Rôle des registres de représentation et des changements de cadre dans la construction des connaissances mathématiques

Denise GRENIER
Mathématiques discrètes et didactique
Institut Fourier (UMR5582) et IREM
Université Grenoble Alpes

Concept, champ conceptuel (Vergnaud), conception (Artigue)
Cadres et jeux de cadres, dialectique outil-objet (Douady)
Registres de représentation sémiotique (Duval)

- Exemple 1. La droite dans le plan et l'espace
- Exemple 2. Les nombres rationnels au collège et au lycée
- Exemple 3. Le Second degré au lycée
- Exemple 4. Aire d'un polygone à sommets entiers

Mathématiques

Ensemble de pratiques et de connaissances abstraites construites sur des bases de logique : problèmes, définitions, axiomes, théorèmes, lemmes, etc.

Concepts accessibles seulement par des représentations diverses.

Grands **domaines** classiques : géométrie, algèbre, analyse, théorie des nombres, probabilités, topologie, mathématiques discrètes, etc.
Et des **sous-domaines** : géométrie élémentaire, algèbre linéaire, analyse fonctionnelle, topologie géométrique, théorie des graphes, etc..

Description des mathématiques ni figée, ni évidente.

Les domaines se transforment, s'intersectent, se spécialisent.
Les pratiques mathématiques évoluent.
Beaucoup de concepts se retrouvent dans plusieurs domaines.
Les approches pour chercher un problème sont multiples.

Pour l'enseignement, nécessité de :

- situer un concept par rapport à des *concepts en étroite relation,*
- connaître les diverses *représentations qui lui donnent du sens*.
- choisir des *cadres de travail* pertinents pour les mettre en oeuvre.

Questions difficiles au niveau universitaire

E1. Droite de l'espace R^3

Écrire les équations cartésiennes d'une droite dans l'espace donnée par sa représentation paramétrique.

E2. Second degré

Déterminer le minimum de la courbe de la fonction définie par :

$$x \rightarrow f(x) = a\,(x-b)\,(x-c)$$

E3. Nombres rationnels idécimaux

La calculatrice affiche, pour le calcul de 59/7, le nombre 8,4285714286. Peut-on en déduire les décimales suivantes ?

Calculer la somme et le produit des deux nombres rationnels :

$$a=2{,}71 \text{ et } b=3{,}4\underline{56}$$

Questions difficiles au niveau universitaire (suite)

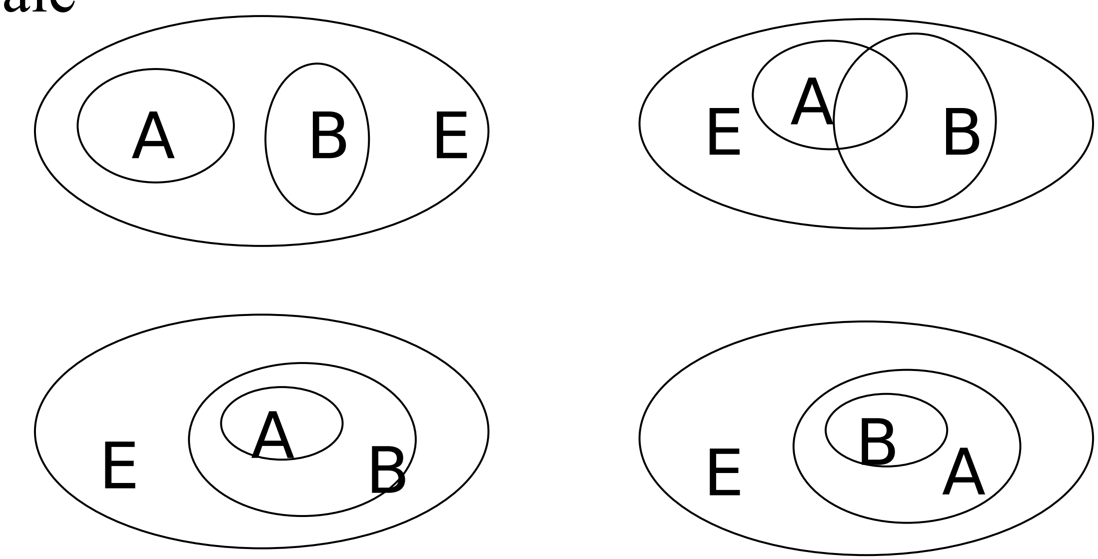
E4. Logique et raisonnement

Implication et inclusion (programme de lycée)

Question

Soit E un ensemble d'objets, A le sous-ensemble des éléments x de E qui vérifient une propriété A, B le sous-ensemble des éléments x de E qui vérifient une propriété B.

