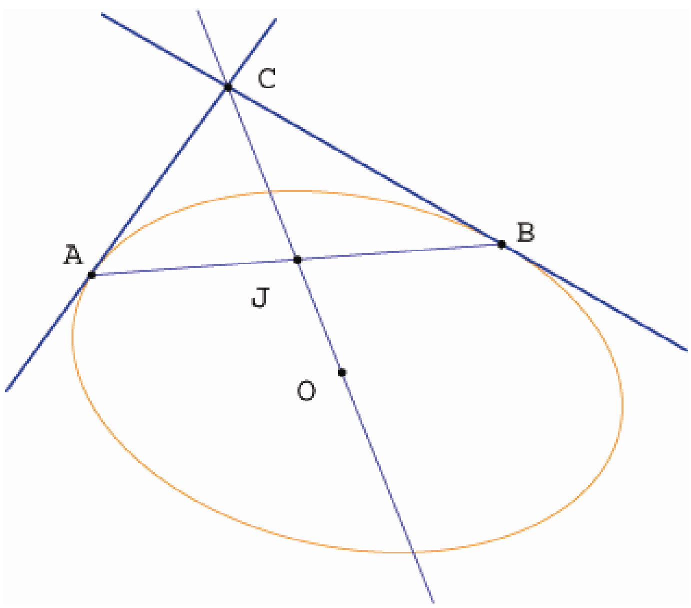
Apollonius au concours Centrale ?

Les programmes du Lycée, et ensuite ceux des classes préparatoires ou du Deug, ne recèlent plus beaucoup de Géométrie. C'est sans doute pourquoi on pose désormais aux candidats des exercices qui auraient semblé très simples à leurs aînés. Rappelons que le concours *Centrale* a toujours réservé une place de choix à la Géométrie, à l'écrit comme à l'Oral.



Lisons le texte de cet exercice :

Deux tangentes en A et en B à une ellipse de centre O se rencontrent en C. Montrer que le milieu J de [AB] est situé sur la droite (OC).

Notre intention n'est pas de relever ici la modestie des connaissances en Géométrie qu'on attend des candidats et son rapport avec l'enseignement du secondaire.

Nous pensons même que dans le contexte actuel cet exercice est bien choisi et qu'il permet d'évaluer les initiatives et la formation du candidat. C'est dans les vieux pots qu'on cuisine les meilleurs ragoûts : cet exercice correspond à la 29ème proposition du livre II d'Apollonius[1] !

Il nous a paru intéressant de résoudre l'exercice par différentes méthodes et par ce biais de rappeler quelques propriétés des coniques. Comme cette configuration sert de base à de nombreux problèmes nous finirons par en citer quelques uns.

---

[1] *Lorsque, dans une section de cône ou dans une circonférence de cercle, deux tangentes se rencontrent, la droite menée de leur point de rencontre au point qui divise en deux parties égales la droite reliant les deux points de contact est un diamètre de la section.*

(*Les Coniques d'Apollonius de Perge*, trad. P. Ver Eecke, 1922, rééd. Blanchard, Paris, 1963 ; pp.145-146).

De la méthode naïve au *calcul symbolique*

Pour les élèves la façon naïve d'exprimer un problème consiste à calculer explicitement les coordonnées des points en fonction de paramètres (ici deux *u* et *v*). Comme la paramétrisation de l'ellipse est simple, on peut recomposer le problème à partir de deux points *A* et *B* de tangence. Les vecteurs directeurs t_A et t_B des tangentes sont facile à calculer (tous les points de l'ellipse sont réguliers). Choisir d'exprimer les deux tangentes sous forme paramétrique (ce qui a été fait) est, reconnaissons le, particulièrement maladroit, mais comme nous avons l'intention de faire faire le calcul par une machine il est préférable de conserver la symétrie des notations.
Cette approche, menée par un élève à la main, trouverait sa difficulté dans le calcul du point *C*. Mais cela ne gêne pas *Maple* dont l'usage est autorisé au concours.

```
> restart:
>
Définition des points de contacts et des tangentes
> A:=[a*cos(u),b*sin(u)];tA:=diff(A,u);
  B:=[a*cos(v),b*sin(v)];tB:=diff(B,v);
```

