Groupe IREM de Bordeaux : Annie Berté, Joëlle Chagneau, Catherine Desnavres, Jean Lafourcade, Marie-Christine Mauratille, Claire Sageaux

DES SITUATIONS POUR INTRODUIRE LE CA LCUL LITTERAL EN 6ème et 5ème

Introduction

Nous constatons que malgré de nombreux exercices, beaucoup d'élèves ne maîtrisent pas correctement les techniques de calcul algébrique. D'autre part, l'usage de l'algèbre comme outil pour résoudre des problèmes, est généralement suggéré par l'énoncé des exercices. Lorsque les élèves doivent prendre l'initiative de l'utiliser, ils n'y pensent pas.

Les situations proposées dans ce document visent donc à montrer comment on peut enseigner l'algèbre au collège, et ce dès la sixième, de façon à ce que cet outil prenne sens pour les élèves et devienne donc réellement disponible.

Notre but est de proposer des situations d'enseignement et de les organiser dans une progression. Chaque situation est accompagnée d'observations sur le déroulement en classe et de remarques destinées à élargir le point de vue de l'enseignant qui utilise la situation en classe. Nous explicitons les choix que nous avons faits et les raisons qui les motivent. Ces réflexions visent à permettre aux enseignants de tirer le meilleur profit de ces situations pour leurs élèves, parce qu'ils en auront compris les enjeux. Et pour ceux qui le souhaitent, de construire eux mêmes des situations de ce type, parce qu'ils en auront compris la genèse.

1- Analyse des difficultés des élèves

Nous sommes partis de deux questions auxquelles dans un premier temps nous avons répondu de la façon suivante :

- Quand dirons-nous que les élèves savent faire de l'algèbre?

a) s'ils pensent à introduire des lettres pour résoudre un problème,

b) s'ils savent manipuler des expressions littérales et résoudre des équations.

- Quelles sont les difficultés qu'ils rencontrent ?

Pour le savoir nous les écoutons, nous les observons et nous examinons leurs productions.

Devant les grosses difficultés de nos élèves de $4^{ème}$ et de $3^{ème}$, nous avons admis que, pour augmenter les chances de réussite, il faudrait faire entrer les élèves dans l'algèbre dès la $6^{ème}$. Explicitons un peu.

Voici deux productions d'élèves de quatrième :

A.

$$\begin{aligned}&(4x+5)(2x-3)\\&= 4x \times 2x + 4x \times (-3) + 5 \times 2x + 5 \times (-3)\\&= 8x^2 + -4x + 10x + -15\\&= 14x^2 + -15\\&= 14x^2 - 15\end{aligned}$$

D.

$$\begin{aligned}&(4x+5)(2x-3)\\&= 4x \times 2x + 4x \times (-3) + 5 \times 2x + 5 \times (-3)\\&= 8x + (-12x) + 10x + (-15)\\&= -30x + (-15).\end{aligned}$$

Visiblement ces deux élèves ont appris avec sérieux le développement d'un produit en utilisant la double distributivité. Nous ne pouvons pas dire avec ces seules productions s'ils ont compris mais du moins nous constatons qu'ils n'ont pas fait d'erreurs en développant.

En revanche les erreurs sont venues dans les calculs de réduction .

Elève A : A la deuxième ligne il oublie de multiplier par –3. Pour passer de la $3^{ème}$ à la $4^{ème}$ ligne, il ajoute $-4x + 10x$ et trouve $6x^2$ qu'il ajoute à $8x^2$. C'est ce qui explique $14x^2$ à la ligne suivante.

Elève D : Il oublie le carré dans la réduction de $4x \times 2x$, il trouve 8*x* puis il commet une autre erreur en ajoutant $8x+(-12)x+10$ et il trouve 8 + (-12) + 10 = -30.

Nous identifions sur ce simple exemple deux grands domaines d'erreurs :

- Le domaine du calcul dans les ensembles de nombres (ici les relatifs mais il y a autant d'erreurs avec les rationnels même positifs).

Non seulement les élèves de 4ème ont besoin de savoir opérer avec deux nombres relatifs rationnels, mais ils doivent aussi connaître les propriétés des opérations. Pour réduire $4\ x \times (-3)$ il faut penser mentalement à $4 \times (-3) \times x = (-12) \times x$ (commutativité et associativité de la multiplication).

Ce travail sur les structures algébriques des ensembles de nombres peut démarrer dès la 6ème et c'est bien une entrée dans l'algèbre.

- Le domaine du calcul littéral :

Les élèves ne donnent pas de sens aux différents signes, en particulier aux lettres. L'élève D sait peut-être calculer 4 x 5 x 2 x 5 mais $4x \times 2x$ n'a pas de sens pour lui

Est-il possible d'introduire du calcul littéral dès la 6ème? Oui, notre travail le prouve.
En faisant entrer les élèves dans l'algèbre dès la 6ème nous serons un peu en bordure des programmes mais en accord avec le document : « L'algèbre et en particulier le calcul littéral de la 6ème à la 2de »écrit en 2003 par l'Inspection Pédagogique régionale de l'Académie d'Orléans- Tours.

2- Nos choix didactiques

Notre travail en algèbre de la 6ème à la 3ème consiste donc à construire des AER[1] qui visent deux apprentissages :

- Celui des structures algébriques des ensembles de nombres.

Dans certaines AER les élèves doivent introduire des nouveaux nombres et opérer avec eux pour résoudre des problèmes internes ou externes aux mathématiques (introduire les relatifs ou les rationnels pour résoudre des équations, utiliser des rationnels pour communiquer des longueurs, multiplier les décimaux pour résoudre des problèmes arithmétiques, introduire la racine carrée pour dupliquer le carré, etc...)

- Celui du calcul littéral

Nos élèves ne sont pas assez familiers avec les lettres, souvent on les entend dire, et cela jusqu'en 3ème : « dès qu'il y a des lettres je n'y comprends rien ! Les lettres ça m'embrouille! ». Il faut donc trouver des situations d'enseignement pour que les lettres apparaissent comme un moyen pour résoudre des problèmes et non comme un obstacle, et cela dès les deux premières années de collège.

Les deux apprentissages s'interpénètrent nécessairement dans les progressions que nous construisons pour chaque année de collège.
Nous avons construit des AER où les élèves ne vont travailler qu'avec des nombres, d'autres où ils vont dès le début travailler avec des lettres, d'autres où ils vont travailler avec des nombres d'abord, puis ils auront besoin des lettres. Dans tous les cas, ils feront de l'algèbre.
Certains signes et règles sont utilisés aussi bien dans le calcul numérique que dans le calcul littéral : par exemple le signe − et ses trois significations (opératoire, prédicatoire et opposé), le signe =, (symétrie pour la substitution et transitivité), les parenthèses et les priorités opératoires, ...
Tout cela fait l'objet de situations spécifiques dans notre travail en classe dont nous ne parlons pas dans ce document. Il est possible de se référer à nos documents publiés par l'IREM d'Aquitaine[2].

---

[1] Activité d'Etude et de Recherche

[2] Référence pour les documents : adresse de l'IREM- Site. Sans parler des brochures, car on donne plus loin le titre de la brochure de 6ème /5ème .

Parce que la possibilité d'introduire un travail substantiel sur les lettres dès la $6^{ème}$ est loin d'être une évidence, nous centrons ce texte sur quelques situations dans lesquelles les élèves font du calcul littéral, et uniquement en $6^{ème}$ et $5^{ème}$.
Pour les professeurs, nous explicitons le statut des lettres que nous faisons manipuler aux élèves, car le statut des lettres en algèbre est complexe et change très souvent. Cela semble « naturel » à un expert au point qu'il peut même ne pas s'en rendre compte, c'est bien moins « naturel » pour les élèves.

