Intelligence du calcul

Michèle Artigue
LDAR & IREM, Université Paris-Diderot

CII-Université, Dijon, 18 janvier 2019

LDAR LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ

IREM
université PARIS DIDEROT PARIS 7

Plan

- L’émergence du discours sur l’intelligence du calcul dans le contexte de la CREM
- L’intelligence du calcul au fil de la scolarité primaire et secondaire : invariants et évolutions
- L’intelligence du calcul dans la transition lycée-université
- Réflexions et questions

La réflexion menée au sein de la CREM

- Une réflexion organisée pour chaque domaine autour de trois questions : Pourquoi ? Quoi ? Comment ?
- Le calcul :
  - un objet multiforme, plus difficile à cerner, renforçant la nécessité d'une réflexion épistémologique ;
  - des pratiques et des questionnements profondément modifiés par l'évolution technologique ;
  - un déplacement des équilibres traditionnels lié aussi à l'évolution des sciences mathématiques, avec notamment la place croissante du stochastique.

Quelques points essentiels

- Le calcul : une pratique en quelque sorte partout dense dans l'activité mathématique et multiforme qui fait du calcul un objet difficile à saisir sans limitations abusives.
- Une part essentielle du travail des mathématiciens consiste à rendre des objets accessibles au calcul, à développer les méthodes de ce calcul, à les conceptualiser et organiser ensuite au sein de théories.
- Rendre des objets accessibles au calcul suppose d'abord un travail de mathématisation mais cela passe aussi par l'élaboration de représentations ostensives qui supportent efficacement ce calcul.
- La puissance des mathématiques réside enfin dans la capacité à algorithmiser et automatiser le calcul sur les représentations ostensives de ses objets, une automatisation qui lorsqu'elle est réussie permet de mettre l'intelligence au service d'autres tâches, et est donc nécessaire à l'avancée de la connaissance.

La réflexion menée au sein de la CREM

- Un objet à réhabiliter face à une vision commune réductrice et problématique, qui entache l'image même des mathématiques dans la société :
  - en mettant en évidence les deux facettes indissociables qui font sa puissance : *automatisation* et *raisonnement* ;
  - en soulignant sa *valeur épistémique* au delà de sa seule *valeur pragmatique*, c'est à dire le rôle qu'il joue dans la compréhension des objets mathématiques qu'il engage.
- Deux points particulièrement importants pour penser l'enseignement du calcul et le rapport aux outils de ce calcul.

L’émergence de l’expression

La seconde facette du calcul, celle du calcul raisonné, est donc tout aussi essentielle. Le calcul y est souvent stratégique, méthodique, à défaut d’être automatisé. Ainsi en est-il, par exemple, souvent pour l’élève, du calcul vectoriel qui soutient ses démonstrations géométriques dans le secondaire. Les outils de ce raisonnement, même s’ils puisent souvent dans un fond commun de calcul numérique et algébrique, sont divers et étroitement dépendants des domaines concernés. La reconnaissance de formes, la recherche d’analogies, mais aussi le jeu sur les variations possibles, le sens des ordres de grandeur, le sens des expressions manipulées, sur lesquels nous reviendrons ultérieurement jouent un rôle clef dans ce pilotage raisonné que l’on désignera globalement comme « intelligence du calcul ». Développer cette intelligence du calcul qui seule permet de faire face aux situations non routinières, se doit d’être une ambition majeure de l’enseignement du calcul, quels que soient les objets sur lesquels il porte.

Plutôt que le Calcul, des calculs…

- Calcul arithmétique
- Calcul algébrique
- Calcul infinitésimal, différentiel et intégral
- Calcul des variations
- Calcul barycentrique
- Calcul vectoriel
- Calcul tensoriel
- Calcul des probabilités
- Calcul des prédicats…

Et pour chacun de ces calculs, une intelligence spécifique

Des dimensions transversales de l'intelligence du calcul

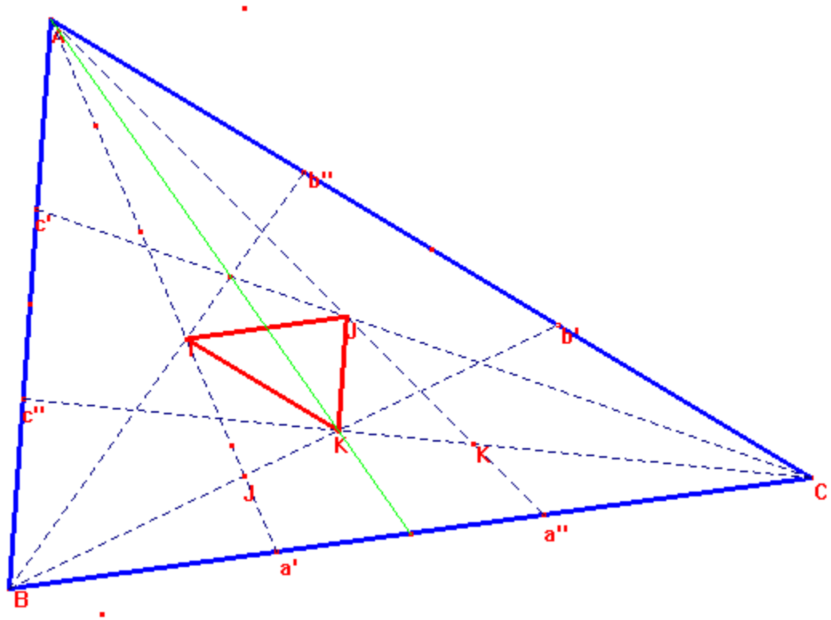
- **Modélisation** : le choix d'un type de calcul par rapport à une situation, une question, voire l'articulation de plusieurs types de calcul.
- **Sémiotique** : le choix de systèmes de représentation appropriés pour les objets engagés dans le calcul, la navigation entre ces systèmes.
- **Heuristique** : l'organisation, l'anticipation et le pilotage du calcul.
- **Validation** : le contrôle de ses résultats, en cours ou en fin de réalisation.

Mais encore une fois des formes spécifiques suivant les domaines et les types de calcul

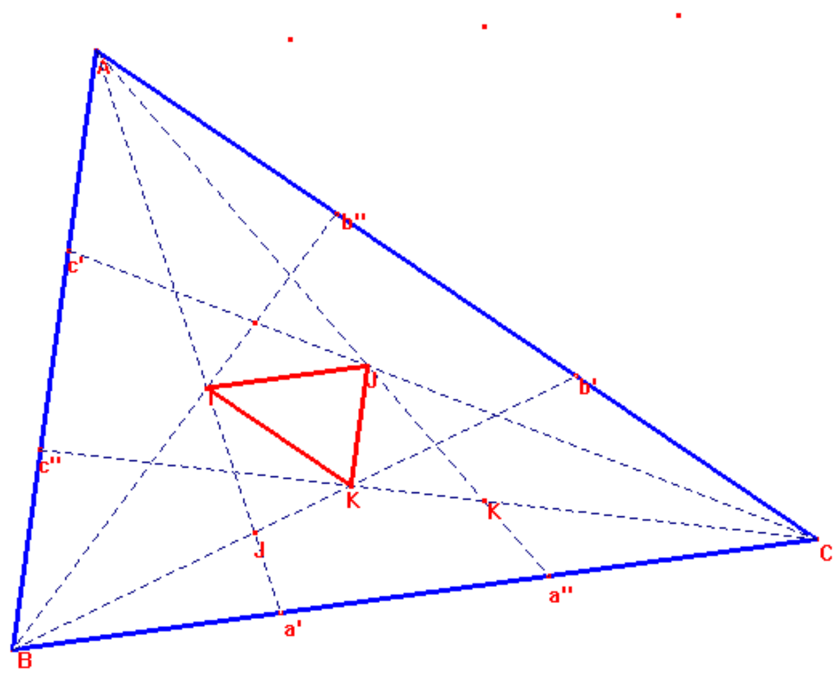
Un premier exemple : calcul barycentrique

- On se donne un triangle ABC. On partage en trois chacun de ses côtés. On joint les points ainsi obtenus aux sommets opposés.
- On considère le triangle IJK formé par les intersections des segments « adjacents ».
- Déterminer la position du centre de gravité du triangle IJK.