$$A := [a\cos(u), b\sin(u)]$$
$$tA := [-a\sin(u), b\cos(u)]$$
$$B := [a\cos(v), b\sin(v)]$$
$$tB := [-a\sin(v), b\cos(v)]$$

```
Le milieu de la corde est J
> J:=1/2*(A+B);
```

$$J := \left[\frac{1}{2}a\cos(v)+\frac{1}{2}a\cos(u), \frac{1}{2}b\sin(v)+\frac{1}{2}b\sin(u)\right]$$

```
On écrit les deux équations paramétriques des tangentes pour obtenir leur intersection C
> S:=expand(A+alpha*tA-(B+beta*tB));
  par:=solve({S[1],S[2]},{alpha,beta});
  assign(%);
  C:=simplify(map(factor,expand(A+alpha*tA)),trig);
```

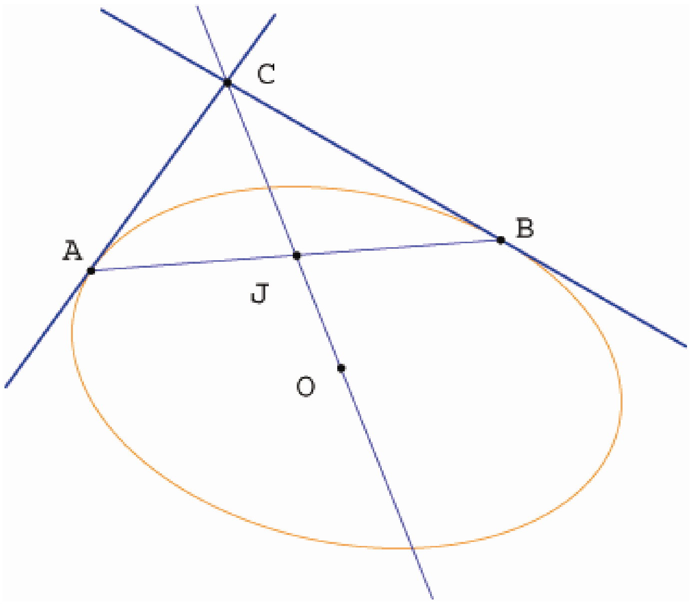
$$S := [a\sin(v)\beta - a\sin(u)\alpha - a\cos(v) + a\cos(u), -b\cos(v)\beta + b\cos(u)\alpha - b\sin(v) + b\sin(u)]$$
$$par := \left\{\beta = -\frac{\cos(u)\cos(v)-1+\sin(v)\sin(u)}{-\cos(u)\sin(v)+\cos(v)\sin(u)}, \alpha = \frac{\cos(u)\cos(v)-1+\sin(v)\sin(u)}{-\cos(u)\sin(v)+\cos(v)\sin(u)}\right\}$$
$$C := \left[-\frac{a(-\sin(u)+\sin(v))}{-\cos(u)\sin(v)+\cos(v)\sin(u)}, \frac{b(-\cos(u)+\cos(v))}{-\cos(u)\sin(v)+\cos(v)\sin(u)}\right]$$

```
La fonction align vérifie l'alignement de O, J et C
> align:=proc (h,k) simplify(expand(h[1]*k[2]- h[2]*k[1]),trig) end :
  align(J,C);
```

$$0$$

```
>
```

De la méthode implicite



Appelons (E) cette ellipse de centre O. Une méthode implicite consiste à résoudre le problème sans calculer explicitement les cordonnées de C.

Soit un repère orthonormé du plan dans lequel une équation de (E) s'écrit : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Considérons les points $A(x_0, y_0)$ et $B(x_1, y_1)$ deux points de (E) et J le milieu de [A,B].

Les équations des tangentes t_A et t_B sont données par : $\frac{x\, x_0}{a^2} + \frac{y\, y_0}{b^2} = 1$ et, $\frac{x\, x_1}{a^2} + \frac{y\, y_1}{b^2} = 1$.