3- Les raisons d'être de l'algèbre élémentaire[3]

Ces différents statuts des lettres tiennent aux différentes raisons d'être de l'algèbre élémentaire. L'algèbre est d'abord un outil pour traduire de façon concise et non ambiguë des programmes de calcul. Dans toutes les situations que nous donnons ci-dessous les élèves vont être amenés à produire de tels programmes qui sont des expressions algébriques où les lettres ont le statut de variables. C'est le caractère procédural de l'algèbre.

En second lieu l'algèbre sert à transformer valablement un programme de calcul en un autre programme équivalent c'est-à-dire un programme qui donne la même valeur numérique quelle que soit la valeur donnée aux variables. C'est ce qui était demandé aux élèves dont nous avons examiné les copies plus haut. Il s'agissait, grâce à la double distributivité, de transformer en somme une expression algébrique fournie sous forme de produit. Lors de la transformation d'une expression algébrique, les lettres ont le statut d'indéterminées. C'est le caractère structural de l'algèbre qui est en jeu. Mais les élèves peuvent se demander quel est l'intérêt d'apprendre les techniques pour réaliser ces transformations. Nous allons voir plus loin une réponse à leur question (I-A-d-1).

Une troisième et principale raison d'être de l'algèbre est de résoudre des problèmes, comme par exemple prouver des conjectures de nature algébrique ou trouver la ou les solutions de problèmes de nature diverse, grâce à la résolution d'équations ou d'inéquations. Pour réussir cela, les deux apprentissages fondamentaux précédents (traduire un programme de calcul par une expression algébrique et tranformer cette expression) sont indispensables mais aussi de nombreux autres apprentissages algébriques plus spécifiques et nous les signalerons au fur et à mesure de l'étude des situations problèmes que nous analysons ci-dessous, ainsi que dans un autre document sur les équations en $4^{ème}$.

I- Produire une formule, décrire un calcul : les poignées de main et/ou les carrés bordés.

Première condition pour faire de l'algèbre : introduire des lettres pour résoudre un problème.
L'algèbre est un langage qui permet de décrire des programmes de calcul de manière simple et efficace, c'est à dire représenter une suite de consignes décrivant des calculs, qui serait appliquée à plusieurs nombres connus ou non.
Il faut donc que les élèves s'approprient ce langage, dans des situations où ils seront amenés, non pas à appliquer une formule, comme ils ont l'habitude de le faire à l'école élémentaire, mais à en trouver une eux-mêmes, pour décrire un calcul qui serait à effectuer plusieurs fois, avec de grands nombres.

Nous proposons deux problèmes pour la $6^{ème}$ et/ou la $5^{ème}$. Le premier intitulé « Les poignées de main » est prévu en cours de $6^{ème}$, mais nous l'avons aussi testé en $4^{ème}$. Le second intitulé « Les carrés bordés » est décrit dans les commentaires de programmes. Nous l'utilisons en $5^{ème}$ mais il peut être posé en $6^{ème}$ selon la décision du professeur. Dans ce qui suit nous justifions notre choix.

1- Problème « Les poignées de main »

[3] Le professeur pourra aussi consulter à ce sujet le site AMPERES-INRP contribution de l'IREM de Clermont-Ferrand (référencer peut-être mieux)

Nous n'allons pas vous exposer ici tout ce qui se passe en classe, mais seulement ce qui concerne au plus près notre propos.

Dévolution du problème : Le professeur demande à quatre élèves de venir au tableau et de se serrer la main comme s'ils se rencontraient un matin. Il demande ensuite à la classe combien de poignées de mains ont été échangées. La classe se met vite d'accord pour répondre qu'il y en a eu 6.

Problème : « Et si les 628 élèves du collège se saluaient le matin, combien de poignées de mains échangeraient-ils ? »
Les élèves sont alors effrayés par l'ampleur de la tâche et le professeur les autorise à chercher par groupe de deux.

Différentes stratégies apparaissent ainsi que différents résultats :

- essais avec des petits nombres, schémas, utilisation de crayons et de stylos pour figurer les personnes, élaboration de tableaux...
- raisonnements qui conduisent par exemple à la somme des $n-1$ premiers entiers

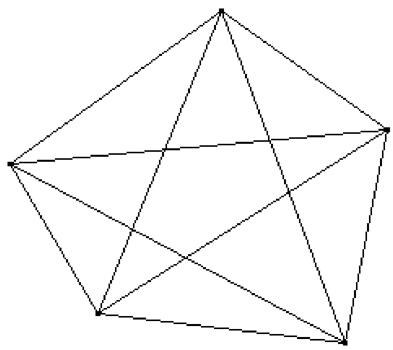
Nous n'allons pas vous exposer ici tout ce qui se passe en classe, mais seulement ce qui concerne au plus près notre propos.

A- Stratégie avec schéma et / ou raisonnement

Certains élèves, influencés par la mise en scène des poignées de mains qu'ils viennent de voir, font des schémas pour se représenter la situation avec des petits nombres (5 par exemple) :

Le schéma aide les élèves à formuler de façon explicite le raisonnement suivant :

Chaque personne est reliée aux quatre autres. Si on comptait 5 $\times$ 4 poignées de mains, deux personnes se seraient saluées deux fois; donc on doit diviser par 2.



Ce raisonnement est aussi fait par des élèves qui ne font pas de schémas et qui imaginent : *une personne ne se saluant pas elle-même , on calcule 5×4 et, ayant ainsi compté 2 fois chaque poignée de main, on doit diviser par 2.*

La généralisation de ce calcul permet d'obtenir :

$$(628 \times 627) : 2 = 393756 : 2 = 196878$$

Certains élèves décrivent le procédé de calcul avec une phrase :
on prend le nombre, on le multiplie par le nombre qui est juste avant et on divise le résultat par deux..

Ce n'est pas de l'algèbre, mais on n'en est pas très loin avec un programme de calcul qui montre son efficacité si le calcul doit être fait plusieurs fois pour des nombres de personnes différents.

Pour transmettre ce programme plus rapidement qu'avec des mots, les élèves pourraient écrire une formule ainsi :

$$N = [n \times (n-1)] : 2 \qquad \text{ou} \qquad N = \frac{n\times(n-1)}{2}$$

Mais aucun élève de 6ème ou 5ème ne produit ce genre d'écriture seul. Ils ne produisent ni formule avec deux lettres une pour la variable *n*, une pour le résultat N et un signe d'égalité, comme ils en ont vu à l'école élémentaire, ni simplement la seule expression du programme sous la forme :
$[n \times (n-1)] : 2$

Cela pourrait arriver, mais nous ne l'avons jamais observé tant que d'autres situations de préparation au calcul littéral n'ont pas été introduites avant celle-ci en 6$^{\text{ème}}$. Nous les donnons plus loin.

Par exemple, il est bien difficile pour un élève d'écrire une expression littérale quand il n'est pas capable d'écrire le calcul numérique en une seule ligne. En effet, l'élève qui en resterait à :

$628 \times 627 = 393756$

$393756 : 2 = 196878$

aura beaucoup de mal à écrire le programme avec une lettre .
En revanche, celui qui écrit le calcul en une seule ligne peut plus facilement imaginer que le « 628 » a le même rôle que le « *n* » .
Il faudra donc travailler avant ce type d'écriture en une ligne sur des expressions numériques.