Hachurer le sous-ensemble de tous les éléments x de E pour lesquels ($A(x) \Rightarrow B(x)$) est vraie



Constats et questions vers l'enseignement

Pour de nombreux élèves et étudiants, les connaissances mathématiques enseignées ne permettent pas de résoudre de nombreux problèmes (à quoi ça sert ?) et elles sont souvent vite oubliées …

Qu'est ce qui est effectivement construit en classe ?

Comment installer des connaissances ayant du sens, opératoires et pérennes ?

Que met-on soi-même derrière les expressions « Je sais » «Je connais» ?

Outils d'analyse et propositions de la didactique des mathématiques

- Revenir à l'épistémologie des mathématiques et aux pratiques des mathématiciens
- Analyser les mathématiques à enseigner et celles enseignées :

  les choix des programmes et des manuels
  les choix des enseignants

- Faire des propositions raisonnables (lorsque c'est possible !)

Concept (Vergnaud 1980)

S ensemble des situations qui donnent du sens au concept

I ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationalité des schèmes (le *signifié*)

S ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le *signifiant*

Champ conceptuel

« Un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion, ainsi que les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter. »

Conception (Artigue 1988)

Modèle analogue à celui de Vergnaud, du point de vue de l'élève

- La classe des situations-problèmes qui donnent du sens au concept
- L'ensemble des signifiants associés
  (images mentales, représentations, expressions symboliques)
- Les outils (théorèmes-en-acte, algorithmes) pour explorer et utiliser le concept.

Jeux de cadres (Douady 1984, 1986)

Postulat. Pour faire des mathématiques, l'élève doit être capable de choisir un cadre de résolution qui lui semble adapté au problème qu'il résout.

Pour cela, il doit disposer de *différents points de vue* sur les concepts en jeu dans le problème : propriétés, représentations et techniques relevant de différents domaines, etc.

Conditions pour construire des connaissances fiables et durables.
Rôle essentiel des *jeux de cadres* et de la *dialectique outil/objet*.

Un *jeu de cadres* peut être organisé par un problème où l'énoncé est formulé dans un domaine, une résolution pertinente est accessible dans un autre domaine, puis retraduite dans le domaine initial.

Dans la *dialectique outil/objet*, les propriétés du concept sont explorées dans un processus spiralaire : des situations où il va utilisé comme objet (étude de ses propriétés), puis d'autres situations où il est utilisé comme outil (de résolution).

Tout ceci est réalisable en classe si un vrai temps est consacré à la résolution de problèmes.

Registres de représentation sémiotique (Duval 1993)

Les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles par la perception, il faut donc pouvoir les représenter.

Pami les diverses représentations d'un objet, les *représentations sémiotiques* (celles qui lui donnent du sens) jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique.

Pour résoudre un problème, il est essentiel de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation (géométrique, graphique, écriture symbolique, équation, langue naturelle, etc.) et aussi de savoir passer de l'un à l'autre.

Constats

Les élèves et étudiants disposent de très peu de représentations significativement différentes sur les notions qu'on leur a enseignées.

Leurs connaissances contiennent souvent des confusions entre les représentations d'un objet et l'objet lui-même.

Registres de représentation sémiotique (Duval 1993) (suite)

Pour qu'un système sémiotique puisse être un registre de représentation, il doit permettre trois activités cognitives fondamentales.

la ***formation*** d'une représentation identifiable

(par exemple, les écritures « $3,6^{-2}$ » et « 3/-2 » ne sont pas conformes)

le ***traitement*** : transformation dans le registre où elle a été formée (transformation interne)

(par exemple, 27/4=6,75)

la ***conversion*** : transformation dans un autre registre, avec éventuellement des information manquantes ou perdues (transformation externe)

(par exemple, le passage du tableau de variation d'une fonction à la représentation précise de sa courbe)

Toute représentation d'un concept est partielle d'où la nécessité de disposer de différents registres et de savoir les coordonner.