Les coordonnées de C vérifient l'équation : $\frac{x}{a^2}(x_0 - x_1) + \frac{y}{b^2}(y_0 - y_1) = 0$.

$$\mathrm{Det}\,(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} \frac{x_0 + x_1}{2} & x \\ \frac{y_0 + y_1}{2} & y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[y\,(x_0 + x_1) - x\,(y_0 + y_1)]$$

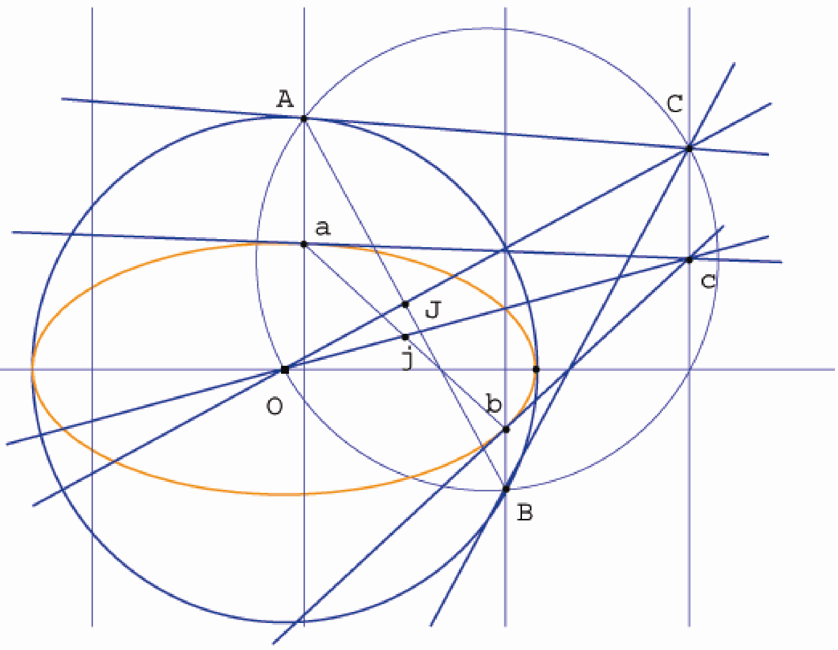
$\mathrm{Det}\,(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\frac{x}{y_0 - y_1} b^2\, [(x_1^2 - x_0^2)/a^2 - (y_0^2 - y_1^2)/b^2] = 0$ car A, B sont[2] sur (E). Cette relation prouve l'alignement des trois points C, J et O.

---

[2] On remarquera que les points A et B étant distincts, on a, par exemple, $y_0 - y_1 \neq 0$ sinon….

Un peu de géométrie

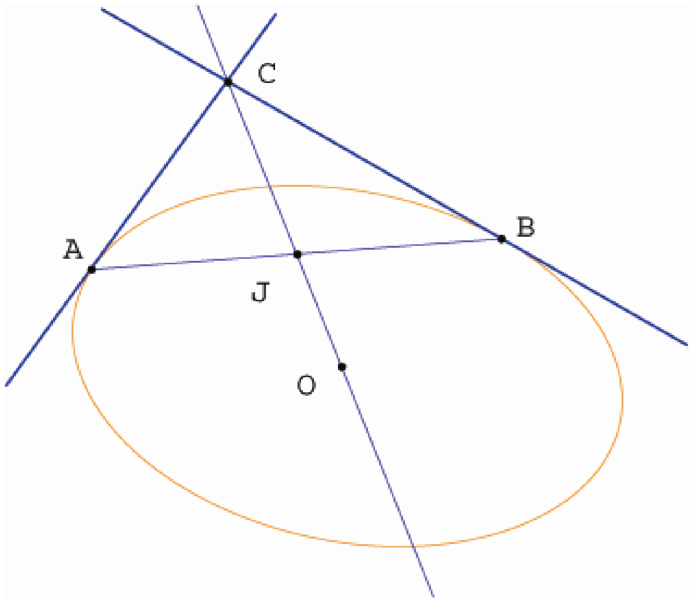
Si l'on sait que toute ellipse est obtenue à partir d'un cercle de même centre par une affinité (orthogonale), il suffit de résoudre le problème dans le cas d'un cercle. En effet l'affinité, qui est une application affine bijective envoie les droites sur les droites, et elle conserve l'alignement et les milieux.



Dans le cercle le problème est évident puisque pour tout point C la droite (OC) est axe de symétrie.

