Commission internationale inter IREM

Levier langagier dans le travail mathématique avec les élèves

Paris, le 28 septembre 2019

Christophe Hache
LDAR, Université Paris Diderot
IREM de Paris

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Exemples :

- « *n* est un nombre qui s'écrit sous la forme 2*k* avec *k* entier »

  « Il existe un nombre *k* tel que *n* = 2*k* »

  $$\exists k \in \mathbb{Z} \quad n = 2k$$

- « Il existe un plan contenant un point donné et parallèle à un plan donné »

  $$\forall P \, \forall M \, \exists Q \quad (P \,//\, Q) \wedge (M \in Q)$$

- « Il existe un point fixe appartenant à toutes les courbes C_t »

  $$\exists M \, \forall t \quad M \in C_t$$

- « Si *n* est premier alors *n* est impair »

  $$\forall n \quad (n \text{ premier} \Rightarrow n \text{ impair})$$

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Exemples :

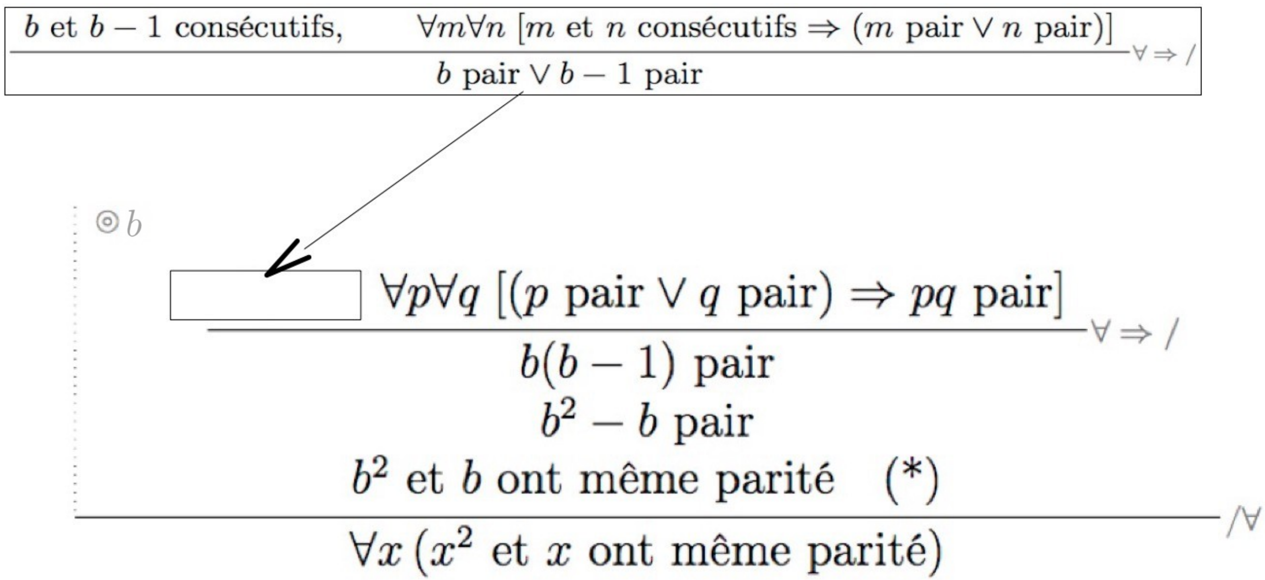
Remarque : Deux nombres impairs consécutifs peuvent s'écrire aussi $2k+1$ et $2k+3$ avec k entier et $k \geqslant 0$.

Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Propriété : Un entier et son carré ont toujours même parité.

- **Preuve :** L'un des deux entiers n ou $n-1$ est pair, donc l'entier $n^2-n=n(n-1)$ est pair.



- **Preuve :**

Un entier n est dit *pair* s'il est divisible par 2, et *impair* sinon. On dit que deux entiers ont *même parité* si leur différence est paire. Cela revient à dire qu'ils sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Montrons que n^2 et n ont même parité. Cela revient à dire que n^2-n est pair. Or $n^2-n=n(n-1)$. Comme n et $n-1$ sont deux nombres consécutifs, ils n'ont pas même parité (leur différence est 1, qui est impair). L'un d'entre eux est donc pair, et donc divisible par 2. Le produit $n(n-1)$ est donc aussi divisible par 2. Donc n^2-n est pair.

Expérimentations exploratoires

- **Formulation-reformulation**

Exemple n°1 (évolution d'une formulation de théorème pendant une séance)

« Dans un triangle rectangle, les côtés perpendiculaires au carré sont égaux à l’hypoténuse au carré »

« Dans un triangle rectangle, la somme des côtés perpendiculaires au carré est égale à l’hypoténuse au carré » (suggestion élève)

« Dans un triangle rectangle, la somme des côtés de l’angle droit au carré est égale à l’hypoténuse au carré » (question professeur)

« Dans un triangle rectangle, la somme des *carrés* des côtés de l’angle droit est égale au *carré* de l’hypoténuse » (ambiguïté soulignée par l'enseignant)

« Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés de l’angle droit est égale au carré de la longueur de l’hypoténuse » (question de l'enseignant sur ce qui est mis au carré)

→ Première formulation retenue

Expérimentations exploratoires

- **Formulation-reformulation**

Exemple n°1 (évolution d'une formulation de théorème pendant une séance)

« Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse »

Critiques des élèves :

« C'est long » → « Comment faire plus court ? » → « en écrivant "en mathématiques" ».

