Étude de l'article de J. Robinet

« Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction » RDM 4.3 1983

Denise Grenier
Institut Fourier Université Grenoble 1

- Plan de l'article
  Objectifs de l'ingénierie
  Place de la notion dans l'enseignement en 1970
  Analyse historique de la notion
  Choix des situations
  Analyse de l'expérimentations en classes de 1ère B et 1ère S

- Questions pour l'enseignement actuel en lycée et début d'université

Éléments d'histoire – Quatre périodes

P1. « Naissance de l'analyse » : de Archimède au début XVIII ème siècle

Le concept de « fonction » n'existe pas

Les grands problèmes des mathématiciens liés à la notion de limite :

- limites d'éléments géométriques (sécantes, polygones dans un cercle)
- mesures de grandeurs et éléments différentiels sur courbes et surfaces (tangente, rayon de courbure, asymptote, maxima, minima)
- calcul de formes indéterminées (0/0)
- ordre de grandeur de sommes de séries

Newton (1642-1727) associe les quantités variables aux corps en mouvement
notions de *courbe paramétrée*, *fluente*, *fluxion*,
infiniment petit, infiniment grand pour calculer les limites

Tous les mathématiciens de l'époque utilisent les infiniment petits et grands

Leibniz (1646-1716) désigne par (*dx,dy)* les côtés du triangle rectangle dont l'hypoténuse coïncide avec la tangente à une courbe
Interprétation géométrique de la dérivée (fluxion de Newton) et introduction du terme « fonction »

P2. (2ème moitié du XVIII° siècle)

•Nombreux résultats avec les infiniment petits et les infiniment grands

La publication des travaux de Euler (Analyse des infiniment petits 1748) et Lagrange (Théorie des fonctions analytiques 1797) rend nécessaire un travail de précision et de rigueur

Euler : fonction « continue » = sommes, produits, composées de fonctions élémentaires

fonction « librement tracée » ou « mécanique » : définie par son graphe (liée aux équations de cordes vibrantes de Newton)

admet que toute fonction indéfiniment dérivable est « continue » et entièrement déterminée par sa série de Taylor

Lagrange veut se débarrasser des infiniment petits ou grands

première tentative d'algébrisation de la notion de convergence

n'utilise pas le terme « limite »

Les analystes du XIII° siècle

ont une idée intuitive de la notion de limite et l'utilisent implicitement de façon correcte

les questions de convergence et d'approximations restent très liées au calcul numérique, ce qui met en avant les égalités, les « valeurs de la limite » de fonctions particulières que l'on peut expliciter

P3. XIX° et début XX°

Trois faits importants qui vont faire évoluer l'Analyse

- Il reste beaucoup de problèmes à résoudre pour lesquels les infiniment petits et grands sont insuffisants (convergence des séries de Taylor (1685-1731) développements asymptotiques, résolutions des équations différentielles, intégrales abéliennes). **Il n'existe pas de théorèmes généraux.**

- De nombreux nouveaux problèmes viennent du **développement de la physique.** Fourier (1768-1830) maîtrise la notion de convergence sur des cas particuliers, mais le manque d'outils théoriques l'empêche d'énoncer des théorèmes généraux : les fonctions ne sont pas toutes analytiques, ni toutes définies sur **R**.

- **L'évolution de l'enseignement des mathématiques**. A la Révolution, Condorcet réorganise l'Université. La création de l'Ecole Normale Supérieure(1794) et de l'École Polytechnique oblige les mathématiciens à enseigner et à former de futurs mathématiciens.

Il faut donc asseoir l'Analyse sur des bases rigoureuses : expliciter et valider des propriétés utilisées jusque là comme allant de soi ou de manière implicite.

Premier essai : Lagrange
explique dans son cours à Polytechnique que sa théorie des fonctions analytiques a pour objectif de «débarrasser le calcul différentiel des considérations métaphysiques d'infiniment petits ou des quantités évanouissantes ».

Echec
Lagrange ne peut se passer tout le temps de la formalisation de la « limite »,
(par exemple pour utiliser la formule de Taylor)
mais il n'introduit pas cette notion, parce qu'il en reste à des calculs numériques pour lesquels il n'en a pas besoin.