Un premier exemple



La résolution par un calcul barycentrique



A : (1, 0; 0) ; B : (0, 1, 0) ; C : (0, 0, 1)

a' : (0, 2, 1) ; b'' : (2, 0, 1) ;

D'où I : (α, 2β, β) et (2β', α', β')

D'où α=2β et I : (2β, 2β, β)

Par permutation circulaire :

J : (2β, β, 2β) et K : (β, 2β, 2β)

D'où G : (5β,5β, 5β)

IJK ET ABC ont même centre de gravité

L'intelligence de ce calcul

- Le choix du type de calcul : un calcul barycentrique, motivé par plusieurs raisons :
  - centre de gravité,
  - conservation de la symétrie,
  - constructions par intersections, alignements.
- Le choix de représentation : les coordonnées barycentriques des points dans le repère (A,B,C).
- Anticipation : on devrait trouver pour le centre de gravité du triangle IJK une représentation du type (a,a,a).
- Pilotage : exprimer en termes de barycentre les appartenances aux segments, en suivant la construction ; utiliser la symétrie des notations.
- Contrôle : local (coordonnées de I), global.

L’intelligence du calcul au fil de la scolarité

Une intelligence qui se construit progressivement

- Via la construction de répertoires de résultats, de formes, de techniques, de situations, qui constituent une référence perpétuellement enrichie et permettent :
  - de faire des choix de calcul, de représentation,
  - d'interpréter des représentations symboliques,
  - de piloter le calcul en fonction du but poursuivi,
  - d'en garder le fil et de le contrôler.
- Via le développement de la flexibilité entre systèmes de représentation sémiotique, mais aussi entre points de vue et cadres.
- Mais qui nécessite des adaptations, des remises en question, des déconstructions-reconstructions, au fur et à mesure que le calcul engage de nouveaux objets et domaines.

L'école élémentaire : l'intelligence du numérique

- Elle se construit via :
  - le calcul mental ou réfléchi, qui exploite les propriétés des nombres et des opérations,
  - les calculs d'estimation qui permettent anticipation et contrôle, jouent sur les ordres de grandeur,
  - par la mise en place des algorithmes de calcul, leur raffinement, leur adaptation,
  - par la planification requise par des calculs plus complexes.
- Le calcul est en fait d'abord pour les élèves un calcul intelligent. Un équilibre nécessaire est ensuite à trouver entre automatisation et flexibilité.

Un exemple de calcul dans un contexte de vie quotidienne

On m'a offert un grand vase cylindrique de 25 cm de diamètre et de 40 cm de haut que j'ai installé dans l'entrée. Je voudrais le remplir d'eau aux ¾.

- Je pense utiliser pour le remplir une bouteille d'eau vide de 1,5 litres. Il me faut entre 1 et 2 minutes pour chaque voyage. Est-ce raisonnable ?
- Et si, pour gagner du temps, je portais le vase à la salle de bains pour le remplir, puis le ramenais dans l'entrée ?

Quelle intelligence possible du calcul dans ce contexte ?

Un exemple de tâche complexe

(http://www.univ-orleans.fr/ires/irem/les-volumes-au-college)

Socle commun : tâche complexe

95 Porter un regard critique

LA SITUATION-PROBLÈME
Amélie aime bien cette publicité, mais quelque chose la chagrine. Qu'en pensez-vous ?

LES SUPPORTS DE TRAVAIL
Calculatrice, règle graduée, recherche sur Internet.

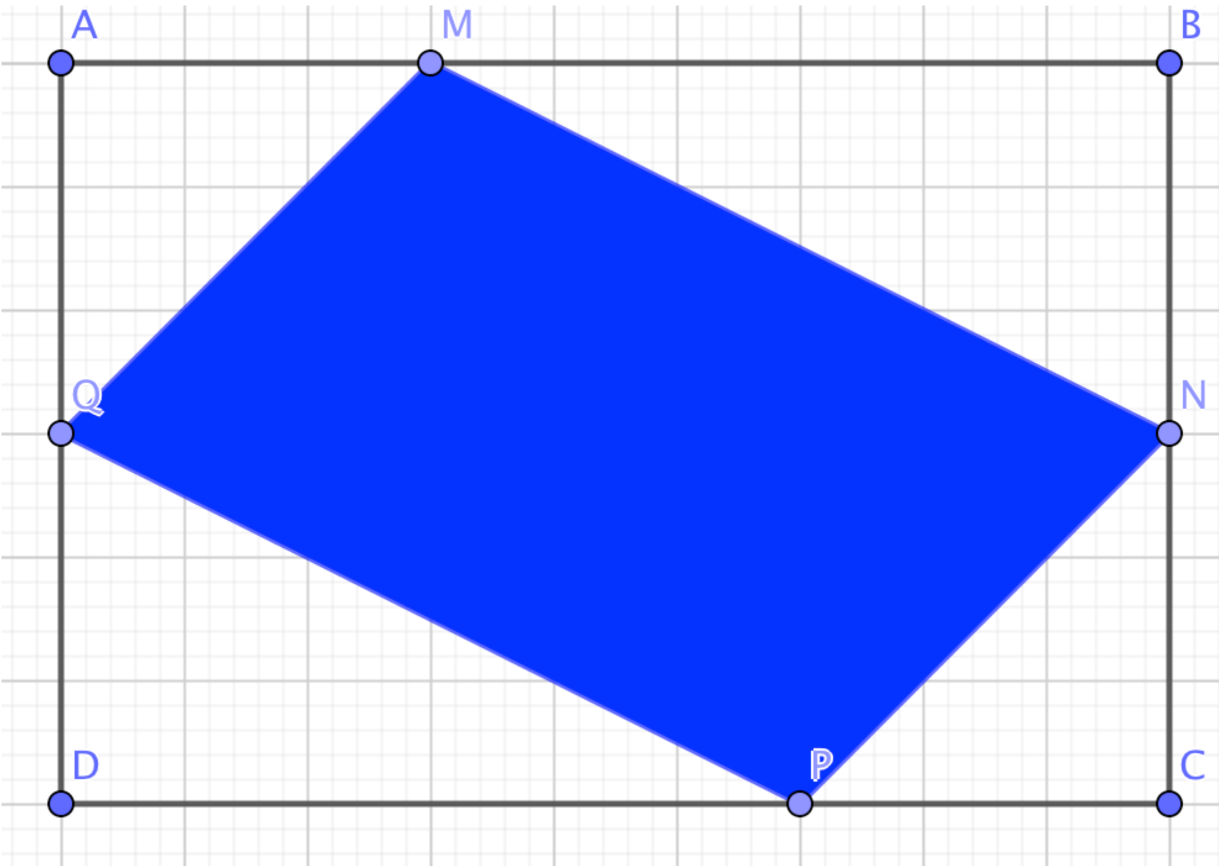
LA CONSIGNE
Toute piste de recherche, même non aboutie, figurera sur la feuille.

Transmath 4ᵉ - Nathan 2011

Le collège : l'entrée cruciale dans le calcul algébrique

- Un nouveau répertoire de résultats, de formes, de situations, à construire.
- Des changements décisifs dans les modes de pilotage et de contrôle du calcul.
- Des outils nouveaux pour travailler les ordres de grandeur (les puissances de 10).
- Le développement du calcul comme outil de généralisation et de preuve, qui engage les rapports entre raisonnement et calcul.

Un exemple : le quadrilatère qui tourne



ABCD est un rectangle de dimensions 9cm et 6cm. A partir de M pris sur [AB] tel que AM<=AD, on construit MNPQ tel que AM=BN=CP-DQ. Comment varie l'aire de MNPQ et quel est le minimum de cette aire ?