Pour que le maximum d'élèves écrivent l'expression littérale, le professeur peut suggérer d'appeler *n* le nombre de personnes, ici *n* = 628. Il aide les élèves à exprimer le nombre entier précédent, ici 627. C'est difficile car les élèves veulent mettre deux lettres différentes, il faut leur expliquer pourquoi il ne faut qu'une lettre. Deux lettres différentes désigneraient deux nombres indépendants l'un de l'autre. En effet les élèves disent souvent que *si le nombre s'appelle « n » le nombre qui est juste avant s 'appelle « m »* !
Pour contourner cette difficulté un collègue a un jour décidé d'appeler « *a* » le nombre de personnes, il s'est trouvé des élèves pour lui dire que l'entier précédent s'appelait « *z* » !
Le professeur suggère aux élèves l'expression « *n – 1* » si aucun n'y pense. Il explique qu'ayant désigné un des nombres de l'énoncé par une lettre, tous les autres nombres du même énoncé doivent s'écrire à l'aide de cette lettre en utilisant des calculs si nécessaire pour montrer comment ces nombres sont reliés entre eux.

B- Stratégie avec tableau :

Certains élèves ont l'idée qu'il existe une fonction croissante sous-jacente dans cette situation : quand le nombre de personnes augmente, le nombre de poignées de main augmente.

Si les élèves en sont restés à ce qu'ils ont appris à l'école élémentaire - et c'était le cas quand nous avons expérimenté cette situation en 6$^{\text{ème}}$ - la seule fonction qu'ils connaissent est la fonction linéaire qu'ils ont fréquentée uniquement comme la correspondance entre deux listes de nombres, la proportionnalité se vérifiant dans un tableau (en calculant les rapports) et éventuellement avec une représentation graphique.
Certains élèves pensent à construire un tableau, cherchant une proportionnalité hypothétique.
Il est très rare qu'ils aient l'idée qu'il existe d'autres fonctions qui se traduiraient aussi par un tableau de nombres pour visualiser la correspondance, ce qui peut en bloquer d'autres qui ne dressent pas un tableau de valeurs s'ils se sont rendus compte, d'après les premiers calculs faits avec de petits nombres, qu'il n'y a pas d'espoir de trouver une proportionnalité. Dans ce cas, s'ils n'ont pas d'autres idées, le professeur peut leur suggérer de faire quand même un tableau de correspondance pour voir.....

En calculant les quotients des nombres de la deuxième ligne par les nombres de la première ligne ils concluent par la négative en ce qui concerne la proportionnalité mais ils découvrent une logique dans la progression des « multiplicateurs » .

Nombre de personnes	2	3	4	5	6	…
	$\times 0{,}5$	$\times 1$	$\times 1{,}5$	$\times 2$	$\times 2{,}5$	
Nombre de poignées de mains	1	3	6	10	15	…

Les élèves remarquent que ce multiplicateur augmente toujours de 0,5 mais cette méthode ne permet pas de trouver le nombre correspondant à 628 car on ne connaît pas le multiplicateur qui correspond à 627 et ce serait trop long… Cependant des élèves remarquent que ce multiplicateur est toujours la moitié du nombre de la première ligne de la colonne précédente.

Ce qui permet le calcul : 628 $\times$ (627 : 2) = 628 $\times$ 313,5 = 196878
Le professeur sollicite les élèves pour qu'ils écrivent les deux calculs en une seule expression.
Il n'y a aucune justification du résultat car les élèves sont restés au niveau d'une conjecture sur les nombres hors du contexte du problème.

Une justification pourra venir de l'examen du programme de calcul exprimé en une phrase par ceux qui ont fait le raisonnement explicité dans le paragraphe précédent et de la formule qui en résulte trouvée avec l'aide du professeur.
La première écriture du programme de calcul se transforme en la seconde :

$$\frac{n\times(n-1)}{2} = n\times\frac{n-1}{2}$$

C-Stratégie avec mime et raisonnement :

D'autres élèves (notamment ceux qui représentent les personnes par des crayons) raisonnent de deux façons différentes :

– les personnes arrivent successivement les unes après les autres, et la personne qui arrive en dernier salue celles qui sont déjà là. On obtient alors pour six personnes par exemple le calcul : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 (la sixième personne arrivée saluant les cinq autres et ne se saluant pas elle même.)
– D'autres élèves imaginent les six personnes réunies et partant tour à tour après avoir salué les autres . Ils obtiennent alors le calcul : 5 + 4 + 3 + 2 + 1

En sixième les élèves n'arrivent pas à calculer ces sommes pour un grand nombre de personnes. Le professeur peut leur montrer comment le faire en utilisant les deux écritures de la somme qu'ils ont trouvée, pour calculer le double de la somme et en déduire la somme elle même quel que soit le nombre, aussi grand soit il .

Nous avons testé cette situation en quatrième, certains élèves font le même raisonnement que les élèves de sixième ci dessus, mais ils font plusieurs essais avec des nombres de personnes différents.
Ils imaginent alors plusieurs moyens pour calculer les sommes obtenues en utilisant la commutativité et l'associativité de l'addition :
- Un procédé classique qui les amènent à distinguer un nombre pair ou un nombre impair de personnes
Pour un nombre impair de personnes, par exemple 9 :
8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = (8 + 1) + (7 + 2) +(6 + 3) +(5 + 4) = 9 $\times$ 4

Pour un nombre pair de personnes, par exemple 10 :
9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4+ 3 +2 +1 = 9 + (8 + 1) + (7 + 2) + (6 + 3) + (5 + 4) = 9 $\times$ 5
Et ils remarquent que le nombre 5 est la moitié du nombre de personnes.

Le nombre proposé, 628, étant pair, ils généralisent le deuxième procédé et ils trouvent qu'il faut multiplier le nombre de personnes moins une par la moitié du nombre de personnes : 627 $\times$ 314

- D'autres procédés, sans doute inspirés de ce qui précède par diffusion dans la classe.
Par exemple, une élève a trouvé pour 11 personnes :
10 + 9 +8 + 7 + 6 +5 +4 +3 +2 +1 = 10 + (9 + 1) + (8 +2) + (7 + 3) + (6 +4) + 5 = (10 $\times$ 5) + 5
Ayant oublié le problème concret, cette élève a traduit seulement le procédé de calcul de la somme par : on multiplie le premier nombre par sa moitié et on rajoute encore une fois la moitié.

En quatrième, certains élèves arrivent mieux qu'en 6ème à traduire leur procédé de calcul par une formule ou la lettre *n* est l'initiale du mot « nombre de personnes ». S'ils ne le font pas le professeur les incite à le faire.
Finalement le programme de calcul peut s'écrire de trois façons au moins :

$$\frac{n\times(n-1)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{2}\times(n-1) \quad \text{ou} \quad n\times\frac{n-1}{2}$$

Au moment de l'application du programme avec des nombres particuliers on pourra choisir la forme la plus adaptée selon que c'est n ou $(n-1)$ qui est pair.

Quant à l'élève de $4^{\text{ème}}$ qui avait calculé pour 11 personnes, elle arrivait à :

$$(n-1)\times\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}$$

Ecrire sa propre formule avec l'aide éventuelle du professeur qui la soumet à la classe et arriver ensemble, en mettant $\frac{n-1}{2}$ en facteur à retrouver la troisième écriture équivalente aux deux premières a été source d'une grande satisfaction .

<u>D-Compléments sur la gestion de la classe et prolongement avec la résolution d'une équation.</u>

<u>a- Validation des programmes de calcul trouvés et transformation d'une expression en une autre</u>

Comme nous venons de le voir en examinant les stratégies des élèves, l'écriture du calcul en une seule ligne et la désignation du nombre de personnes par la lettre n ayant le statut de **variable** a été un premier pas vers l'algèbre. On en franchit un second en trouvant plusieurs écritures du programme et en écrivant entre elles des égalités qui sont des identités dans lesquelles la lettre a un statut d'**indéterminée**. La lettre n n'est plus seulement une simple abréviation du mot « nombre de personnes » et la formule est devenue une expression algébrique sur laquelle on peut intervenir. Ce faisant, les élèves sont passés de l'aspect **procédural** de l'expression à un travail sur sa **structure**.
Ce travail, guidé par le professeur, utilise des règles de transformations des expressions. Mais cette fois cet exercice sur les structures n'est pas gratuit comme le type d'exercice de développement-réduction qui nous a servi dans l'introduction pour analyser les difficultés des élèves. Il y a une motivation à l'apprentissage car il s'agit de se convaincre que la méthode trouvée a conduit à un programme exact même s'il s'exprime différemment de celui du voisin.