Cauchy (1789-1857) va réussir.

Dans son cours d'Analyse (1821) à Polytechnique
il affirme « l'heureuse nécessité » de préciser les théories, d'**examiner les conditions de la convergence avant de faire des calculs**
induit des recherches qui vont conduire à une théorie générale des fonctions réelles d'une variable réelle.

Cauchy propose

- une définition de la notion de fonction

« pour qu'une fonction d'une seule variable soit complètement déterminée, il est nécessaire et il suffit que de chaque valeur particulière attribuée à la variable, on puisse déduire la valeur correspondante de la fonction ».

- une définition d'un infiniment petit comme fonction qui a pour limite 0.

- une définition dynamique de la convergence vers 0.

Beaucoup de mathématiciens participent au développement et à la construction théorique de l'analyse : (Gauss, Bolzano, Dedekind, Cantor, Abel, Dirichlet, Riemann, Méray)

Weierstrass (1815-1897) va contribuer fortement à établir les fondements de l'analyse moderne

- introduit la notion de *voisinage d'un point*,
- définit *voisinage, ensemble ouvert, ensemble borné, frontière, connexité*.
- donne une définition moderne (statique) de la *continuité*,
- définit un *infiniment petit* comme fonction φ de la variable *h* telle que

  « ε est donné, on peut trouver un δ tel que, pour toutes les valeurs de *h* dont la valeur absolue est plus petite que δ, φ(*h*) est plus petite que ε ».

On peut maintenant démontrer des inégalités, faire des majorations, minorations.

Un premier exposé synthétique des propriétés topologiques de **R** :
Deuxième édition du cours d'analyse de C. Jordan (1893).

P4. XX° siècle

généralisation du concept de limite

étude de la topologie de R^n

naissance des espaces topologiques abstraits dans lesquels la notion d'*ouvert* est fondamentale pour définir la notion de limite.

Cette étude historique permet à l'auteur de repérer

- les problèmes fondamentaux où le concept de limite intervient et s'est construit dans l'histoire
- les causes et raisons de la formalisation de la notion : la volonté de valider les implicites et de pouvoir démontrer des théorèmes généraux pour des classes entières de fonctions.

Et de se poser des questions sur les choix pour l'ingénierie

Choisir ou non un calcul de dérivée
Choisir ou non la continuité
Choix du tracé des branches de courbes

Mes questions à ce moment de la lecture de l'article

Comment justifier la nécessité de préciser et de formaliser ?
Quels problèmes seront pertinents pour cela ?
Quelles formalisations seront utiles, et quelles notions sont indispensables à cette formalisation minimale (voisinage, ensemble borné, etc..)
Quels théorèmes et preuves paraîtront nécessaires aux élèves ?

La notion dans le programme 1970, commun aux 1ères A et B (économie)

Fonctions numériques d'une variable réelle

1. La fonction $x \rightarrow x^2$ de l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls dans lui-même est injective. On admettra qu'elle est surjective.
Notation $\sqrt{x}$ ou $x^{1/2}$.

2. Continuité « en un point » d'une fonction. Limite d'une fonction. (On se bornera aux définitions indispensables, illustrées d'exemples et de contre-exemples ; à l'énoncé sans démonstration, des théorèmes relatifs aux limites de somme, produit, quotient de fonctions).

3. Fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée : dérivée en ce point.
Fonction dérivée : calcul de la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables.
Interprétation géométrique de la dérivée (repère cartésien) : équation de la tangente.
Interprétation cinématique de la dérivée : mouvement rectiligne du point ; définition de la vitesse et de l'accélération.