Une résolution classique

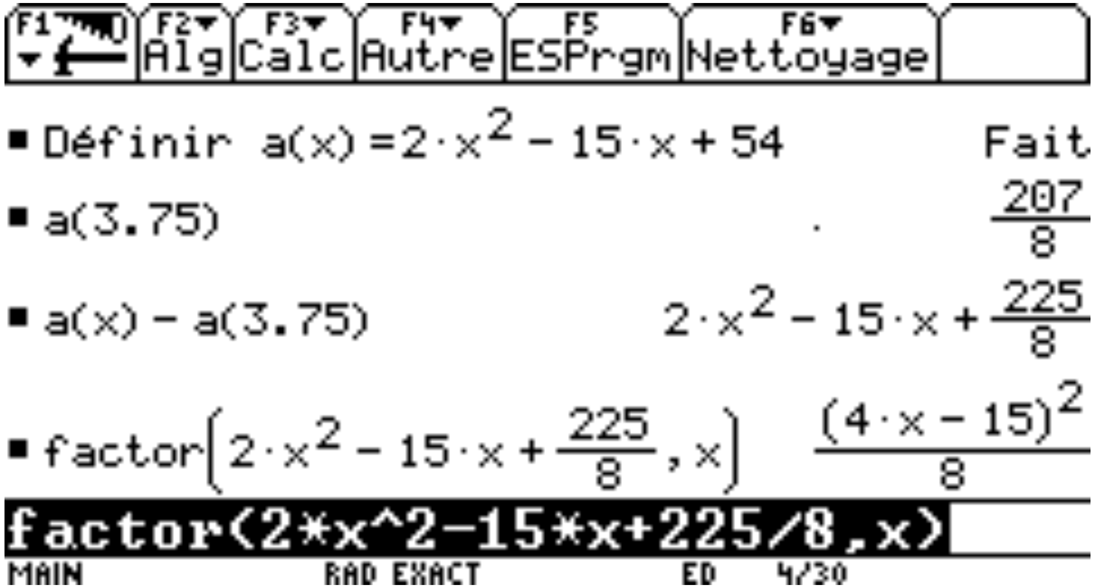
1. Calculer l'aire de MNPQ par soustraction des aires des triangles et arriver à l'expression : 54 - AM(6-AM) - AM(9-AM), soit en développant : $2*AM^2 – 15*AM + 54$
2. Mettre cette expression sous forme canonique :

$$2(AM-15/4)^2+207/8$$

et exploiter cette forme canonique pour conclure que le minimum est obtenu pour AM=15/4 cm et est égal à 207/8 cm^2

Une variante possible

- Conjecturer la valeur *a* de AM correspondant au minimum, via une exploration de la situation avec un logiciel, et vérifier que c'est bien le minimum par un calcul algébrique :

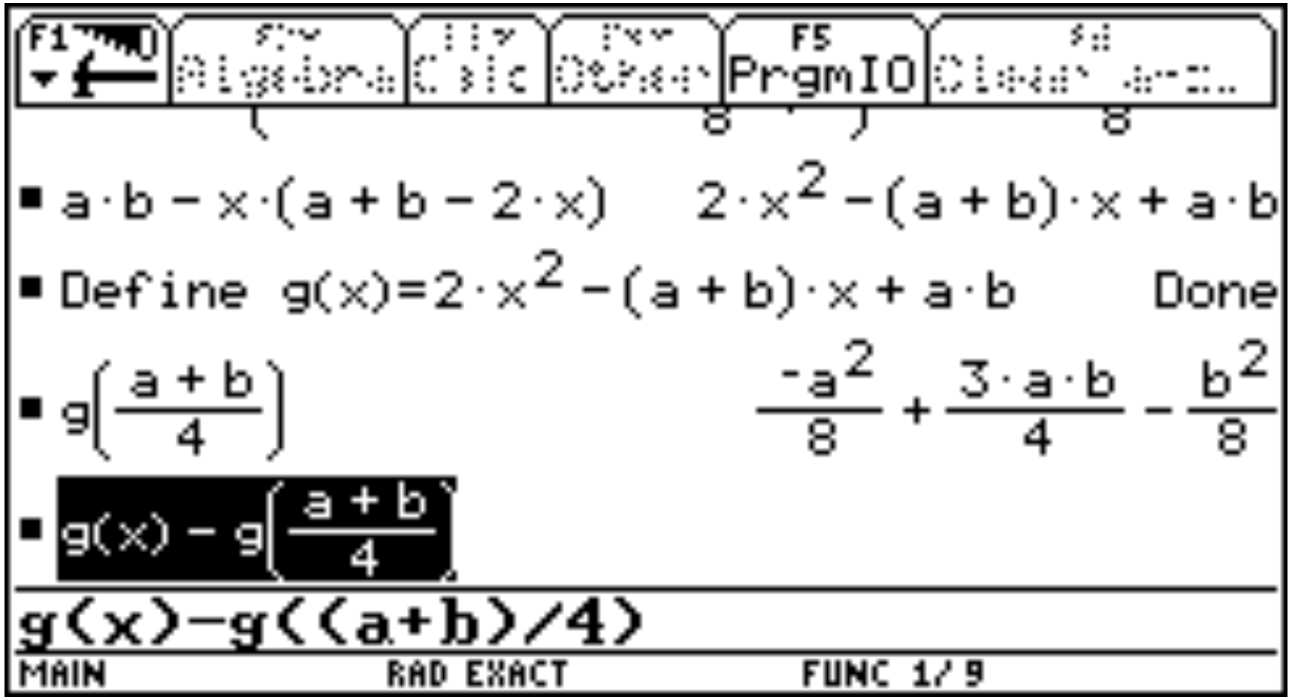


Un optimum particulier ?

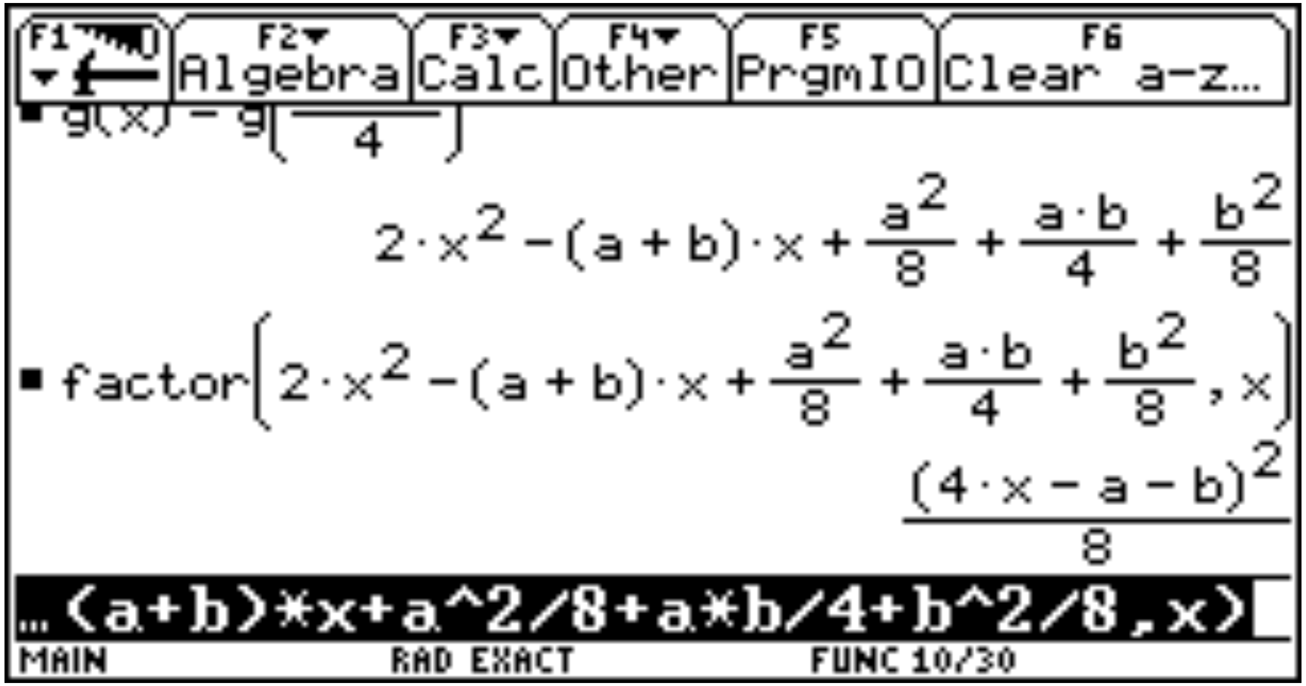
- Le minimum de l’aire est obtenu pour une valeur de x qui est le quart du périmètre.

- Est-ce un cas particulier où est-ce un phénomène plus général ?