L'affinité orthogonale qui transforme une ellipse en son cercle principal est donc ici (et ailleurs) particulièrement utile. Elle fut enseignée, elle aussi, jusqu'au début des années 90. Depuis que les écrans de télévision ou d'ordinateur s'adaptent facilement à plusieurs formats, cette transformation a une représentation sensible pour nos élèves ce qui n'était pas le cas il y a plusieurs dizaines d'années. Ils comprennent naturellement, car ils l'ont souvent observé, comment un changement d'échelle sur l'axe des ordonnées affecte les cercles de la figure. Pourquoi l'avoir abandonnée ?

Explication projective



Celui qui connaîtrait un peu de géométrie projective pourrait raisonner ainsi.

Par construction la polaire par rapport à la conique du point C est la droite C^* = (AB). Comme la polaire, par rapport à la même conique du centre est la droite O^* à l'infini, l'intersection $C^* \cap O^*$ de ces deux polaires est le pôle Ω de la droite (OC). Si J est l'intersection de (AB) avec (OC), la division

[A,B,J, Ω] est donc harmonique, autrement dit J est le milieu de [AB].

Suit une brève exposition des notions qui éclairent ce raisonnement. Le parti pris a été fait d'un discours algébrique. Evidemment ceci transforme et gomme l'élégance de la rédaction projective. Nous espérons toutefois que les étudiants qui liraient ce texte découvriraient qu'on ne leur a pas enseigné la géométrie orthogonale pour des prunes.

Une présentation partielle mais rapide de la géométrie projective consiste à considérer que, un repère affine ayant été fixé, tous les points sont associés à des triplets $(x,y,1)$, ou plus généralement $(x,y,z) \approx (x/z,y/z,1)$ avec z non nul, sous la relation de proportionnalité. Les triplets qui manquent, de la forme $(x,y,0)$ sont alors associés aux points qu'on appelle les *points de la droite à l'infini*. Une de ses équations est z=0. On vérifie aisément qu'avec ces définitions « toutes les droites » sont sécantes.

Ceci admis l'équation d'une conique affine

$$a\left(\frac{x}{z}\right)^2 + 2b\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{z}\right) + c\left(\frac{z}{z}\right)^2 + 2\mathrm{p}\left(\frac{x}{z}\right) + 2q\left(\frac{y}{z}\right) + r = 0$$

prend, en fonction des *coordonnées projectives* la forme suivante (r étant non nul)

$$ax^2 + cy^2 + rz^2 + 2bxy + 2pxz + 2qyz = 0.$$

Si l'on introduit les matrices $\mathcal{X} = {}^t(x,y,z)$ et $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{pmatrix}$, l'équation s'écrit de manière algébrique

$${}^t\mathcal{X}\,\mathcal{A}\,\mathcal{X} = 0.$$

Dans la suite nous noterons $\mathcal{X}_M$ les coordonnées du point M.

On définit la polaire du point C par rapport à la conique, comme la droite d'équation ${}^t\mathcal{X}\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_C = 0$.

L'égalité ${}^t\mathcal{X}_B\mathcal{A}\,\mathcal{X}_C = 0$ signifie projectivement que le point C appartient à la tangente à la conique en B. C'est la version projective de l'équation de la tangente t_B trouvée au paragraphe « implicite ». Elle nous indique aussi que le point B appartient à la polaire de C. Il en va de même pour A.

En résumé la polaire de C par rapport à la conique est $C^* = (AB)$.

Si l'on prend désormais le point O comme centre du repère, la polaire du centre O de la conique est précisément la droite à l'infini O^*.

On définit le pôle d'une droite comme le point dont la droite serait la polaire. Il n'est pas difficile de voir que l'intersection $C^* \cap O^*$ est le pôle Ω de la droite (OC) puisque ${}^t\mathcal{X}_\Omega\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_C = 0$ et ${}^t\mathcal{X}_\Omega\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_O = 0$.

L'intersection de (OC) avec (AB) est le point J tel que $\mathcal{X}_J = \alpha\,\mathcal{X}_A + \beta\,\mathcal{X}_B$ tandis que sur la même droite (AB) on trouve le pôle Ω avec, par exemple, $\mathcal{X}_\Omega = \mathcal{X}_A - \mathcal{X}_B$ puisqu'il faut annuler la dernière coordonnée de ce point de O^*.