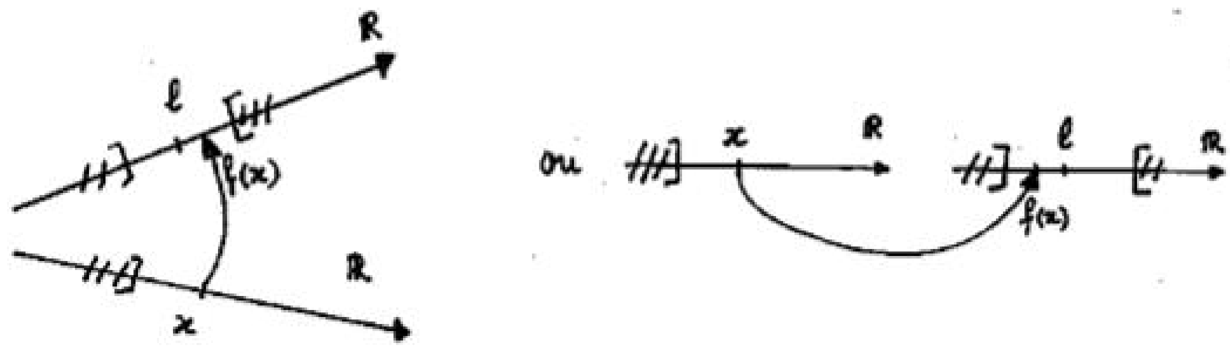
4. Application : étude, uniquement sur des exemples simples, de fonctions polynômes et de fonctions homographiques. Représentation graphique.

En 1970,

- le cours « doit être assis sur des fondements théoriques précis et clairement définis , ici la théorie générale des fonctions réelles d'une variable réelle appuyée sur la topologie générale »
- les notions et propriétés doivent être présentées chacune en déduction logique des précédentes, et les théorèmes doivent être démontrés.

L'article de J. Robinet débute par l'étude de cinq manuels
quatre présentent le même déroulement : étude topologique de R, formalisation de la continuité puis définition et formalisation de la limite d'une fonction lorsque x tend vers x_0 (en termes de voisinages)
le cinquième définit la limite, puis la continuité.

Une grande **diversité de l'utilisation des graphiques** dans les manuels.
Parfois, les seuls qu'on rencontre sont du type ci-dessous, qui montre bien qu'il s'agit d'application,
mais ne différencie pas « visuellement » la fonction $x \to 1/x$ de $x \to x^2$.



Trois des manuels ne donnent aucune représentation cartésienne dans le chapitre continuité-limite.

Dans les manuels de 1970 (suite)

Heuristique et contre-exemple

Heuristique et graphiques pour motiver ou éclairer les notion introduites.

Les représentations graphiques sont absentes dans beaucoup de manuels
commentaires en langue naturelle accompagnant les définitions formalisées
pas de liens entre la notion et les questions qu'elle permet de résoudre

Contre-exemples fabriqués artificiellement (avec fonction définies par morceaux)
prématurés, avant l'étude d'exemples typiques favorables

Formalisations et notations

Degré de formalisation variable
La notion de limite énoncée en termes de voisinages
Et finalement, toujours écrite de manière très formalisée

Synthèse sur les manuels de TS étudiés (programme 2001)

Les définitions en TS de la limite d'une fonction en ∞, calquées sur celle des suites, restent informelles, floues et peu opératoires, n'apportent rien par rapport à ce qui est donné en 1ère S, sauf que cela s'appelle « définition »

La définition de la “limite en un réel a” est traitée très différemment selon les manuels : absente, inutilisable, pouvant parfois induire des erreurs, ou au mieux en respectant le programme

L'interprétation par les auteurs de manuels de l'« approche intuitive» : en langage naturel, pas du tout mathématisé, floue, naturalisée ?

Peu d'exemples traités
Point de vue local (quasi) absent
Pas de travail sur les approximations numériques, pas de graphes de voisinages, etc..
Schémas peu éclairants : un « rond » au point où f n'est pas définie, des petits points dans le voisinage du point étudié ...

Ter-TS et *Decl-TS* assument mieux l'écriture des propriétés mathématiques de la notion mathématique

Quelles connaissances peuvent être ainsi construites au lycée sur la notion de limite d'une fonction ?

Une ***conception ponctuelle ou globale, et technique***, la justification des techniques étant renvoyée à l'intuition.