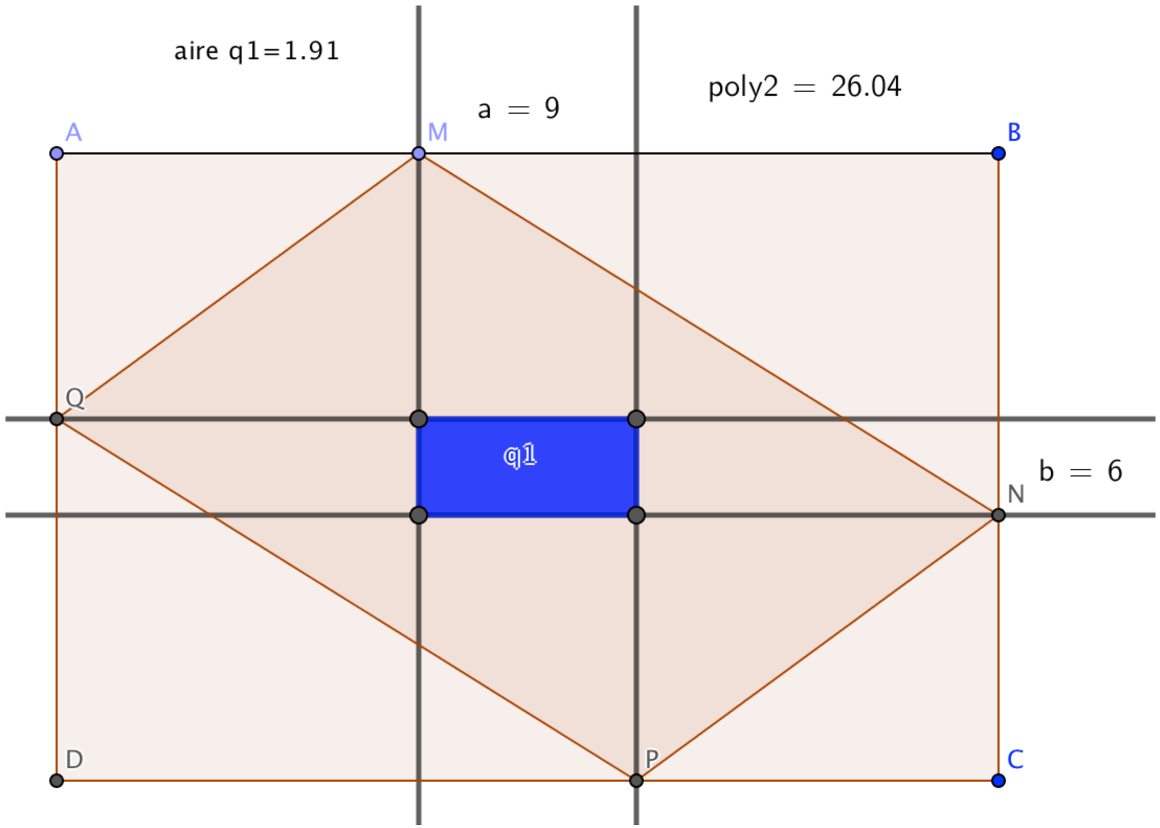
Le calcul algébrique : outil de généralisation



Le calcul algébrique : outil de généralisation



Une version géométrique du même calcul



Un second rebondissement : pourquoi $(a+b)/4$?

- Soit f la fonction qui associe au couple (a,b) la valeur pour laquelle est atteint le minimum : $(a+b)/4$
  - Symétrie du problème : $f(a,b)=f(b,a)$
  - Homogénéité : pour tout $k>0$, $f(ka,kb)=k.f(a,b)$
- D'où en posant $g(x) = f(x,1)$, l'équation fonctionnelle :

$$g(x)=x.g(1/x) \text{ avec } g(1)=1/2$$

- Si on sait que g est polynomiale, rationnelle voire analytique, alors g est nécessairement affine et est la fonction associée à ce problème particulier : $g(x)=(1+x)/4$

L’intelligence de ces différents calculs

- Etablissement de la conjecture sur le minimum.
- Choix effectué pour calculer l’aire.
- La preuve de l’extremum ou l’intelligence des formes algébriques.
- La première généralisation : l’adaptation du calcul.
- La deuxième généralisation : le changement de perspective, la rupture de la symétrie, puis l’extension progressive des espaces de fonctions considérées.
- La preuve géométrique : le jeu sur les décompositions-recompositions, le jeu entre minimum et maximum, le repérage du carré…

Une diversité de formes d’intelligence du calcul

Le lycée : des évolutions substantielles

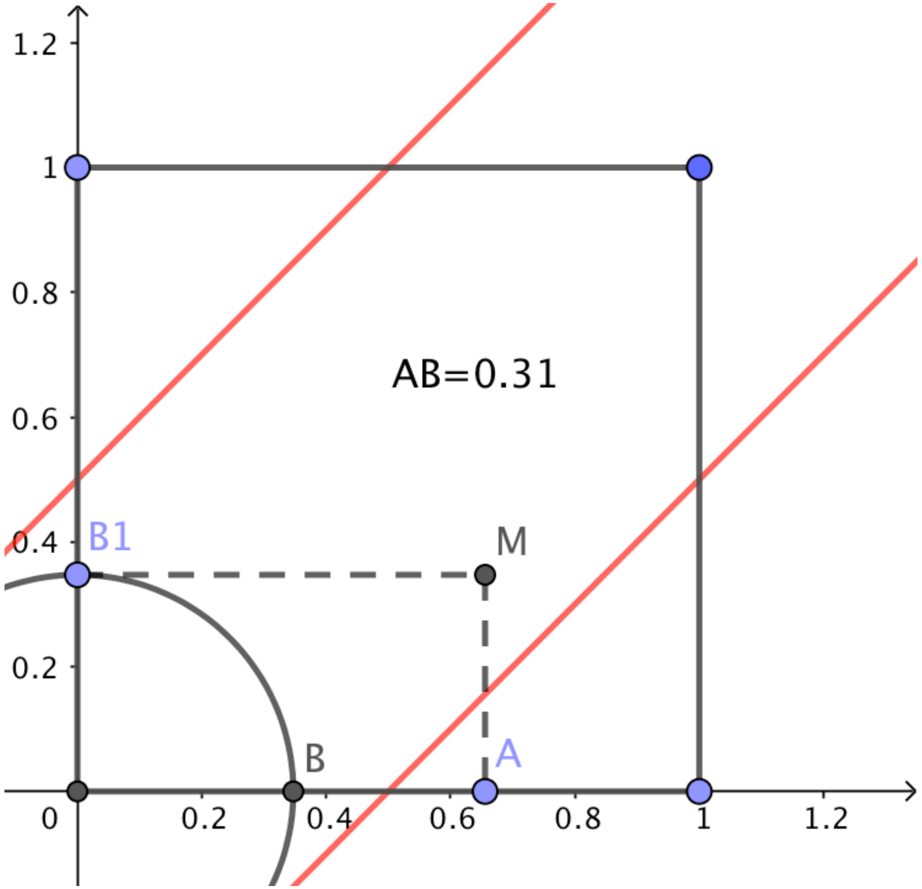
- L’extension du calcul algébrique à un calcul fonctionnel amorcée au collège, et l’évolution associée des problématiques, et systèmes de représentations.
- Une première approche de la localisation des calculs avec l’entrée dans le calcul différentiel et intégral et un nouveau rapport à l’approximation, même si l’analyse reste très algébrisée.
- Mais aussi :
  - l’extension du calcul à de nouveaux objets : vecteurs et nombres complexes pour certains élèves.
  - l’extension du calcul au champ des probabilités amorcé aussi au collège et à celui de la statistique.

L’extension au champ des probabilités

- Une mise des situations « en calcul » beaucoup plus problématique mettant clairement en évidence l’importance des choix de modélisation.
- Des intuitions trompeuses qui perturbent l’anticipation et le contrôle.
- Mais aussi des représentations nouvelles comme les arbres de probabilités, pour soutenir le calcul.
- Des heuristiques spécifiques : techniques de dénombrement dans une approche Laplacienne ; passage à l’événement contraire ; usage flexible de formules comme la formule de Bayes.
- Un rapport particulier aux instruments de calcul à travers la simulation d’expériences aléatoires, mais aussi l’intervention de très grands et très petits nombres.