« Il n'y a pas "si alors" ».

Deux autres énoncés sont finalement inscrits dans le cahier de cours :

« Si un triangle ABC est rectangle en A, alors on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$ » (accompagné d'un triangle rectangle tracé à main levée de sommets A, B et C).

« Si un triangle est rectangle, alors la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse ».

Expérimen

- **Formulation-reforr**

Exemple n°1bis (théorèmes, formulations cahiers)

II. Propriété

On va écrire plusieurs formulations différentes de la propriétés de Thalès.

propriétés :

On a : - deux demi-droites d'origine A nommée [AB) et [AC).
- un point M qui appartient à la demi droite [AB).
- un point N qui appartient à la demi-droite [AC) tel que les droites (BC) et (MN) soient parallèles.

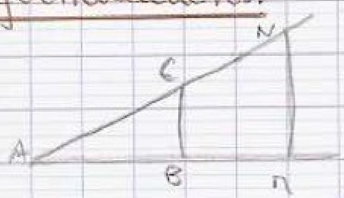
Alors les longueurs des côtés du triangle AMN sont proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle ABC.

Autre formulations:

On a : - un triangle ABC et un triangle AMN tels que : $M \in [AB)$ et $N \in [AC)$.

Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors le triangle AMN est une réduction ou un agrandissement du triangle ABC.

Autres formulations:



On sait que : (BC) // (MN)

Alors, le triangle AMN est une réduction ou un agrandissement du triangle ABC.

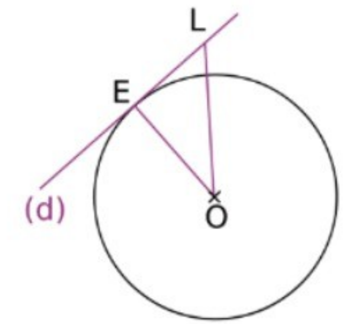
Expérimentations exploratoires

- **Formulation-reformulation**

Exemple n°2 (démonstration)

Exercice 1

Sur la figure ci-contre, la droite (d) est la tangente au cercle en E.
Le point L appartient à la droite (d) et l'angle $\widehat{EOL}$ mesure 38°.
En justifiant précisément, donner la mesure de l'angle $\widehat{ELO}$.



on sait que $\widehat{EOL}$ égale à 38° et que $\widehat{OEL}$ égale à 90°
Alors : 90 - 38 = 52°
Donc l'angle $\widehat{ELO}$ égale à 52°

On sait que $\widehat{EOL}$ est égale à 38° et que $\widehat{OEL}$ est égale à 90° car la droite (d) est tangente au cercle O donc elle est perpendiculaire à la demi droite (OE). $\widehat{LEO}$ est donc un angle droit

La somme des angles d'un triangle doivent être égale à 180°
Alors 90 - 38 = 52°
90 + 38 + 52 = 180°
Donc l'angle $\widehat{EOL}$ est égale à 52°.

Perspective - bi/plurilinguisme

Typologie de situations (Laurent Gajo). Cinq cas de figure :

- Structure bilingue pour élèves monolingues,
- Structure monolingue L2 pour élèves monolingues L1,
- Structure bilingue pour élèves bilingues,
- Structure monolingue pour élèves bilingues,
- Structure monolingue L1 pour élèves monolingues L2.

Autre classification :

- L2 utilisée comme une L1 (et souvent L1 pour l’enseignant),
- L2 utilisée comme une L2 (conscience de l’étrangeté, travail explicite sur la langue),
- L2 utilisée en alternance ou en relation avec la L1 (bi-plurilinguisme comme outil).

Perspective - bi/plurilinguisme

Laurent Gajo affirme que « le travail monolingue gomme quelque peu la relation complexe entre discours et science ».

La présence de deux langues permet une « re-médiation » : à la fois une seconde médiation, et la possibilité d'un remède à d'éventuelles difficultés langagières (transparentes).

L'opacité de la L2 constitue une chance bien plus qu'un obstacle. La L2 offre ou impose une deuxième médiation susceptible d'amener, d'une part, un ajustement plus explicite des moyens linguistiques et, de l'autre, un regard alternatif sur les liens entre discours et savoirs. C'est à ce double niveau que le plurilinguisme peut servir à la fois de loupe et de ressource supplémentaire dans le processus de construction des savoirs.

On observe ainsi en classe bilingue une continuité de traitement entre l'opacité de la langue et la densité du contenu disciplinaire, et le travail intégré permet l'émergence concomitante des deux types de savoir.