Nous avons vu que l'on arrive à : $\frac{n\times(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\times(n-1) = n\times\frac{n-1}{2}$

Sur le plan algébrique ces égalités se justifient par plusieurs théorèmes importants, dont l'un par exemple peut s'énoncer ainsi : pour diviser un produit par un nombre, il suffit de diviser un des facteurs du produit par ce nombre. Il n'est pas explicité dans les programmes de collège donc jamais énoncé et pourtant bien utile .
Dans cette situation il arrive dès les premiers calculs car l'élève, qui veut calculer (628 x 627)/2 , a la possibilité de diviser 628 par 2 avant d'effectuer le produit.

De plus il s'agit de $\frac{ab}{c}=a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\times b$ qui peut aussi se rattacher à la technique pour effectuer le produit d'un nombre par un quotient, au programme de sixième. Cette propriété est liée en outre à la compréhension de ce que signifie : « prendre une fraction d'une quantité » phrase qui figure en ces termes dans le programme de $6^{\text{ème}}$. La mise en place de cette règle fait l'objet de situations spécifiques non décrites ici. On se réfère à cette règle pour justifier les égalités entre ces expressions.

En $5^{\text{ème}}$ se place l'apprentissage de la formule de l'aire du triangle en fonction de la base et de la hauteur $\frac{bh}{2}=b\times\frac{h}{2}=\frac{b}{2}\times h$

Quand nos élèves recherchent eux-mêmes la procédure de calcul par découpage, pliage ou par des transformations géométriques à partir de l'aire du rectangle ou de l'aire du parallélogramme, ils arrivent à lune ou l'autre des trois écritures. La différence non négligeable vient du fait que dans les poignées de mains nous avons une fonction d'une variable alors que pour l'aire du triangle nous avons deux paramètres et pouvons y voir une fonction de deux variables. Si une situation antérieure a inscrit dans la mémoire de la classe l'équivalence de ces trois procédures de calcul, l'apprentissage se passe mieux , vu toutes les difficultés supplémentaires soulevées par cette formule géométrique.[4]

Avec les trois expressions du programme de calcul pour les poignées de main, le professeur attire l'attention des élèves sur la structure des expressions et les changements effectués sur cette structure. Les erreurs peuvent être repérées en remplaçant les lettres par des valeurs.

Dans certains types de méthodes la validation est interne à la méthode, c'est à dire que cette validation vient du raisonnement trouvé par les élèves (exemple : chaque personne serre la main aux autres sans se saluer elle-même, donc il faut multiplier 628 par 627 et diviser par 2) (phrase 1). Dans ce cas le professeur doit organiser le passage de la phrase 1 à celle ci : multiplier le nombre de personnes par le nombre qui le précède et diviser par 2 (phrase 2). Ce n'est pas très difficile à obtenir. En effet le nombre 628, par son étrangeté dû à sa taille, est perçu assez facilement comme un nombre quelconque, ce qui arriverait moins avec un petit nombre « rond » comme 20 par exemple. De plus comme nous l'avons vu un grand nombre bloque les procédures de représentation des personnes par des objets ou des dessins, pour obliger les élèves à raisonner de façon générale. C'est pour cela que la question suivante du professeur ne restera pas sans réponse: pour 628 personnes nous savons calculer le nombre de poignées de mains, et si le nombre de personnes change, comment ferons-nous ? Beaucoup d'élèves formulent une phrase voisine de la phrase 2. La formulation que nous donnons dans notre texte avec « le nombre juste avant » est une formulation d'élèves. Un professeur dirait : « le nombre précédent ». Le professeur n'a plus qu'à reprendre la phrase 2 ou reprendre la formulation d'un élève peut-être moins standard mais plus compréhensible par tous, pour l'écrire au tableau et éventuellement suggérer de l'améliorer. Ensuite le professeur peut demander aux élèves de traduire ce programme de calcul avec le moins de mots possible, en donnant la lettre *n* . La probabilité pour qu'elle vienne des élèves est accrue du fait que nous ne sommes pas en début de 6ème , mais un peu plus tard, alors qu'ils ont déjà manipulé des expressions littérales qu'ils n'ont pas apprises toutes faites, mais qu'ils ont construites (voir la suite de notre texte II-A-exercices). On obtient alors les écritures correspondantes souvent avec les deux points du signe de division que les élèves abandonnent difficilement pour le trait de fraction

[n x (n-1)] : 2 ou (n : 2) x (n-1) ou n x [(n-1) : 2] (phrase 3).

L'apparition des parenthèses et des crochets n'est pas rare vu le travail qui a été effectué avant dans des situations antérieures portant sur l'écriture en une seule ligne d'un calcul exclusivement numérique. L'avantage du trait de fraction qui économise les crochets est revu ainsi.

Dans d'autres types de méthodes, les élèves trouvent le procédé de calcul en l'énonçant à partir de la logique d'un tableau par exemple. Ils ont fait un calcul basé sur une simple conjecture non justifiée. Pour valider leur procédure la seule possibilité alors est d'écrire la formule littérale et de la démontrer par récurrence ce que le professeur n'aborde pas, ou bien de la transformer pour obtenir ainsi une autre formule trouvée par leurs camarades qui, eux, ont justifié leur calcul par un raisonnement (exemple phrase 3).

Nous avons expérimenté plusieurs fois la résolution de ce problème en classe et les stratégies des élèves ont souvent été différentes. Cependant nous avons toujours observé qu'en 6ème ils n'introduisent pas d'eux mêmes une formule littérale pour donner la solution du problème, ils trouvent l'expression du programme de calcul sous la forme d'une phrase. En 6ème et même en 5ème, cette situation ne vise donc pas l'écriture d'une formule par les élèves seuls.

Mais le professeur peut les y conduire à la fin et les convaincre que la formule est un procédé économique pour transmettre ce programme quand on fait varier le nombre de personnes. La lettre a

[4] Il faut comprendre à ce propos que la hauteur n'est pas nécessairement verticale et que la « base » est n'importe quel côté associé à la hauteur correspondante (occasion de franchir encore l'obstacle des directions privilégiées traité dans d'autres situations de notre progression en géométrie). Les élèves pourront trouver par exemple la hauteur connaissant l'aire et la base avec cette « formule » $A = b\text{x}(h/2)$ seulement s'ils savent la faire fonctionner comme une équation algébrique (résolution à partir de la définition du quotient puisqu'en 5ème on n'a pas encore abordé la résolution systématique de toutes les équations de premier degré au programme de4^{ème}).

alors le statut de **variable**. La notion de fonction est sous-jacente, on l'a vu notamment dans la stratégie « tableau ».

b- Introduction d'une équation :

Pour insister sur l'intérêt des lettres qui permettent de faire réellement de l'algèbre, l'enseignant peut demander de trouver le nombre de personnes si 55 poignées de mains ont été échangées.
L'écriture d'une équation conduit à la solution.
On arrive à $n \times (n-1) = 110 = 11 \times 10$.
C'est la seule décomposition possible de 110 en produit de deux entiers consécutifs donc $n = 11$.
Encore une fois le professeur conduit les élèves à intervenir sur la formule qui n'est plus une écriture figée. La lettre change encore de statut et prend celui d'**inconnue**.