Probabilités : le choix d'un modèle géométrique

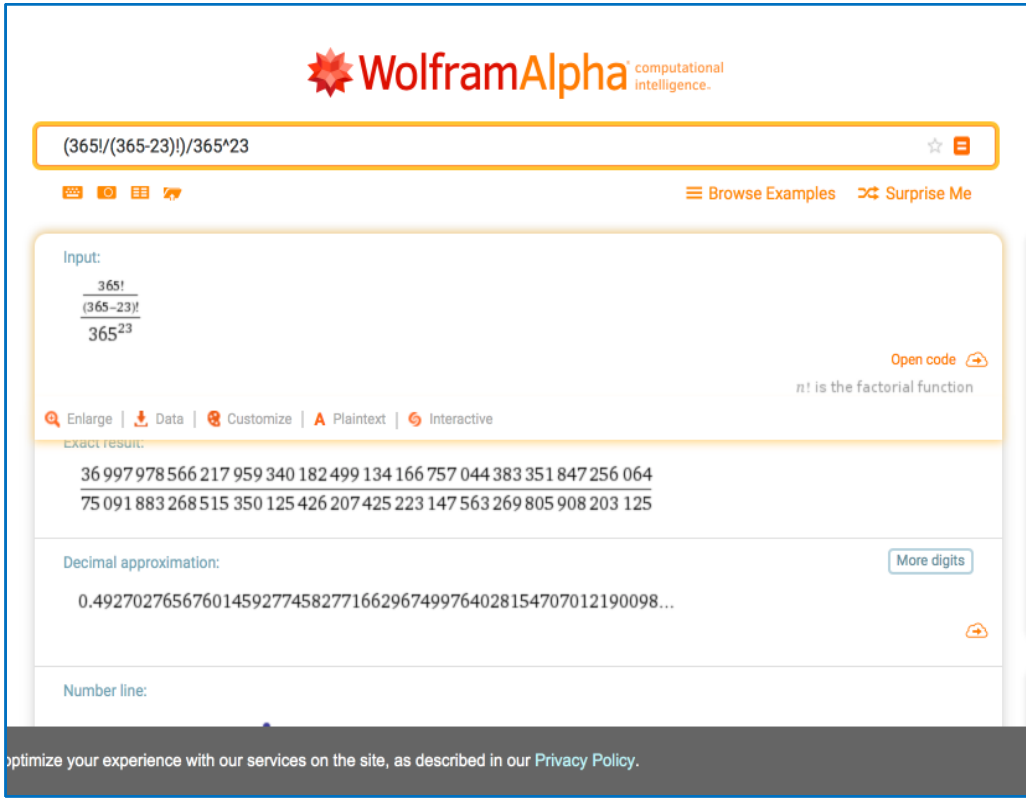
On choisit deux points A et B au hasard sur un segment de longueur 1.
Quelle est la probabilité pour que leur distance soit inférieure ou égale à ½ ?



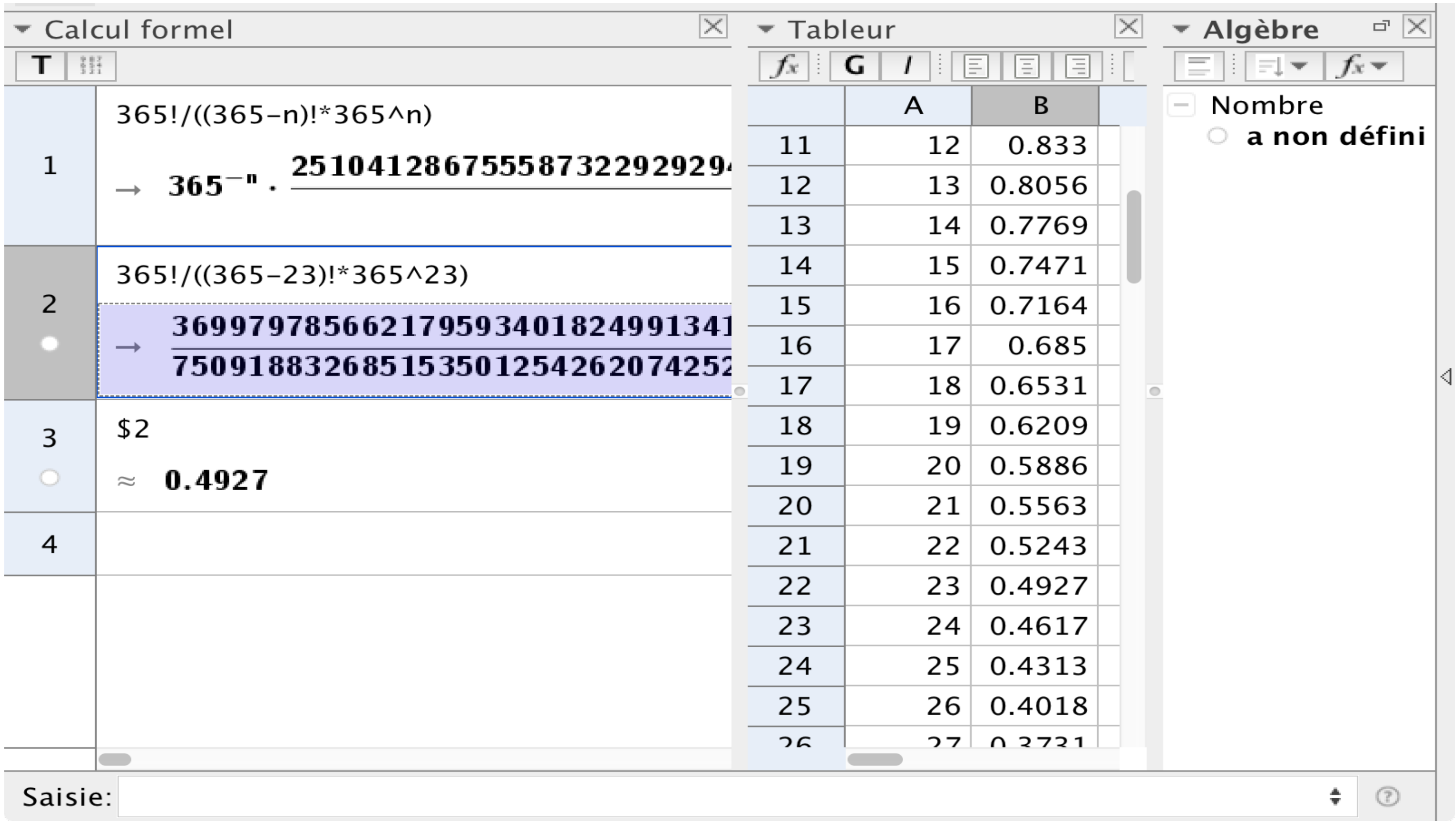
Probabilités : le passage à l'événement contraire

Le problème des anniversaires : A combien doit être au moins égal n pour que, dans une assemblée de n personnes, la probabilité que deux personnes soient nées le même jour de l'année soit supérieure ou égale à ½ ?

$1-P=365*364*\ldots(364-n+1)/365^n$
$P=1-365!/((365-n)!*365^n)$



L'instrumentation du calcul



La transition lycée-université

- L’entrée véritable dans le champ de l’analyse vu comme champ de l’approximation et ses conséquences sur le calcul.
- L’ inscription du calcul vectoriel dans le champ de l’algèbre linéaire.
- L’extension du calcul à de nouveaux objets dans le cadre de l’enseignement de l’algèbre des structures plus généralement, et les modification associées pour le calcul fonctionnel.