→ économie de traitement des problèmes
→ complémentarité des registres : outil efficace pour la preuve
→ élargissement du champ conceptuel des connaissances

Exemple 1. Le concept de droite en primaire et au secondaire

En géométrie euclidienne

Registre des objets concrets
- Une corde tendue entre deux points comme morceau de droite
- Un fil à plomb

Registre des figures (géométrie élémentaire)
- Un trait rectiligne illimité sans épaisseur
- Un ensemble de points alignés
- Un point et un vecteur direction

Registre des constructions (règle, compas, équerre, ...)
- → Théorème Thalès, Pythagore
- → Les nombres constructibles (à la règle et au compas)

Registre des constructions par origami (axiomatique de Huzita)
- → Trisection de l'angle, Duplication du cube

En géométrie analytique

Registre calcul algébrique	Équation cartésienne $ax+by+c=0$
Registre fonctionnel	Fonction linéaire $f(x)=ax+b$
Registre graphique	Courbe représentative $y=f(x)$

Exemple 1 (suite). Le concept de droite … au lycée et à l'université

En algèbre linéaire

Registre vectoriel — espace vectoriel de dimension 1

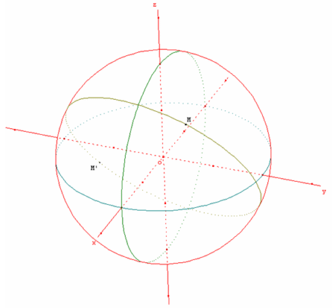
En géométrie affine (dans l'espace)

Registre ensembliste — écriture paramétrée ensembliste

$$\{x=x_A+t.a,\ y=y_A+t.b\ ;\ z=z_A+t.c\ ;\ t\in \mathrm{R}\}$$

Registre algébrique — système de deux équations

Registre graphique — coordonnées polaires

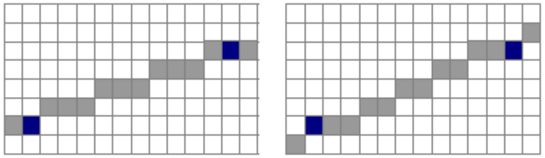


En géométrie sphérique

Registre géométrique — longitude, latitude

Registre algébrique — plus court chemin entre deux points

En géométrie discrète (dans le plan discret)



lequel choisir ?

Registre « design informatique »

tracé d'une droite pixélisée (Ouvrier-Buffet, 2004)

Registre arithmético-fonctionnel

dénombrement des points entiers sur une droite (Dissa, 2018)

Intermède

Petit problème de recherche
Points à coordonnées entières sur une droite du plan

Question

On considère une droite quelconque dans un repère donné.
Déterminer tous les points de la droite dont les deux coordonnées sont entières ?

Exemple 2. Nombres rationnels (entiers, décimaux, idécimaux)

Nombres entiers : de nombreux registres de représentation

Cardinal d'un ensemble

Représentation par une collection d'**objets concrets** ou figurés
Opérations +, -
Écriture avec des **chiffres**
Comptage sur les **doigts de la main**

Ordinal

Position dans une liste : le nombre est attribué à UN objet
Ordonnancement
Bijection entre deux ensembles d'objets

Registres d'écriture en **base 10** ou autres bases (2, 60)
→ Activités de transformation ou de conversion

Registre langagier
→ activité de lecture et d'écriture en langue naturelle
→ distinction chiffre/nombre

Exemple 2. Nombres rationnels (entiers, décimaux, idécimaux)

Nombres décimaux

Dans les programmes (cycle 4)

Trois registres de représentation numériques sont présents :

écriture décimale	9	21,6
écriture fractionnaire	27/3 ou 9/1	108/5
écritures avec exposant	3^2	216.10^{-1} ou $2,16.10^{+1}$

Ces registres nécessitent des traitements opératoires spécifiques.
Passer d'une écriture à l'autre est une activité de transformation interne ou de conversion entre deux registres, selon les écritures.

Le registre graphique (placement sur une droite) est également présent.

Dans le registre langagier, la lecture orale peut porter des significations très différentes : mettre en avant ou non le sens de l'écriture décimale.

Par exemple : « 2,7 » se lit : « 2 virgule 7 », ou « 2 unités et 7 dixièmes », ou « 27 dixièmes ».

Dans les quelques manuels de collège consultés

Les trois registres d'écriture numérique sont travaillés séparément, mais les conversions entre ces registres semblent peu présentes dans les exercices proposés.

Rien n'est dit (ou très peu) sur la lecture orale d'un nombre décimal.