Point de vue "local" absent. Le seul moment où le point de vue est « local » est présent est l'introduction ou la définition et ce point de vue est délaissé clairement ensuite, au profit de techniques algébriques opératoires, à partir de fonctions de référence et de nombres dérivés donnés (lim (sin$x$)/x=1 en 0). Les infiniment petits et infiniment grands sont à peine évoqués par des expressions telles que « aussi près que » ou « aussi grand que », ne sont pas travaillés, sauf quelques exercices "alibis".

Des techniques sans théorie. Nombreux « théorèmes » qui consistent uniquement en une liste de limites prêtes à l'emploi ou une algèbre (assez complète) sur les limites. Comme ces « théorèmes » ne sont pas démontrés et qu'on renvoie l'élève à l'intuition pour les comprendre (et même les justifier !), la boucle est bouclée.
(exemple §5 Math'x-1S « Théorèmes d'opérations », dont « le but est de pourvoir déterminer sans revenir aux définitions les limites de [...] »)

Programme 2001 - 1ère S

Les limites apparaissent dans trois thèmes présentés dans cet ordre :
Dérivation, Comportement asymptotique de fonctions, Limite de suites

Limite et *lim* : **langage** et **notation** pour définir le nombre dérivé
« Nombre dérivé d'une fonction en un point : définition comme limite de (f(a+h)-f(a))/h quand h tend vers 0 »

Remarque : ni la notion de limite, ni les notations associées n'ont été abordées avant

Un contexte privilégié est donné : **vitesse instantanée**, cinématique
L'**approche locale** est suggérée par des «zooms successifs sur une représentation graphique obtenue à l'écran de la calculatrice »

Les limites de fonctions sont effectivement étudiées dans le chapitre traitant des asymptotes
Aucune définition n'est prévue, il s'agit de donner une **« idée intuitive »**

La **limite en un point a réel** où f est définie n'est pas évoquée

Manuels - 2001 1ère S (Déclic, Hyperbole, Indice *X*, Terracher)

Les manuels reprennent tous l'ordre induit par le texte du programme « limite » ou « lim » : pour la première fois comme ***outil langagier*** dans la définition du nombre dérivé

Différents types d'écriture du comportement des variables :

« proche de », « assez proche de »	***statique***
« aussi proche que l'on veut », « aussi grand que l'on veut »	***dynamique***
« de plus en plus proche », « tend vers »	***monotonie***

Deux exemples

Hyp-1S ch.5 dérivation, p.98

« Lorsqu'on donne à h des valeurs *proches de* 0, $6+h$ prend des valeurs *proches de* 6. <u>On dit que</u> la limite en 0 de $6+h$ est 6 et on écrit $\lim_{h\to 0}(6+h)=6$ »

IndX-1S ch.3 Dérivée d'une fonction, cours, p.50

Expression de $f'(a)$ avec le symbole « lim », suivi de « lim <u>se lit</u> limite si h tend vers 0 ». Et dans la marge : « vocabulaire: si h prend des valeurs *de plus en plus proches de* 0, <u>on dit que</u> l'on cherche la limite de $r(h)$ quand *h tend vers* 0 ».

Définitions

Aucune définition explicitement nommée ainsi n'est donnée dans ce chapitre, même « intuitive »

Seule une « notion intuitive » est illustrée sur des exemples :

Cas particulier (?) *Ter-1S chapitre « dérivation » ch.3, deux pages*

Une « notion intuitive de limite » <u>avant</u> de parler de dérivée
« f est **aussi proche** du réel l **que l'on veut** dès que x est **assez proche** de a»
p.72-73
Suivi de:
limite en a d'une fonction,
cas d'une fonction usuelle définie en a,
fonction non définie en a

Représentations, images

Toutes liées à la dérivation (c'est conforme au programme)

traitée essentiellement sous les points de vue :
ponctuel nombre dérivé
algébrique simplification d'une expression de l'accroissement
technique « **faire *h*=0** »

et **géométrique**
coefficient directeur d'une droite
pente de la tangente à une courbe (déjà tracée)

Hormis le vocabulaire introductif, **l'approche locale est peu présente**, non illustrée et non travaillée
absence de calculs d'approximation ou réduits à un exercice
(très) rares schémas de voisinages (intervalles, bandes)
rares représentations de la tangente comme limite d'une famille de droites

Sauf dans *Ter-1S* *:* symboles commentés, explicités, formulations équivalentes

Comment trouver les limites d'une fonction ?