Analyse : l'intelligence dans la localisation du calcul

Un exemple au CAPES : étudier la série de terme général :

$$u_n=(-1)^n n\ln(n)/(n^2+1)$$

Ordre de grandeur de $|u_n|$

$\Downarrow$

Série alternée

$\Downarrow$

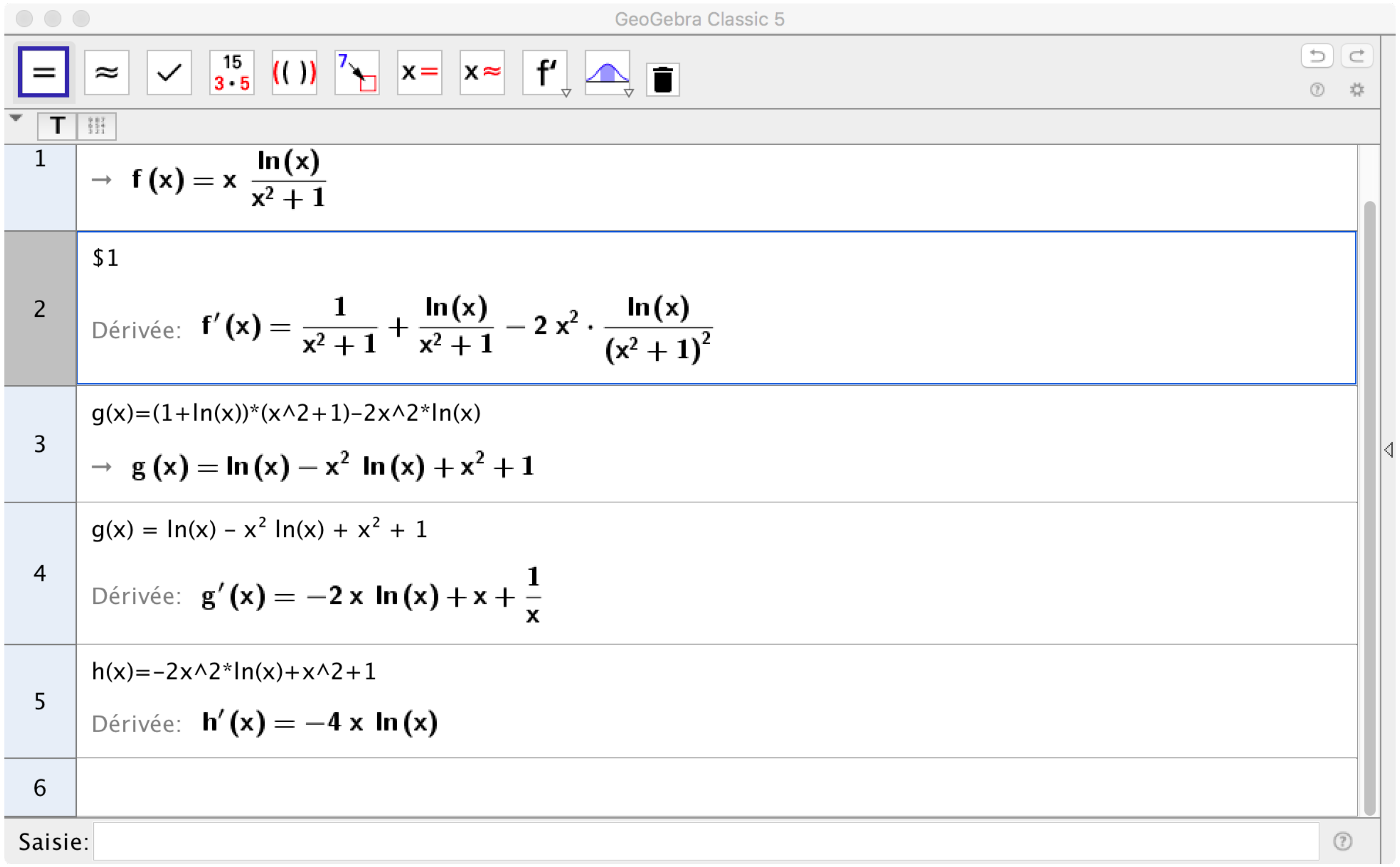
Limite : répertoire

Décroissance : $u_{n+1}- u_n$, u_{n+1}/ u_n , $f(x)$

$\Downarrow$

$f'(x)=((1-x^2)\ln(x)+1+x^2)/(1+x^2)^2$

Un calcul peu intelligent



La localisation des calculs et la prise en compte des ordres de grandeur

$$f'(x)=((1-x^2)\ln(x)+1+x^2)/(1+x^2)^2$$

- Penser à raisonner au voisinage de $+\infty$.
- Chercher le terme dominant.
- Ou utiliser un développement asymptotique de u_n lui-même pour se ramener à la somme de la série alternée plus simple de terme général $v_n=(-1)^n\ln(n)/n$ et d'une série absolument convergente.

En L1, exemples de sujets récents d'examen

L'extension du calcul aux nombres complexes :

Résoudre l'équation : $z^4 - 2\sin(\theta)z^2 + 1 = 0$

Quelle intelligence possible dans cette résolution ?

- Le changement de variable ($Z=z^2$) ?
- Une fois obtenues les racines : $Z1=\sin(\theta)+i\cos(\theta)$ et $\overline{Z1}$:
  - le choix de la représentation exponentielle pour terminer la résolution,
  - l'appui éventuel sur le cercle trigonométrique,
  - l'exploitation des relations entre paires de racines (opposition, conjugaison).

Le sujet

Examen final 1 Session

Durée : 3h.

Les documents et la calculatrice sont interdits

Exercice 1. [6 points]

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose : $P(z) = z^4 - 2\sin(\theta)z^2 + 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre l'équation $(\star)$ $Z^2 - 2\sin(\theta)Z + 1 = 0$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
2. Résoudre l'équation $(\star\star)$ $P(z) = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   On notera z_1, z_2, z_3 et z_4 les solutions de $(\star\star)$.
3. Factoriser P en produit de « facteurs linéaires » (autrement dit écrire $P(z)$ comme produit de nombres complexes de la forme $az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ indépendants de z).
4. **Dans la suite on suppose que $\theta = 0$.** Ainsi $(\star\star)$ s'écrit : $z^4 + 1 = 0$.
   Exprimer z_1, z_2, z_3 et z_4 sous la forme exponentielle et sous la forme algébrique (cas $\theta = 0$).
   Représenter géométriquement les points obtenus.
5. Calculer sous la forme exponentielle les racines 4^e de l'unité.
   Représenter géométriquement les points obtenus.
6. Quelle transformation du plan permet de passer des images des racines 4^e de l'unité dans le plan aux images de z_1, z_2, z_3 et z_4 dans le plan ?

L'algèbre linéaire

Exercice 2. [6 points]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (3, -1, 1),\ v_3 = (3, 2, \alpha)$$

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^3$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2, v_3, c'est-à-dire : $E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

1. Pour quelles valeurs de α la famille des vecteurs v_1, v_2 et v_3 est-elle libre ?
2. Donner une base de E et la dimension de E selon la valeur de α.
   Pour quelles valeurs de α a-t-on $E = \mathbb{R}^3$?
3. Dans le cas où E est différent de $\mathbb{R}^3$, donner une équation cartésienne de E.
4. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}$.
   Quelle est la dimension de F ? Justifier la réponse.
   Existe-t-il une valeur de α pour laquelle $E \subseteq F$?

L'algèbre linéaire

Exercice 3. [4 points]

Soit (S) le système d'équations linéaires d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

1. Expliquer en une phrase pourquoi l'ensemble G des solution de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une représentation paramétrique de G.
3. Donner une base de G.
   Quelle est la dimension de G ?

Des relations de liaison faciles à détecter qui rendent le calcul d'une représentation paramétrique immédiat :
(1)+(2)=3(3)
(3)+(4)=(1)

Les suites

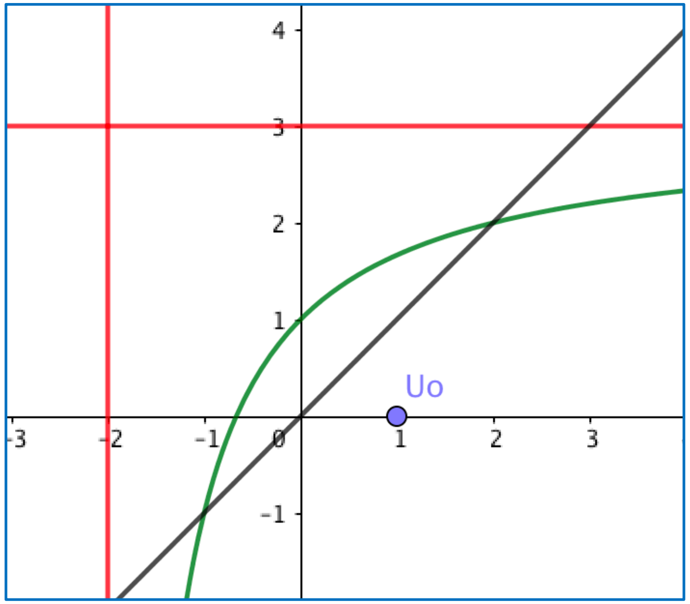
Exercice 4. [4 points]

Soit $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$. On définit une suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Pourquoi peut-on définir une telle suite $(u_n)_{n\geq 0}$?
   Montrer également que cette suite vérifie : $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 0$?
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.
3. Conclure que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Une suite définie par une relation de récurrence homographique et une valeur initiale particulière.