Exemple 2 (suite) Les nombres rationnels

Programme du cycle 4 (2020)

Dans le thème « Nombres et calcul »
Ordre sur les nombres rationnels en **écriture décimale ou fractionnaire**
Somme, différence, produit, quotient de nombres décimaux, de deux nombres rationnels

Repères de progression de 4ème 2019

« **Un nombre rationnel est défini comme quotient** d'un entier relatif par un entier relatif non nul, ce qui renvoie à la notion de fraction. […] **Les élèves sont conduits à comparer des nombres rationnels, à en utiliser différentes représentations et à passer de l'une à l'autre ».**

Remarques

→ définition comme quotient (cadre numérique prédominant)
→ les rationnels idécimaux ne sont pas définis
→ deux registres d'écriture : décimal et fractionnaire
→ la conversion entre les deux registres est au programme
→ registre géométrique absent

Exemple 2 (suite). **Nombres rationnels**

Nombres rationnels dans deux manuels

Manuel **Mission Indigo** 4ème 2020 Thème : Nombres et calculs

ch.2. Nombres rationnels : addition, soustraction, comparaison

ch.3. Nombres rationnels : multiplication et division

Cours. « Reconnaître un nombre décimal ou rationnel »

« Un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction est appelé un nombre rationnel. »

« Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale. »

→ ***La fraction* est le seul registre de représentation sémiotique aussi bien pour la définition, que pour l'écriture et le langage**

→ **Cadre numérique et opérations sur les fractions largement privilégiées (c'est la « mission Indigo » !)**

Collection **TAM** Maths 3ème 2020 Thème : Nombres et calcul

Ch .1. Nombres entiers, décimaux et rationnels - Cours page 32

1. Puissances
2. Nombres

A. Nombres entiers

B. Nombres décimaux et notation scientifique

C. Nombres rationnels et fractions irréductibles

→ **Une seule page de cours pour tout ça !** Considéré comme des rappels ?

→ Mêmes remarques que pour le manuel précédent : prédominance de la *représentation en fraction.*

Exemple 2. Nombres rationnels (synthèse)
Ce qui ressort de l'analyse du programme et des deux manuels

- Définition : rationnel = quotient de deux entiers
- Un seul registre langagier : fraction (le terme « rationnel » est vite oublié)
- Une seule écriture : fraction
- Amalgame entre les opérations sur les nombres rationnels et celles sur les fractions

- L'écriture décimale (illimitée périodique) est évitée :

  L'écriture 0,333… n'est pas identifiée à l'écriture **exacte** $0{,}\underline{3}$ de 1/3

  Pour les « divisions décimales infinies », le résultat du quotient est ramené à la division euclidienne et l'écriture $a=bq+r$ *devient* $a/b=q+r/b$ et on travaille sur une valeur approchée ou un encadrement.

  Les données numériques pour les calculs de pourcentage sont (très) souvent choisies pour que le résultat soit un nombre décimal !

  10 % de 126 ; 25 % de 84 ; 63 % de 500

→ Identification du concept de nombre rationnel avec sa représentation sous forme de fraction

→ Et, au lycée, on considère que l'ensemble Q est construit !! (et R aussi …)

Exemple 3. Le Second degré

Dans les programmes 2019

En 2nde

Dans le thème **Fonctions**

Fonctions de référence

Se constituer un répertoire de fonctions de référence
Représenter algébriquement et graphiquement les fonctions
Étudier les variations et les extremums d'une fonction

En 1ère spé

Dans le thème **Algèbre**

Équations, fonctions polynômes du second degré

Remarques

→ Changement de cadres entre la 2nde et la 1ère : Analyse en 2nde (avec les fonctions) et Algèbre en 1ère spé (équations)

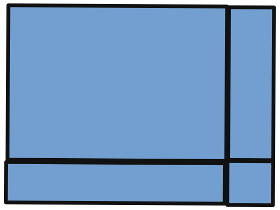
→ Statut de « fonction de référence »

→ Question : Les transformations et conversions de registres sont-elles prise en charge et comment ?

Exemple. Manuel Indice **1ère 2019** Thème A**lgèbre** chapitre : **Second degré**

Découvrir (2 pages) *(cadre géométrique ; registres graphique, figural, physique)*

Activité 1. La **parabole** de sûreté
Activité 2. La méthode de Al-Khwârizmi
Activité 3. Des **paraboles** qui changent de **forme**
Activité 4. La lanceuse de **javelot**



Cours (10 pages)

1. **Fonction polynôme** du second degré sous forme **factorisée**
   - Définitions - Forme factorisée
   - Somme et produit de **racines**
   - **Signe** d'un polynôme du second degré sous forme factorisée
2. **Équation** du second degré
   - Forme canonique
   - Résolution
3. **Variations et représentation graphique** de $x \longrightarrow ax^2+bx+c$
   - **Axe de symétrie** de la **parabole**
4. **Signe** d'un polynôme du second degré

   Factorisation Signe **Interprétation graphique**

Note. C'est moi qui souligne et met en couleur : en bleu registre langagier de la géométrie, en rouge celui de l'algèbre, en vert celui de l'analyse.

