF2015.

Une autre question, laissée totalement ouverte par le choix de présenter ces deux ingénieries, est celle *de l'ordre des enseignements entre convergence des suites et limites de fonctions*. Bien sûr, la réponse dépend des choix de curriculums concernant l'enseignement de l'analyse (nombres, fonction, convergence, continuité, dérivabilité…).

Enfin, une question très générale mériterait de plus amples réflexions : la formalisation d'une nouvelle notion dépend de son mode d'introduction, et ceux présentés ici relèvent plutôt d'un choix de considérer la notion de convergence comme un concept de type FUG (Formalisateur, Unificateur, Généralisateur) au sens de Robert (2008). Rien ne dit qu'un autre choix, par exemple dans le cadre de la problématique de l'ordre d'approximation de la limite, ne pourrait modifier le concept de convergence et sa formalisation de façon à les présenter comme des « Réponses à un Problème » (RAP), voir Robert (2008).

REFERENCES

Bloch I. (2000) *Une situation d'introduction à la notion de limite en première scientifique : le flocon de Von Koch.* Dans I. Bloch : L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation, thèse de l'Université Bordeaux 1.

Bridoux S. (2016) Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique ? *Projet pour INDRUM 2016.*

Dorier J.L. (Ed.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7.2, 5-31. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Durand-Guerrier V. et Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.

Durand-Guerrier V. (2013) Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, in *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : la Pensée Sauvage Editions.

Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université*. Thèse Université de Tunis et Université Victor Segualen, Bordeaux 2.

Ghedamsi I., Haddad S., Lecorre T. (2015) Les notions de limite et d'intégrale, du secondaire au supérieur, TD à l'Ecole d'été de didactique des mathématiques, à paraître dans *les actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques*. Brest, 19-26 août 2015.

Gueudet G. (2008) Perspectives en didactique des mathématiques. La transition secondaire-supérieur : résultats et perspectives des recherches didactiques. *Actes de la XIII^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*, 159-175.

Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse. Repères IREM 10, 123-159.

Robert A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. Bulletin de l'APMEP 340, 431-449.

Robert A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe, in Vandebrouck F. (Ed .) *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants* (pp. 45-56). Octarès, Toulouse.

Robinet J. (1983) Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(3), 232-292

Rogalski M. (1990) Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode. Commission Inter-IREM Université *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (pp. 197-204). Lyon, Paris : IREM Université Paris-Diderot.

Rogalski J., Rogalski M. (2015) Enseigner des méthodes pour donner aux étudiants une expertise en résolution de problèmes. Un exemple en licence. *Projet pour le GT7 de EMF2015*.

Roh K.H. (2010) An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity- *Educational Studies in Mathematics,* Volume 73, Issue 3, pp.263-279.

Sénéchaud P. (2015) Compe-rendu de passation en L1 d'une ingénierie sur la notion de limite de fonction. Site de la Commission InterIREM Université, sur le site de l'ADIREM : http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique394&var_mode=calcul

Vergnac M., Durand-Guerrier V. (2014) Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique. *Petit x* 96, 7-28.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactiqe des Mathématiques 10(2), 133-170.