Une résolution extrêmement balisée mais des anticipations et contrôles possibles des calculs, par ailleurs très faciles, utilisant le fait que f(2)=2.



Examen de 2018

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1.

1. On considère le polynôme $Q(u) := u^2 + u - 1$, où $u \in \mathbb{R}$. Déterminez les racines de Q, notées u_+ et u_- de façon telle que $u_- < 0 < u_+$.
2. On considère le polynôme $P(z) := z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, où $z \in \mathbb{C}$. Simplifier $(z-1)P(z)$ de manière à obtenir une quantité étudiée en cours. En déduire les formes exponentielles des solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.
3. Montrez qu'il existe deux racines de P, notées z_+ et z_-, telles que, d'une part, $\operatorname{Re} z_+ > 0$ et $\operatorname{Im} z_+ > 0$ et, d'autre part, $\operatorname{Re} z_- < 0$ et $\operatorname{Im} z_- > 0$.
   Représenter sur une figure les racines du polynôme P en indiquant les points qui correspondent aux nombres z_+, $\frac{1}{z_+}$, z_- et $\frac{1}{z_-}$.
4. On note $T : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $T(z) = z + \frac{1}{z}$.
   Calculer $Q(T(z))$ et justifier rigoureusement que l'ensemble des solutions de l'équation $Q(T(z)) = 0$ coïncide avec l'ensemble des racines de P.
5. Exprimer u_+ et u_- en fonction de z_+ et z_-. En déduire une expression pour $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 2.
Soit S_α le système d'équations d'inconnues réelles x, y, z et t suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z - 2t = 1 \\ -3x + y - 4z - 2t = 1 \\ x - y + 2z + 2t = \alpha \end{cases}$$

où α est un paramètre réel.
On note A_α l'ensemble des solutions du système d'équations S_α.

1. Montrer que A_α n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Résoudre S_1 et en déduire A_1.
3. Déterminer, en le justifiant, les valeurs de α pour lesquelles $A_\alpha \neq \emptyset$.
4. Lorsque $A_\alpha \neq \emptyset$, donner une expression paramétrique (ou équation paramétrique) de A_α.

Exercice 3.
Soit F la partie de $\mathbb{R}^3$ donnée par l'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = l - 2m \\ y = -l + m \\ z = 3l - m \end{cases}$$

où l et m sont des paramètres réels.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. On pose $u_1 := (1, -1, 3)$ et $u_2 := (-2, 1, -1)$. Montrer que (u_1, u_2) est une base de F puis donner la dimension de F .
3. Déterminer une équation cartésienne de F.
4. On pose $v := (5, -1, -5)$. Montrer que $v \in F$.
   La famille (u_1, u_2, v) est-elle libre ? Justifier.

Exercice 4. MIASHS/Physique/CPEI/DLPC/STEP
Préciser si, dans chacun des cas suivants, le sous-ensemble A admet une borne supérieure réelle, une borne inférieure réelle (on ne demande pas de les calculer lorsqu'elles existent). Justifier, si besoin à l'aide d'un tableau de variation, chaque réponse.
(a) $A := \{x \in \mathbb{R};\ x^2 \leq 50\}$; **(b)** $A := \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq e^x < 1\}$; **(c)** $A := \{x \in \mathbb{R};\ x^2 + 1 \leq \frac{1}{2}\}$.

Exercice 4. Math/Math-Info

1. Que peut-on dire de la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{2^n + 3n}{1 + n^2}$?
2. Que peut-on dire de la limite de la suite de terme général $v_n = \dfrac{2^n + 1}{n!}$.
3. On pose $A := \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leqslant e^x < 1\}$. A admet-il une borne supérieure, une borne inférieure ? Justifier si besoin à l'aide d'un tableau de variation.

Exercice 5. MIASHS
(A) Donner la définition d'un sous-ensemble dense dans $\mathbb{R}$.
(B) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}$. Que peut-on dire sur sa limite, si elle existe, si l'on fait les hypothèses suivantes ?

1. on suppose que cette suite est minorée ;
2. on supppose que cette suite est non minorée.

Exercice 5. Math/Math-Info/Physique/CPEI/DLPC/STEP
Soit $\alpha \in]0, 1[$ et soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{2-x}$.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions : $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Réflexions et conclusions : des invariants en dépit des évolutions

- L’importance des répertoires, donc de leur consolidation et de leur enrichissement.
- L’importance de la flexibilité.
- Les jeux entre calcul exact et approché.
- Les reconstructions régulièrement nécessitées par l’entrée dans de nouveaux types de calculs.
- La question des rapports appropriés à développer avec les outils de calcul.

Réflexions et conclusions

- La diversité des formes que peut prendre l'intelligence du calcul, de la mise en calcul d'une situation particulière au travail d'un type de calcul comme objet en soi.
- Le fait que cette intelligence peut se cultiver au quotidien sans nécessiter pour autant l'engagement dans des calculs particulièrement complexes.
- Le fait que l'instrumentation du calcul, si elle est correctement gérée, ne fait pas obstacle à l'intelligence du calcul, mais qu'elle la soutient et lui offre des questionnements et des moyens nouveaux.
- Le constat que l'équilibre entre automatisation et intelligence du calcul semble encore loin d'être satisfaisant et que la situation ne s'améliore pas nécessairement dans la transition secondaire-supérieur.

Un calcul « rigolo » proposé par Marc Rogalski

Nous considérons le cône de base plane le cercle d'équation

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2, \tag{1}$$

et de sommet le point $S := (0,0,2R)$ de l'axe des z.

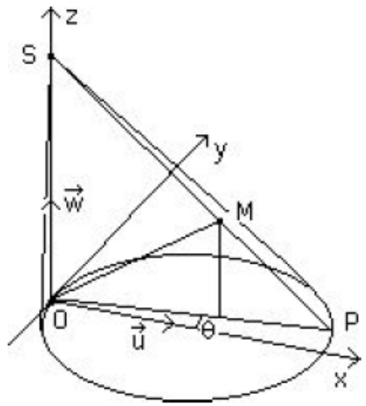


Figure 1: Le cône

Le problème est de calculer son aire latérale Σ par une formule close, puis d'en calculer une approximation. La difficulté est bien sûr que ce n'est pas un cône de révolution.

Nous paramétrons cette surface au moyen d'un angle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ et d'un nombre $t \in [0,1]$.

Soit P un point du cercle de base, de coordonnées polaires $(\theta, \rho = 2R\cos\theta)$, et paramétrons le segment SP, dont le carré de la longueur est

$$r^2 = 4R^2(1+\cos^2\theta), \qquad (2)$$

par:

$$\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OP}(\theta) + 2R(1-t)\vec{w} = 2R(t\cos\theta(e^{i\theta}\vec{u}) + (1-t)\vec{w}), \qquad (3)$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire sur l'axe des x et $\vec{w}$ celui sur l'axe des z.

Nous calculons alors le vecteur normal $\vec{N}(t,\theta)$ au point M de cette surface paramétrée, puis utilisons la formule classique

$$\Sigma = \int\int_{[0,1]\times[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]} ||\vec{N}(t,\theta)||\, dt d\theta. \qquad (4)$$

Dans cette formule, $\vec{N}$ est donné par

$$\vec{N} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial t} \wedge \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta}. \qquad (5)$$

Un calcul simple donne

$$\vec{N} = 4R^2 t\left[\cos^2\theta\,\vec{w} + \cos\theta(e^{i\theta}\vec{u}) + \sin\theta(ie^{i\theta}\vec{u})\right],$$

et on en déduit immédiatement que $||\vec{N}||^2 = 16R^4t^2(1+\cos^4\theta)$, et donc, d'après (4), que

$$\Sigma = \int\int_{[0,1]\times[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]} 4R^2t\sqrt{1+\cos^4\theta}\, dt d\theta.$$