Manuel Variations **1ère spé 2019**. Thème **algèbre** chapitre 3 **Second degré** Page 74.
« Prendre un bon départ ».

Test. Proposer des phrases à partir des mots suivants.

fonction carré SENS DE VARIATION factoriser
représentation graphique PROPRIÉTÉ solution
développer expression ÉQUATION »

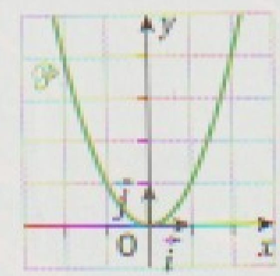
Rappels Identités remarquables. Signe d'une fonction affine. Fonction carré.

Fonction carré

- La **fonction carré** est la fonction qui, à tout nombre réel x, associe son carré x^2.
- La fonction carré est paire. Son **tableau de variations** et son **tableau de signes** sont :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$	↘	0	↗

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $x \mapsto x^2$	+	0	+



- Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carré est une **parabole**. Cette parabole admet un **axe de symétrie**, l'axe des ordonnées, et un **sommet**, l'origine du repère.

→ Différents registres de représentation sémiotiques, mis côte à côte : langagier, géométrique, fonctionnel, avec tableaux numériques et graphiques

→ Les transformations et conversions d'un registre à l'autre ont-elles été étudiées, où et comment ?

Exemple 4

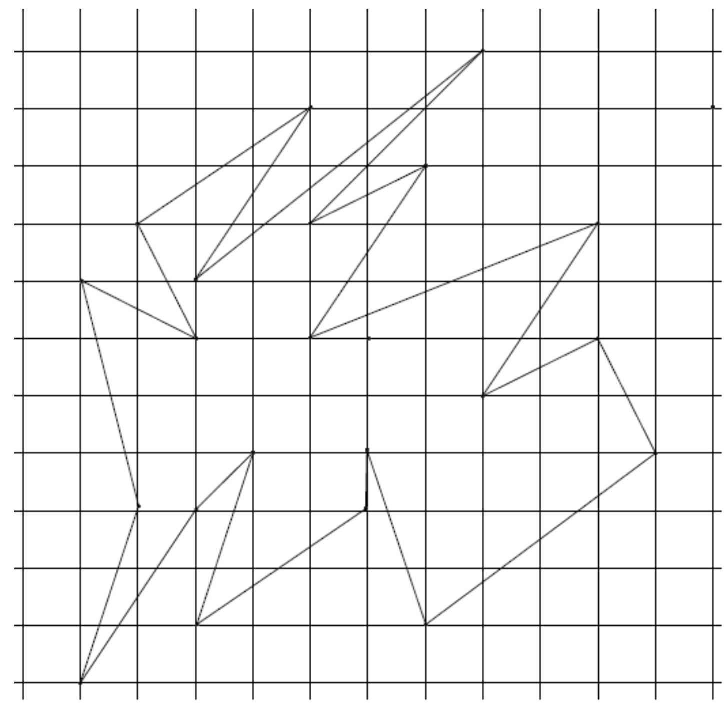
Un problème de recherche pour travailler les conversions de registre sur la notion d'aire (Dissa, thèse 2020, UGA)

Énoncé

On dispose d'un quadrillage par des carrés unités du plan.

On veut trouver une méthode « simple » pour déterminer l'aire d'un polygone quelconque dont tous les sommets sont à coordonnées entières.

Voici un exemple de polygone à sommets entiers qui peut motiver la recherche de méthodes économiques …



Références (spécifiques à cet exposé)

Artigue, M. (1988) Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3), 281–308. https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/

Dissa S. (2018) Points entiers sur une droite. Un problème entre arithmétique et géométrie, petit x, 107,29-48.

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 5–31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives, 5, 37-65.

Ouvrier-Buffet, C. (2003) Construction de définitions/construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques ; étude épistémologique et didactique de la définition ; étude théorique et expérimentale de la dévolution de problèmes de construction de définitions, auprès d'étudiants de 1ère année d'université, thèse Université de Grenoble.

Rogalski, M. (2002) Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. Actes de la journée en hommage à Régine Douady. IREM de Paris.

Vergnaud, G. (1988) Questions de représentation et de formulation dans la résolution de problèmes mathématiques. Annales de didactique et de sciences cognitives, 1,33-55.