Comme le point J appartient à la polaire de Ω il faut que

$${}^t\mathcal{X}_\Omega\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_J = 0$$

soit

$$0 = {}^t(\mathcal{X}_A - \mathcal{X}_B)\,\mathcal{A}\,(\alpha\,\mathcal{X}_A + \beta\,\mathcal{X}_B) = \alpha\,{}^t\mathcal{X}_A\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_A - \beta\,{}^t\mathcal{X}_B\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_B + \beta\,{}^t\mathcal{X}_A\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_B - \alpha\,{}^t\mathcal{X}_B\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_A$$

Comme les points A et B sont sur la conique et comme ${}^t\mathcal{X}_B\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_A = {}^t({}^t\mathcal{X}_A\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_B) = {}^t\mathcal{X}_A\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_B$,

$$(\alpha-\beta)\,{}^t\mathcal{X}_A\,\mathcal{A}\,\mathcal{X}_B = 0$$

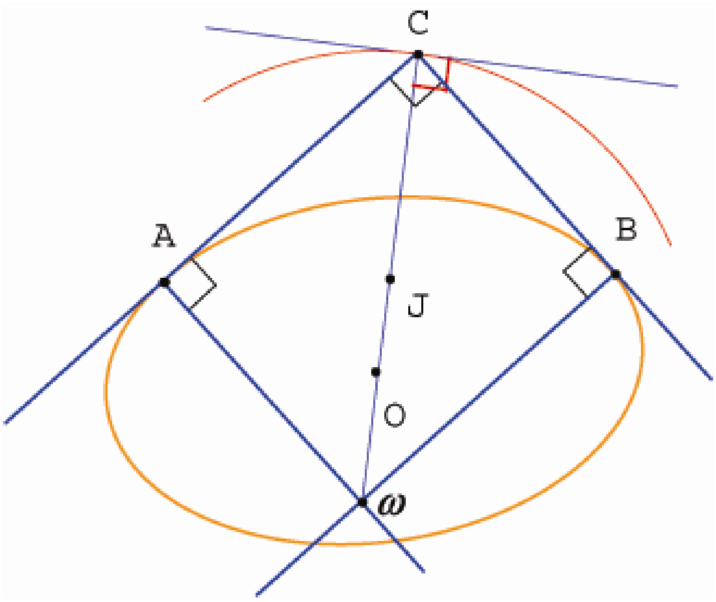
Le second facteur est non nul, car sinon B appartiendrait à la polaire de A qui est (AC).

Finalement les coefficients α et β sont égaux autrement dit le point J est le milieu de [A,B].

Quelques applications

Chasles et le cercle orthoptique[3]

Les droites (CA) et (CB) sont deux tangentes perpendiculaires à l'ellipse, respectivement en A et B. On envisage l'étude du mouvement du repère mobile (CA),(CB)) dans un repère fixe centré en O.



À un instant t donné de ce mouvement, le centre instantané de rotation ω se situe sur les normales à chacune des trajectoires de A, B et C. Or, la vitesse instantanée de à A l'instant t est sur la tangente (AC) (et respectivement la vitesse instantanée de B est sur la tangente (BC)).

Le centre instantané de rotation ω se trouve donc, à tout instant, à l'intersection des normales en A et B à l'ellipse.

Une fois J le milieu de [A,B] construit, nous observons les alignements suivants :

---

[3] Ce texte est tiré de la brochure Irem :

Hamel, Sinègre, Vivien, *Quelques problèmes obtenus en faisant tourner une équerre*, Irem de Rouen 1998, Num. R 126.

Les points ω, J, C sont alignés puisque ωACB est un rectangle.

La proposition d'Apollonius que nous venons de commenter montre que les points *O, J, C* le sont aussi.

En résumé O et ω sont tous deux sur la droite (JC) et donc la droite (ωC) pivote autour de O. La trajectoire de C appartient à un cercle de centre O puisque, à tout instant, la normale[4] passe par un point fixe[5].