Le calcul donne donc finalement

$$\boxed{\Sigma = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^4\theta}\, d\theta} \qquad (6)$$

$$\overrightarrow{OP} = R(1+\cos(2\theta))\vec{u} + R\ \sin(2\theta)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OP} + (1-t)\overrightarrow{OS}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial T} = R(1+\cos(2\theta))\vec{u} + R\ \sin(2\theta)\vec{v} - 2R\vec{w}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta} = -2R\sin(2\theta)\vec{u} + 2R\cos(2\theta)\vec{v}$$

$$\vec{N} = 2R^2(2\cos(2\theta)\,\vec{u} + 2\sin(2\theta)\,\vec{v} + ((\sin 2\theta)^2 + \cos 2\theta + (\cos 2\theta)^2)\vec{w})$$

$$\vec{N} = 4R^2(\cos(2\theta)\,\vec{u} + \sin(2\theta)\,\vec{v} + (\cos\theta)^2\,\vec{w})$$

4 Utilisation de la méthode du point milieu

Si $n \geq 2$, on partage en n intervalles égaux $I_p^n = [p\frac{\pi}{2n}, (p+1)\frac{\pi}{2n}]$ l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on note $m_p = \frac{\pi}{2n}\frac{2p+1}{2}$ le point milieu de I_p^n. La formule de Taylor au point m_p, pour $f(x) = \sqrt{1+\cos^4 x}$ et $x \in I_p^n$ donne

$$f(x) = f(m_p) + f'(m_p)(x-m_p) + f''(c)\frac{(x-m_p)^2}{2}, \qquad (15)$$

où $c \in I_p^n$.

On va utiliser l'inégalité suivante :

$$|f''(x)| \leq M_2 \quad \text{sur} \quad [0, \frac{\pi}{2}], \qquad (16)$$

où on précisera M_2 plus tard.

On remarque alors que l'intégrale de $x - m_p$ sur I_p^n est nulle, et donc on a l'inégalité

$$\left| \int_{I_p^n} f(x)\, dx - f(m_p)\frac{\pi}{2n} \right| \leq \frac{M_2}{2} \int_{I_p^n} (x-m_p)^2\, dx = \frac{M_2 \pi^3}{192 n^3}. \qquad (17)$$

Par sommation, on en déduit

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^4 x}\, dx - \frac{\pi}{2n}\sum_{p=0}^{n-1} \sqrt{1+\cos^4 m_p} \right| \leq \frac{M_2\pi^3}{192 n^2} \leq \frac{0,1615 M_2}{n^2}. \qquad (18)$$

Il reste à trouver un bon majorant de M_2. Un calcul facile donne

$$f''(x) = \frac{6\cos^2 x\, \sin^2 x\,(1-\cos^4 x) - 2\cos^4 x\,(1+\cos^4 x)}{(1+\cos^4 x)^{3/2}}, \qquad (19)$$

soit, en posant $\cos^2 x = u \in [0,1]$, $f''(x) = g(u)$, où

$$g(u) = \frac{6u(1-u)(1-u^2) - 2u^2(1+u^2)}{(1+u^2)^{3/2}} = \frac{2u(2u^3 - 3u^2 - 4u + 3)}{(1+u^2)^{3/2}}. \qquad (20)$$

Il n'est pas trop difficile de voir que $|g|$ est maximum sur $[0,1]$ en $u = 1$, c'est à dire que $|f''|$ est maximum pour $x = 0$, où elle vaut $\sqrt{2}$: on a $M_2 = \sqrt{2}$. Pour voir que $|g(u)| \leq \sqrt{2}$, on écrit que

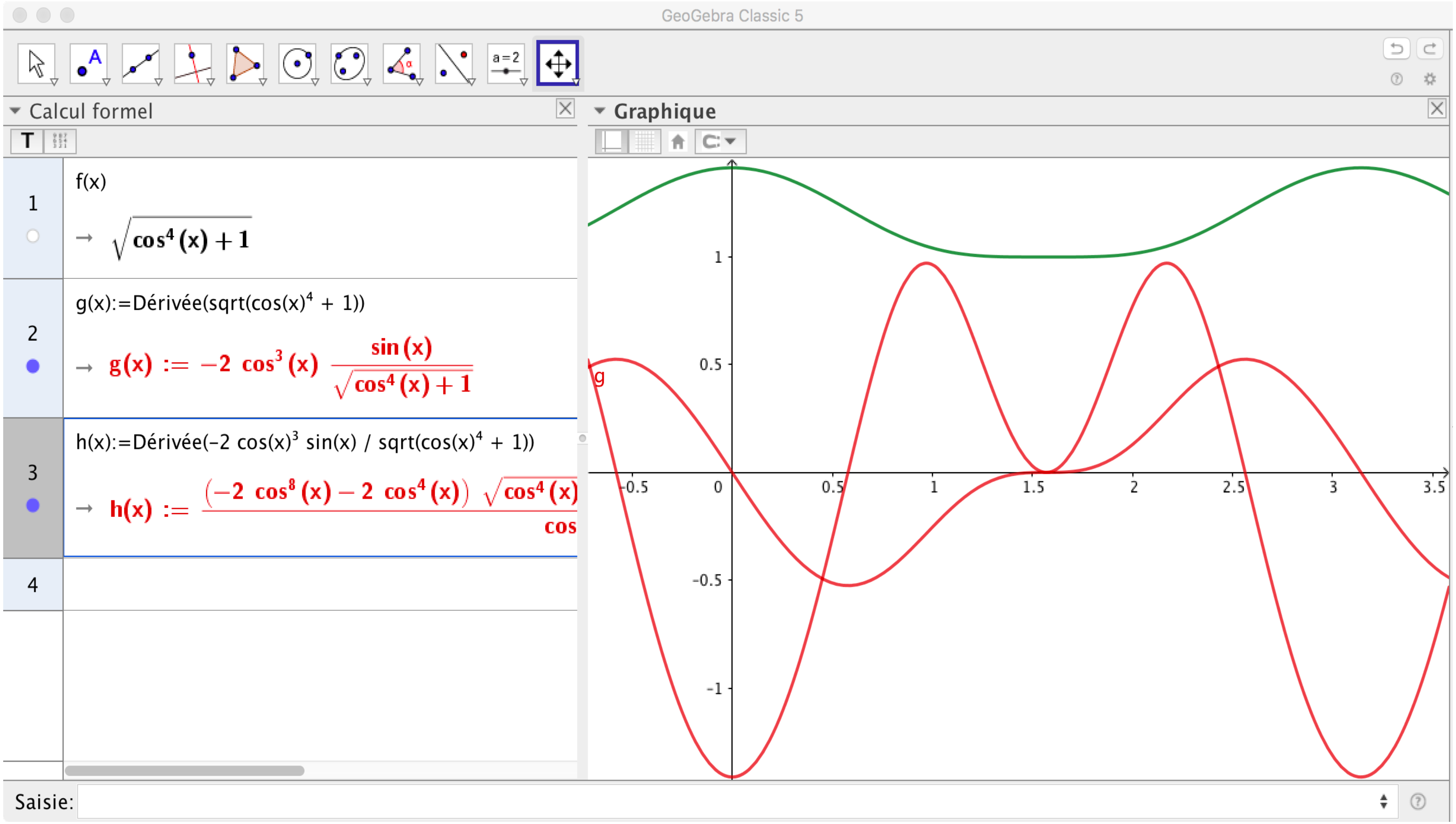
$$4u^2(2u^3 - 3u^2 - 4u + 3)^2 \leq 2(1+u^2)^3,$$

soit $P(u) \geq 0$, où $P(u) = 8u^6 - 24u^5 - 7u^4 + 48u^3 - 14u^2 + 1$ (car on met $(u-1)(1+u)$ en facteur). Cette inégalité se voit en montrant que

$$P(u) = \sum_{p=0}^{6} a_p u^p (1-u)^{6-p}$$

avec des coefficients $a_p > 0$ (changement de base des polynômes de degré au plus 6).

On obtient donc *une erreur finale majorée par* $\frac{0,23}{n^2}$.


GeoGebra Classic 5
Calcul formel
Graphique
1
f(x)
→ √(cos⁴(x) + 1)
2
g(x):=Dérivée(sqrt(cos(x)^4 + 1))
→ g(x) := −2 cos³(x) sin(x) / √(cos⁴(x) + 1)
3
h(x):=Dérivée(−2 cos(x)^3 sin(x) / sqrt(cos(x)^4 + 1))
→ h(x) := ((−2 cos⁸(x) − 2 cos⁴(x)) √(cos⁴(x) ... / cos
4
g
Saisie:

Merci pour votre attention !