IndX-1S ch.3 Dérivée d'une fonction, p.51 dans la partie « cours »
« Technique. Pour trouver la limite $r(h)$ si h tend vers 0, il suffit de remplacer h par 0 dans l'expression simplifiée de $r(h)$ »

(p.52 à 55, cours) : **aucune** expression avec des limites n'est écrite

(*p.57 à 66)* « Exercices et problèmes », « travaux dirigés » et « un parcours autonome » , lim ou limite n'apparaissent jamais.

Ter-1S donne un « résultat pratique» : remplacer x par a lorsque f est définie en a,
Il est explicitement dit que c'est un résultat admis qui marche dans de nombreux cas.
Lorsque f n'est pas définie en a, un « principe de calcul » passant par une fonction g égale à f sauf en a. Il est dit que : « en pratique, la détermination de g peut résulter d'une simplification de f »

Chapitre « Comportement asymptotique des fonctions »

Toujours placé après la chapitre « dérivation » ou « nombre dérivé »

Limites abordées : limite finie en $+\infty$ et $-\infty$, limite infinie en $+\infty$ et $-\infty$,
(parfois) limite à gauche et à droite en un réel fini
Absente (en général) : limite finie en un réel fini

(Hyp-1S ch7, p.148 et suivantes) : définitions « provisoires » des asymptotes
pas de définition des limites associées

« conformément au programme on s'appuie ici sur l'intuition »
Les procédés utilisés sont déclarés justifiés par des théorèmes...tous admis
qui sont des listes de limites de fonctions usuelles et l'algèbre sur les limites

Indx-1S, ch.4, cours, p.72
Pas de définitions. Seuls deux exemples traités : fonction carré et fonction inverse, en $+\infty$ et $-\infty$, avec des expressions comme « suffisamment grand », « aussi grand qu'on veut », « très proche », « aussi proche que l'on veut »

En marge, une note d'histoire « A. L. Cauchy (1789, 1857) fut l'un des premiers à exposer rigoureusement la notion de limite » !! *Étonnant, non ?*

Dans deux manuels, on trouve une notion intuitive de limite finie de $f(x)$ lorsque x tend vers a

Ter-1S : utilisation d'intervalles, inégalités, quantificateurs

Réécritures avec des inégalités et des quantificateurs en langage naturel
« pour tout réel arbitrairement choisi (aussi grand que l'on veut), on a : $f(x)\geq M$ ($f(x)$ dépasse M dès que $-1/\sqrt{M} \leq x \leq 1/\sqrt{M}$ et $x\neq 0$ »

Donne sans les nommer des **définitions des limites en l'infini et en 0**, **définitions explicites** en ∞ par le recours à la limite en 0 de $f(1/x)$

Decl-1S
notations $f\,'(a)$, $(df/dx)(a)$, dy/dx

Différents registres d'interprétations du nombre dérivé
« interprétation graphique » du coefficient directeur de la tangente (position limite de sécantes), associée au vecteur directeur u $(1, f'(\mathrm{a}))$

« interprétation numérique » asssociée au théorème (prouvé) :

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varepsilon(h)$$

«interprétation géométrique », associée à $h\varepsilon(h)$ et à une distance

Programme 2001 Terminale S

La définition proposée pour la limite (finie ou infinie) d'une fonction en l'infini est une “extension” de celle de limite d'une suite
(donnée en 1ère S)

Le programme ne parle pas de “définition” pour la limite en un réel *a*, mais de “notion”

Manuels

Hyp-TS ch.1 limites de suites et fonctions
• pour limites infinies : notations, vocabulaire, définitions calquées sur celles des suites, « tous les termes de la suite à partir d'un certain rang » est remplacé par « toutes les valeurs *f(x)* pour x assez grand »
• pas de définition de la limite finie en un réel