Même en quatrième, les élèves seuls ne reprennent pas la formule qu'ils ont eux-mêmes trouvée pour écrire une équation. Ils la reprennent comme un programme de calcul pour faire des essais en remplaçant la lettre par différentes valeurs. La lettre conserve son statut de variable. Il apparaît que le changement du statut de la lettre qui doit passer de variable à inconnue au cours du même problème est un obstacle pour les élèves.
Le professeur peut mettre en scène ce problème en annonçant: « J'ai choisi un nombre de personnes, mais je ne vous dis pas ce nombre » (Il peut l'écrire sur un papier caché, il écrit 11). « Maintenant je veux calculer le nombre de poignées de mains correspondantes ». Individuellement ou par groupe de 2, les élèves doivent écrire sur une feuille ce qu'ils vont dire au professeur pour lui permettre de faire le calcul. Le professeur a deux possibilités pour choisir le moment où il pose ainsi ce problème. S'il le pose juste après que les élèves aient trouvé pour 628, c'est ce qui motivera l'écriture d'un programme de calcul (phrase ou expression algébrique en suggérant alors la lettre n). S'il le pose plus tard, à la fin, quand les écritures algébriques ont été trouvées, il s'agit d'apprendre à les utiliser. Dans le premier cas, lors de la mise en commun le professeur relève quelques propositions types, exactes ou erronées. Il recueille les phrases et, s'il suggère la variable, des écritures avec n . La classe s'accorde sur les programmes de calcul reconnus exacts et équivalents. Dans le second cas le programme sous forme algébrique est déjà écrit au tableau. Dans les deux cas le professeur calcule avec le programme et communique à la classe son résultat: 55. Les élèves doivent alors retrouver le nombre de personnes écrit en cachette par le professeur.

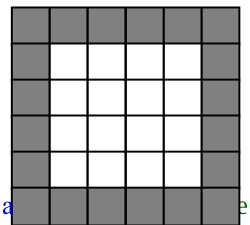
2- Problème « Les carrés bordés ».

La situation des poignées de mains amène les élèves à expliciter l'expression d'une fonction dans laquelle la variable (nombre de personnes) et son image sont clairement identifiées par les élèves eux-mêmes, même si les mots de variable et de fonction ne sont pas prononcés.
Dans la situation des carrés bordés telle qu'elle figure dans une brochure INRP[5], l'enseignant demande d'exprimer une quantité (le nombre de carrés grisés) mais selon les documents deux variables différentes sont suggérées pour exprimer ce nombre.
Il s'agit d'une situation assez familière de carrelage au sol avec un motif central carré formé de carreaux blancs et une bordure de carreaux gris tout autour.

1-Si on imagine que les carreaux blancs sont posés d'abord et qu'il faut prévoir à partir du carré blanc le nombre de carreaux gris nécessaires à la bordure pour un très grand carrelage, ceci incite à prendre pour variable le nombre n de carreaux blancs du côté du carré intérieur (sur le dessin ci-dessous c'est 4), et à arriver selon la procédure pour compter les carreaux gris à des écritures comme :

(n x 4) + 4

n + n + (n + 2) + (n + 2)



[5] Il s'agit de la brochure INRP intitulée : Les débuts de l'algèbre a … e et édition- Cette situation des carrés bordés est suggérée maintenant dans les commentaires des programmes.

$(n + 1) \times 4$ ou $n + 1 + n + 1 + n+ 1 + n + 1$

$n + (n + 1) +(n + 1) + (n + 2)$

$(n + 2) \times 4 – 4$

Les élèves sont ainsi amenés à se convaincre par exemple que
$4 \times (n+2) – 4$ est équivalente à $4\times n + 4$ trouvé par une autre procédure.
En $6^{ème}$ sans connaître la distributivité, ils le feront en se ramenant à l'addition répétée :
$4 \times (n+2) – 4 = n + 2 + n + 2 + n + 2 + n + 2 – 4 = n + n + n + n + 8 – 4 = 4\times n + 4$

Avec les exercices qui se trouvent dans la suite de ce document pour la $6^{ème}$, dans lesquels nous donnons les lettres, nous amenons également les élèves à ce genre de preuve qui n'est pas de trop à ce niveau où certains confondent encore les deux opérations. Nous explicitons aussi dans ce document comment nous introduisons et institutionnalisons la distributivité en $5^{ème}$. Cette situation des carrés bordés permet d'éprouver la fonctionnalité de l'outil pour montrer l'équivalence d'au moins 5 formules. Elle est donc intéressante à ce niveau.
Eventuellement quelques élèves, ou pourquoi pas le professeur si aucun élève n'y pense peuvent introduire une procédure qui amène la formule $(n+2)^2 – n^2$ dont la réduction relève cette fois du programme de $4^{ème}$. Le professeur de $5^{ème}$ a peut-être la liberté de le faire dans une classe de très bon niveau en débordant de son programme, mais en $6^{ème}$ ce n'est pas possible. Notre expérience prouve que les élèves y pensent dans le numérique quand on donne un grand nombre de carreaux. Par exemple avec 89 carreaux blancs sur un côté, ils peuvent alors écrire $91 \times 91 – 89 \times 89$.

En effet, comme dans la situation des poignées de main, le professeur peut commencer à poser le problème en fixant un grand nombre de carreaux pour bloquer les procédures de dessin, puis demander un programme de calcul avec un nombre quelconque. Les commentaires des programmes le suggèrent.

2-Mais si le professeur ne raconte pas cette histoire de la chronologie du carrelage, la variable précédente pour exprimer le nombre de carreaux gris ne s'impose pas naturellement. Et d'ailleurs le document INRP demande de prendre comme variable le nombre k de carreaux gris (et non blancs) sur un côté du carré. Dans le dessin ci-dessus k =6
Les élèves sont alors amenés à prouver par exemple que
$k – 1 + k – 1 + k – 1 + k – 1 = 4\times k – 4$ ou que $k + (k–1) + (k-–1) + (k–2) = 4\times k – 4$

C'est une difficulté en $6^{ème}$ où les élèves ne savent pas quoi dire de $– 1 – 1 – 1 – 1$ ni de $–1 –1 – 2$ alors qu'en $5^{ème}$ ils disposent de la somme des relatifs.
Si le professeur traite les carrés bordés avant la $4^{ème}$ nous proposons, comme le font les commentaires de programmes, de prendre la variable n plutôt que la variable k qui peut se trouver dans d'autres documents. Le professeur de $6^{ème}$ qui a le temps peut traiter les deux situations : « poignées de mains » et « carrés bordés » car elles sont complémentaires ou réserver la seconde pour la $5^{ème}$ comme nous le conseillons pour utliser la distributivité.

Dans la situation des carrés bordés comme dans celle des poignées de main, les élèves sont confrontés à des difficultés majeures qui doivent être dépassées pour acquérir des compétences en algèbre.
- dans les calculs numériques auxquels les élèves sont habitués dans l'enseignement élémentaire, le signe = est orienté pour annoncer le résultat d'un calcul, comme par exemple $89 + 1 = 90$. L'égalité $90 = 89 + 1$ est incongrue. Il ne s'agit pas bien sûr d'une quelconque critique de nos collègues de l'enseignement élémentaire. Il est normal que le savoir évolue avec le temps et il appartient justement au professeur de $6^{ème}$ de le faire évoluer en étant conscient de la difficulté des élèves.
  - environ un tiers des élèves n'ont jamais utilisé les parenthèses à l'école élémentaire. Ils ne connaissent pas les priorités opératoires avant la $5^{ème}$
  -ils ne disposent pas de l'écriture en ligne, et pour eux un résultat ne peut être qu'un nombre:

Par exemple pour résoudre le problème suivant : J'ai posé 4 bandes de 89 carreaux. J'en ajoute 1 au bout de chaque bande, combien ai-je placé de carreaux en tout ? Ils écrivent sur deux lignes

89 + 1 = 90
90 x 4 = 360

ou bien en une ligne 89 + 1 = 90 x 4 = 360

Si on attire leur attention sur l'erreur dans l'égalité certains corrigent par (89 + 1 = 90) x 4 parce que pour eux 89+1 n'est pas le nombre 90, « c'est une addition ». Ils ont besoin du nombre, écrit tel qu'ils le conçoivent, pour opérer avec lui.