La Hire et la construction des voûtes

Fontenelle, à la mort de Philippe de La Hire, explique dans son éloge[6] les origines de la publication par le fils du peintre Laurent de La Hire de son premier texte de Géométrie[7] :

> *M. Desargues qui était du petit nombre des Mathématiciens de Paris, et M.Bosse, fameux graveur, avaient fait une première partie d'un Traité de la Coupe des Pierres, matière alors toute neuve ; mais quand ils voulurent travailler à la seconde partie, ils sentirent que leur géométrie s'embarrassait, et ils s'adressèrent à M. de La Hire, qui dans leur besoin les secourut de 7 propositions tirées de la Théorie des Coniques. M. Bosse les fit imprimer en 1672, dans une Brochure* in-folio. *Ce fut par là que M. de La Hire avoua au public qu'il était géomètre.*

---

[4] On vient effectivement de démontrer que:

$$\vec{OC}\cdot\frac{d\,\vec{OC}}{dt} = 0 \text{ d'où } \frac{\mathrm{d}\,OC^2}{dt} = 0 \text{ c'est-à-dire } OC = \text{constante}.$$

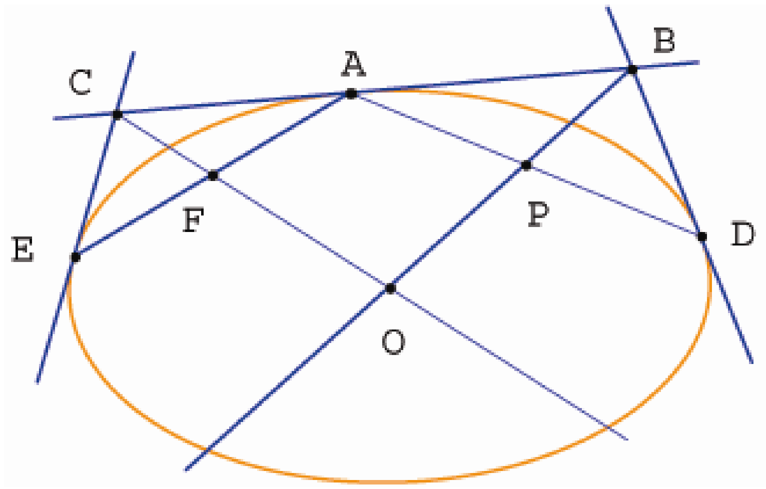
[5] Les textes de Chasles qui suivent donnent les principes du mouvement plan sur plan et la démonstration du cercle *orthoptique* de l'ellipse. CHASLES (Michel) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1878, 6 et *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1861 t.LII.

[6] *Histoire de l'Académie royale des Sciences* en 1699 et les Éloges historiques de tous les académiciens morts depuis ce renouvellement, Paris 1724, pp.461-484.

[7] *Observations de Ph. de La Hire, sur les points d'attouchement de trois lignes droites qui touchent la section d'un cône, sur quelques-uns des diamètres et sur le centre de la mesme section*... Règle universelle pour décrire toutes sortes d'arcs rampans...- A. Bosse (Paris) - 1672. Accessible par ***Gallica***.

De quoi s'agit-il ? On cherche à construire une voûte elliptique tangente en des points donnés à deux droites données, et tangente à une troisième droite. En termes modernes on cherche à construire une ellipse connaissant deux points et trois tangentes.

Pour aboutir de La Hire n'utilise ni une méthode inspirée de Desargues, ni l'hexagramme mystique de Pascal, toutes choses qu'il connaît très bien par ailleurs, mais il propose un savant mélange de géométrie apollonienne et de géométrie arguésienne ! Si ce court texte comporte 7 propositions dont l'étude dépasse cet article, remarquons pour finir que la première proposition donne la construction de deux diamètres, et éventuellement du centre, d'une conique tangente à trois droites données en des points déterminées.



Pour trouver le centre de la conique, les tangentes en *E*, *A* et *D* étant données, ainsi que les points de contacts, La Hire construit les intersections *C*, *B*, et *D*, ainsi que les milieux *F* et *P* (quand ils existent). En appliquant deux fois la proposition d'Apollonius on trouve le centre (ou la direction de la parabole dans ce cas singulier) à l'intersection des droites (*CF*) et (*PB*).