Ter-TS ch.2 Fonctions : limites, continuité, dérivabilité
Des nouveautés : la définition de la limite en $+\infty$ est donnée par la limite de *f(1/x)* à droite en 0 et la limite en *a* réel est donnée *(p.45)*. Les limite à gauche et limite à droite sont assumées, elles sont traitées sur plusieurs exemples, dont la fonction *f=E(x)* (partie entière)

IndX-TS annonce tout de suite dans la marge (p.12) :
« Attention. En Terminale, ces définitions seront peu utilisées dans les exercices : on se servira des règles opératoires de la page 16 ».
Insiste (p.14) : « Attention. Les énoncés de cette page sont basés sur l'intuition. L'étude des limites utilisera des règles opératoires (page 16)».
Plus loin, il est dit que « les propriétés de ces deux pages [en fait, les règles opératoires] seront utilisées de manière systématique et «Technique. Les résultats peuvent être retrouvés facilement grâce à l'intuition. » !!!!

Decl-TS
surprise : le *ch.2 « Limites de suites et de fonctions »* arrive après le *ch.1 « Fonctions-Variations et continuité ».* En fait, dans le cours *ch.1 p.10*, dans « rappels sur la dérivation », on trouve une illustration de « limite en *a* » dans les termes vus en 1ère S, puis *p.13*, la « notion de continuité » avec limites à droite et à gauche, exemplifiées avec la fonction partie entière

Evolutions au gré des diverses réformes (1) (Nicolas Grenier-Boley)

Nous comparons sur quelques points les manuels de Première S de 2001 avec certains manuels issus des diverses réformes : la réforme des mathématiques modernes (1971), la contre-réforme (1982), son ajustement (1988) et la réforme de 1990.

•Dans le manuel de 1971, le langage des limites est celui de la *logique formelle*. En 1988, il est prôné un langage plus intuitif soit “un langage parlé moins rigoureux et savant mais peut-être plus simple qu'une belle définition”. Avec les réformes de 1988 puis de 1990, on en arrive au langage pratique des limites avant d'en venir à une naturalisation de la notion (2001).

•Les types de limites à étudier ont profondément changé au cours des réformes : toutes les limites (1971), étude formelle limitée aux limites en 0 (1982), toutes les limites vues de façon à être opératoires (1990). Comme dit plus haut, le programme de 2001 étudie quelques limites et tente d'en donner une approche intuitive par le biais de “l'algèbre des limites”.

Evolutions au gré des diverses réformes (2)

•L'ordre d'exposition varie aussi. Malgré quelques différences, les manuels des réformes de 1971 à 1990 respectaient l'ordre d'introduction limite puis continuité en un point puis nombre dérivé. Au contraire, le programme de 2001 fait des concessions à cette logique d'exposition en présentant le nombre dérivé puis les limites puis la continuité (en classe de Terminale). Est-ce alors étonnant de trouver tant de raisonnements « continu implique dérivable » chez nos étudiants ?

•Le champ de l'approximation apparaît notamment dans les programmes de 1982 pour justifier numériquement (ou intuitivement) et illustrer les définitions formelles. En 2001, ce champ est quasiment deserté.

•Notons enfin qu'il y aura une nouvelle réforme des programmes de Première S l'an prochain : la manière d'introduire la notion de limite et sa place dans une progression pourrait alors évoluer notamment en lien avec l'introduction de la notion de fonction dans les nouveaux programmes de troisième puis de seconde.

Les indispensables (à notre avis) qui manque en 2001 (non exhaustif)

• Un enseignement de la notion de limite *pour elle-même*

• Un travail *préliminaire* sur les approximations numériques, calculs d'erreurs associés, inégalités,

pour une conception locale de la notion

pour donner un sens aux expressions langagières « tend vers », « aussi près que l'on veut », « aussi grand que l'on veut »

Pour préparer le passage à la formalisation (actuellement difficile en L1) (ordre des expressions relatives à la fonction et à la variable, implication « si alors »)

Par exemple : que **dois**-je choisir pour x **pour que** $1/x$ soit inférieur (en valeur absolue) à 10^{-n} ?

• Un travail graphique et géométrique sur les *voisinages* (bandes) et les *limites de famille de sécantes.*