Nos élèves n'acceptent pas de considérer 89 + 1 comme le nombre 90 parce que effectivement 89 + 1 indique à la fois une opération et un résultat. Cet obstacle devient bien plus grand en algèbre quand il s'agit d'un résultat comme $a + b$, opération « en suspens » s'il en est ! Les élèves doivent accepter qu'un « résultat » ne soit pas nécessairement un nombre et puisse comporter des signes d'opération ou des lettres (voir ci-dessous II-A-1). C'est ainsi que des élèves qui trouvent à la fin d'un calcul un résultat comme $-4x + 10$ chercheront à tout prix à continuer le calcul et le remplaceront par exemple par $6x$ croyant de la sorte éliminer la marque d'une opération dans le résultat !

3- Conclusion qui motive nos choix.

1. La situation des poignées de main a attiré notre attention sur un savoir très important à développer pour entrer dans l'algèbre : savoir écrire un calcul en une seule ligne. Ceci suppose de maîtriser les priorités opératoires et l'usage des parenthèses pour arriver à écrire plusieurs calculs à la suite.
   Ces apprentissages font l'objet d'autres situations, que nous proposons en sixième et cinquième, mais que nous ne décrirons pas ici.[6]

2. Les deux situations, aussi bien celle des poignées de main que celle des carrés bordés ne montrent pas vraiment aux élèves l'utilité des lettres pour écrire un programme de calcul puisqu'une phrase suffit. Mais sans l'intervention de l'enseignant, les élèves seuls n'ont pas l'idée d'utiliser des lettres dans ce genre de situations du moins en 6ème.

Les seules formules que les élèves utilisent à l'école élémentaire, indiquent un programme de calcul pour des grandeurs comme le périmètre où l'aire d'une figure. Les lettres fonctionnent comme des abréviations (exemple : P pour Périmètre, L et *l* pour Longueur et largeur du rectangle). Ces formules sont utilisées, pour remplacer les lettres par les données de l'exercice et produire un résultat numérique. Les élèves n'ont pas appris à transformer ces égalités en gardant les lettres c'est à dire avec les règles de l'algèbre, et ceci dans le but d'obtenir de nouvelles égalités comme par exemple $L = (P/2) - l$.

Il paraît donc normal qu'en début de sixième, les élèves ne puissent imaginer seuls le langage algébrique comme réponse à un problème Nous avons donc décidé de ne pas commencer l'enseignement de l'algèbre avec ce type de situations (poignées de main ou carrés bordés), mais de proposer aux élèves dès le début de la sixième, des exercices où ils vont rencontrer des lettres qui auront été introduites par le professeur. Mais dans toutes nos situations il ne s'agira pas d'appliquer une formule mais de trouver l'écriture d'un programme de calcul, soit à partir de la lecture d'un dessin comme dans les exercices préliminaires qui suivent (II-A), soit par un raisonnement, quand la valeur de la variable ne permet pas de schéma. .

Progressivement nos élèves vont acquérir les connaissances nécessaires pour produire des programmes de calcul et pour les comparer. C'est avec cette progression que la situation des « poignées de main » et la situation décrite dans les commentaires des programmes intitulée « Les carrés bordés » révèleront en classe leur richesse. La situation « Carrés bordés » pourra compléter en 5ème la situation « Poignées de main » que nous avons décrite plus en détail ici.

---

[6] Vous pouvez trouver une progression complète dans la brochure de l'IREM d'Aquitaine « Entrées dans l'algèbre en sixième et cinquième ».

II- Utiliser des lettres dès la 6ème

Le but est de répondre à la question suivante : « Peut-on résoudre un problème, effectuer certains calculs, même si on ne connaît pas toutes les données ? »
Les lettres sont proposées comme un moyen de désigner un nombre donné dont on ne connaît pas la valeur.

Auparavant l'associativité et la commutativité de l'addition sont travaillées dans le domaine numérique.
Les élèves rencontrent ici pour la première fois en 6ème des calculs où le résultat est une expression littérale et non un nombre. Ils doivent comprendre que, dans un résultat, il peut subsister des lettres et des signes opératoires. Nous donnons quelques exemples de questions parmi d'autres en 6ème et en 5ème.

1. Résoudre un problème comportant des expressions littérales : « a + b = 124 »

L'activité suivante a un triple objectif :
- trouver des couples-solutions de l'équation $a + b = 124$ et montrer un problème qui n'a pas, comme le croient souvent les élèves, une solution unique,
- utiliser la commutativité et l'associativité de l'addition,
- utiliser le caractère substitutif de l'égalité : ici chaque fois que l'on rencontre $a + b$ on le remplace par 124.
- résoudre un problème comportant des expressions littérales sans remplacer les lettres par des valeurs précises.

Consigne 1 : Deux nombres ont une somme égale à 124. Quels peuvent être ces deux nombres ?

Après un court moment de recherche, la mise en commun permet de constater que plusieurs solutions sont possibles. Les solutions entières sont évidemment proposées en premier ; si les élèves n'y pensent pas d'eux-mêmes, le professeur demande si c'est possible avec des nombres décimaux .La classe se met alors d'accord pour dire qu' « il y a autant de possibilités que l'on veut », il y en a une infinité.

Le professeur propose alors de désigner par a et b deux nombres dont la somme sera toujours 124 comme ceux de la liste précédente. Le professeur sollicite l'écriture : $a+b=124$.

Consigne 2 : Sachant que $a+b=124$, sans remplacer chacune des lettres a et b par un nombre particulier, trouver combien vaut chacune des expressions suivantes :
$b+a$ $a+76+b$ $25+b+75+a$ $7{,}4+a+b+2{,}6$ $a+a+b+b$ $(a+b)\times 10$
$a+a+b+a+b+b$ $a+b+b+a+a$

Si quelques élèves rencontrent des difficultés pour comprendre la consigne, on peut corriger les trois premières expressions dans un premier temps et laisser ensuite chercher les autres.
La dernière expression est intéressante et laisse la plupart des élèves perplexes. Lors de la mise en commun on peut obtenir des réponses du type : « on ne peut pas savoir », « ça dépend de la valeur de a », « le résultat est entre 248 et 372 ».
On n'obtient pas la réponse $248+a$ car pour les élèves un résultat doit être un nombre et cette conception fait obstacle bien au delà de la sixième : le professeur introduit cette forme littérale.

Consigne 3 : On va faire maintenant l'exercice inverse : on sait que

c et d sont deux nombres dont la somme est 215. Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une expression utilisant les lettres c et d et éventuellement d'autres nombres.
430   220   100   43   215000.

On obtient entre autres les écritures suivantes :

$430 = (c + d) \times 2 = (c + d) + 215 = (c + d) + (c + d) = c + d + c + d$
$220 = c + d + 5 = c + 2 + d + 3 = (c + d) + (10 : 2)$
$100 = (c + d) - 115 = c + 85 + d - 200$
$43 = (c + d) - 172 = (c + d) : 4 = (c + d) - 215 + 43$
$215000 = (c + d) \times 1000 = 1000 \times (c + d) = (c + d) \times (2000 : 2)$

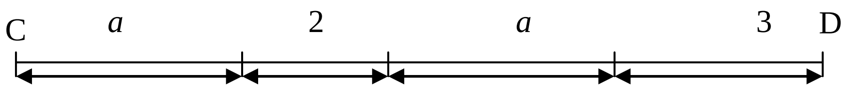
La mise en commun et la validation des différentes propositions devient presque un jeu et certains élèves s'ingénient à trouver des solutions de plus en plus compliquées ! Ils en redemandent !

2- Exercices :

L'objectif de ces exercices est double. Il s'agit tout d'abord d'utiliser avec des lettres les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition.
Mais aussi de permettre aux élèves de rencontrer des exercices où le résultat d'un calcul est une expression littérale et non un nombre.
Ils doivent comprendre que dans un calcul, le résultat, peut comporter des lettres et des signes opératoires.

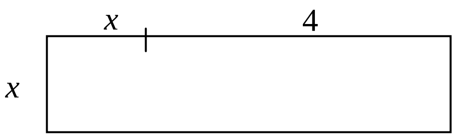
A – Avec les propriétés de l'addition

1) Exprimer à l'aide de a la longueur du segment [CD] .



On ne peut pas calculer la longueur CD, mais on peut l'écrire à l'aide de la lettre a : $a + 2 + a + 3$ *ou* $a + a + 5$ *ou* $2 \times a + 5$.
La réponse n'est pas un nombre mais une formule.

2) Exprimer à l'aide de x le périmètre de la figure suivante :



Les élèves proposent :
$x+4+x+x+4+x$
$(2\times x)+4+(2\times x)+4$
$(4\times x)+8$ ou encore $(2\times x+4)\times 2$
mais aussi des expressions erronées : $x\times x+4$
ou encore $4x+x+4x+x$

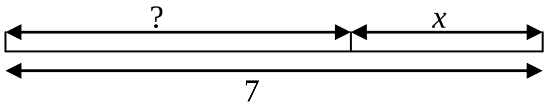
Pour chaque figure, il y aura diverses expressions dans la classe. Il s'agit donc non seulement de trouver des programmes de calcul mais aussi de déterminer si les solutions proposées sont justes ou fausses et pour cela transformer les expressions de façon à se ramener à l'une d'elles qui aura été reconnue comme juste. Cela se fait en classe entière lors de la mise en commun. On travaille ici les propriétés des opérations, commutativité, associativité, sur des expressions littérales.

Dans ce travail sur la structure des expressions pour se convaincre de leur équivalence, la lettre acquiert le statut d'**indéterminée.**

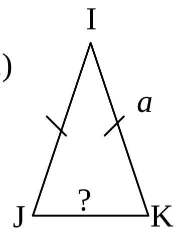
B - Avec la soustraction

Il s'agit ici :
- d'exprimer une longueur à l'aide d'une différence
- de commencer à travailler la transformation $a - b - c = a - (b + c)$ dans des cas simples,.

1) Trouver la longueur du segment noté par un « ? » :

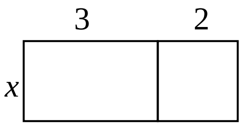


2) Le périmètre du triangle IJK est de 12. Exprimer à l'aide de *a* la longueur JK.



C- Avec la multiplication comme addition répétée

Ecrire l'aire de ce rectangle de plusieurs façons différentes.

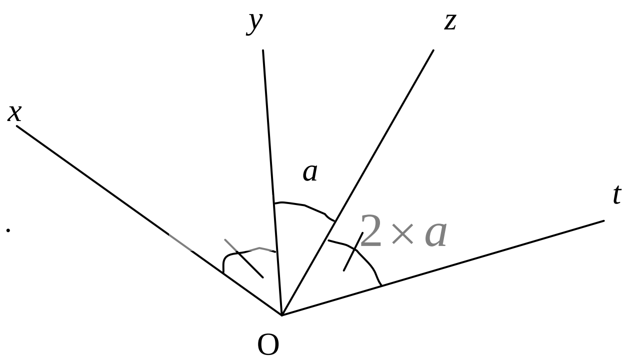


En 6ème on n'a pas formalisé la propriété de la distributivité.
Pour se convaincre que $(3 \times x) + (2 \times x) = 5 \times x$, les élèves reviennent à $(x + x + x) + (x + x)$

D- Avec de petites équations

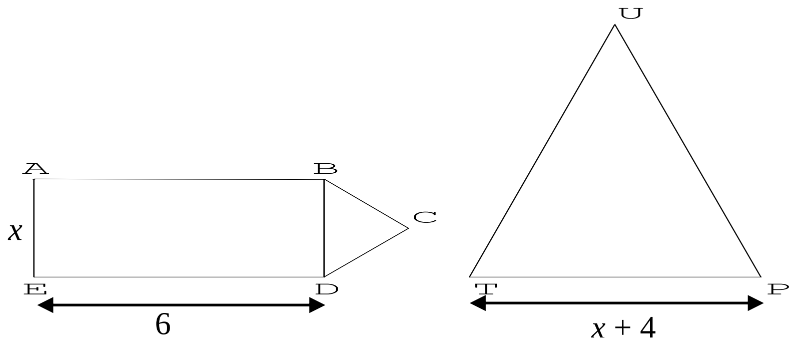
On sait que $\widehat{xOy} = 150°$. **Calculer** la valeur de a .

Que peut-on en déduire pour l'angle $\widehat{yOt}$?



Voici quelques travaux d'élèves de 6ème . Certains utilisent les lettres proposées par le professeur et résolvent des équations. Certes il ne s'agit pas de tous les élèves, mais c'est un début. Si les lettres ne sont pas proposées, il n'y a pas de raison qu'elles arrivent.

E- Exercice à support géométrique en $5^{\text{ème}}$.



ABDE est un rectangle, BCD et TUP sont des triangles équilatéraux a- Exprime le périmètre de la figure ABCDE en fonction de AE b- Exprime le périmètre du triangle TUP en fonction de x c- Un élève affirme que les figures ABCDE et TUP ont le même périmètre . A-t-il raison ? Explique

Voici des productions d'élèves recueillie dans une classe de $5^{\text{ème}}$

a- pour le périmètre de la figure ABCDE

$3x + 6 \times 2$ $\quad$ $x+ x+ x+ 6 \times 2$ $\quad$ $(3\,x) + (6 \times 2)$ $\quad$ $(3\,x) + (2 \times 6)$

$3\,x + 12$ $\quad$ $x+ 6+ x+ x + 6$ $\quad$ $6 + 6 + 1x + 1x + 1x$

Avec erreurs : $(x \times 4\,) + (2 \times 6)$ $\quad$ $12 \times 3\,x$ $\quad$ $15\,x$ $\quad$ $x + 6 \times 2$

b- pour le périmètre du triangle TUP

$(x+ 4) + (x+ 4) + (x+ 4)$, $3 \times (x+ 4)$ $\quad$ $3(x+ 4)$ $\quad$ $(x+ 4) \times 3$ $\quad$ $(x+ 4) + (x+ 4) \times 2$

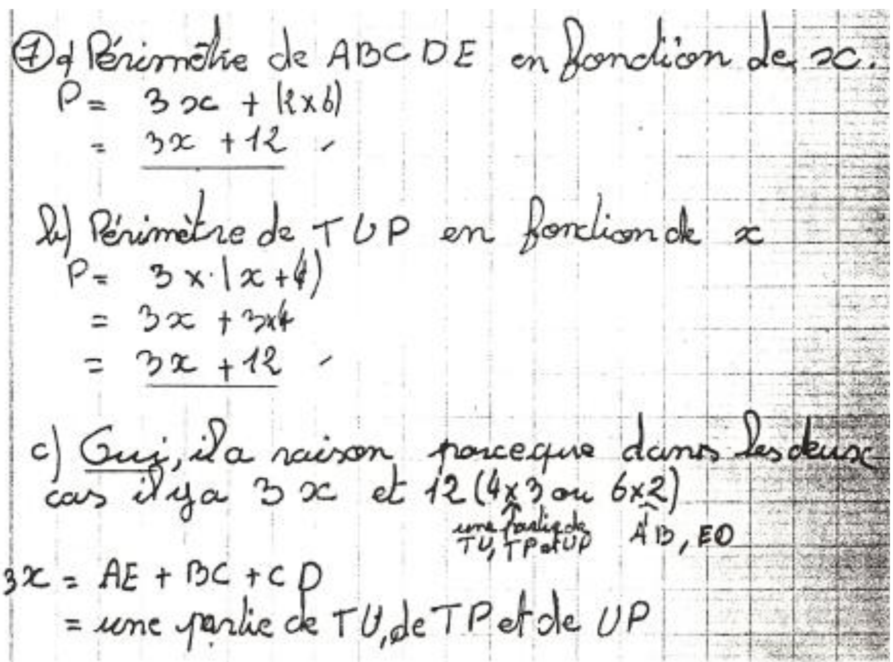
$3\times x + 3 \times 4$ ou $3\,x + 12$ ou $x3 + 12$ ou $x + x + x + 12$

Avec erreurs : $x + 4 \times 3$ $\quad$ $4x + 4x + 4x$

Ces productions sont très intéressantes à examiner lors de la mise en commun car elles révèlent différents niveaux dans la classe, et permettent de les homogénéiser :

- conservation ou non du signe × (noter l'écriture $1x$ pour x et $x3$ pour $3x$) avec la conséquence du glissement entre $x + 4$ et $4x$
- plus généralement confusion entre addition et multiplication $12 \times 3\,x$ au lieu de $12 + 3\,x$
- $3\,x + 12$ qui devient $15\,x$
- connaissance ou non de la priorité de la multiplication par rapport à l'addition

Un élève a écrit :



① a) Périmètre de ABCDE en fonction de x.
P = 3x + (2x6)
= 3x + 12 ✓

b) Périmètre de TUP en fonction de x
P = 3 x·(x+4)
= 3x + 3x4
= 3x + 12 ✓

c) Oui, il a raison parceque dans les deux cas il y a 3x et 12 (4x3 ou 6x2)
une partie de TU, TP et UP AD, EO
3x = AE + BC + CD
= une partie de TU, de TP et de UP

Il est intéressant de noter que pour justifier qu'il s'agit bien du même résultat, la confiance en l'écriture algébrique ne lui suffit pas. Il lui faut une illustration en morcelant les segments de la figure. Ici l'algèbre vit au travers de la géométrie.

III- Produire des expressions algébriques en 5ème : échanger des programmes de calcul.

Pour avoir une situation où l'usage de lettres ou du moins de certains signes apparaît incontournable, nous avons décidé de faire traduire des programmes de calcul par des expressions algébriques, mais fois, sans recourir à un problème « concret » comme les poignées de main. Nous mettons en scène la communication du programme et nous imposons de ne pas recourir aux mots.

Etape 1 : situation de communication

Les élèves sont par groupes de deux, chaque groupe ayant un programme 1 est apparié avec un groupe ayant un programme 2 (il y a donc un nombre pair de groupes).

Vous devez traduire ce programme de calcul par un message ne contenant aucun mot. Vous envoyez ce message au groupe auquel vous êtes appariés. Ils doivent retrouver votre programme de calcul, le réécrire en français et vous le renvoyer. Vous vérifierez que c'est bien le même programme que celui que vous aviez au départ, éventuellement en le faisant fonctionner pour des nombres de votre choix.

Les élèves échangent les messages par l'intermédiaire du professeur uniquement, qui joue le rôle du facteur, il n'y a aucune communication orale entre les groupes.

Programme 1	Programme 2
Choisir un nombre	Choisir un nombre
Ajouter 4	Le multiplier par 3
Multiplier le résultat obtenu par 5	Ajouter 7
Enlever 12	Diviser le résultat par 2

Etape 2 : mise en commun

Les diverses productions des groupes sont analysées au tableau, pour le programme 1. On discute pour disqualifier certaines productions incorrectes ou inadaptées.
On peut refaire plus rapidement le même travail pour le programme 2.

Exemples de productions d'élèves relevées après l'étape 1 :

Programme 1	Programme 2
A) **a)** x ? x + 4 × 5 - 12 ou **b)** y + 4 …. × 5 -12 **B)** (c + 4) × 5 – 12 **A)** ? ? + 4 = ! ! + 5 = •	**A)** x ? x ×3 (x × 3) +7 (x × 3 + 7) : 2 **B)** $\frac{(a\times3)+7}{2}$ ou $\frac{?\times3+7}{2}$ **C)** A = 0,1,2,3,…, 100, … ,1000 A × 3 = B

• – 12 = **B)** (1,2,3,4…etc.) …. + 4 = x $x \times 5 = b$ b – 12 **C)** (10 (9,8,7,…) + 4 × 5) – 12 **D)** 0,1,2,3,4…. + 4 (4 × 5) – 12	B + 7 = C C ÷ 2 **D)** (1,2,3,4,…) (…× 3 + 7) ….÷ 2 **E)** ? × 3 = ? + 7 = ? ÷ 2

Remarques faites avec les élèves lors de la mise en commun:

- On disqualifie la proposition F) pour le programme 1 car le programme doit être valable pour n'importe quel nombre, il ne faut pas remplacer le nombre choisi par une valeur.
- On disqualifie les propositions A) et E) pour le programme 1 qui sont incorrectes du point de vue de l'usage des parenthèses.
- On discute sur l'inutilité des listes de nombres qui de toute façon ne pourront pas être complètes. Elles ne contiennent que des nombres entiers, le plus souvent inférieurs à 10, ce qui a conduit un des groupes à proposer dans la réponse « choisir un nombre entier entre 1 et 10 ».
- Dans la proposition D) pour le programme 2 le même symbole « … » désigne à chaque ligne des nombres différents. Cela peut prêter à confusion, on préfèrera la proposition C) qui attribue un nom différent à chaque nombre.

Etape 3 : nouvelle situation de communication

Même dispositif que l'étape 1

Programme 3 :
Choisir un nombre
Le diviser par 2
Ajouter 4
Multiplier le résultat obtenu par 8

Programme 4
Choisir un nombre
Enlever 8
Multiplier le résultat obtenu par 2
Ajouter 4

Traduire le programme par un message ne contenant aucun mot et comportant le moins de caractères possibles.

Etape 4 : nouvelle mise en commun

Même dispositif que l'étape 2. On ne trouve plus des productions avec application à un nombre particulier ou écriture d'une liste de nombres.

Remarques faites avec les élèves :
- On disqualifie les propositions écrites en plusieurs lignes qui ont trop de caractères pour privilégier la forme classique de l'expression en une seule ligne. On discute sur la nécessité des parenthèses autour d'opérations prioritaires.

- Le professeur explique que l'usage d'une lettre pour désigner un nombre variable est préféré à celui d'un signe du genre ? ou !

- Certains élèves proposent de supprimer les signes $\times$ pour raccourcir l'expression, par exemple pour le programme 2 : $\frac{3a+7}{2}$.

Le professeur institutionnalise cette suppression en mettant en garde les élèves contre les erreurs qui en résultent parfois s'ils oublient de le rétablir mentalement quand c'est nécessaire dans un calcul . Il précise qu'ils peuvent toujours remettre les signes $\times$ s'ils le jugent utile.

Conclusion :

1- On constate que des lettres apparaissent, d'autant mieux que les élèves en ont déjà rencontré en sixième. Néanmoins elles n'apparaissent pas souvent. On voit plutôt des signes ? ; ! ou des pointillés.

2- Les élèves écrivent des égalités fausses : il faudra donc travailler dès la $6^{\text{ème}}$ sur le signe = , qui ne doit plus être seulement le signe qui indique que l'on donne le résultat d'un calcul.

3- Les élèves ont du mal à gérer les parenthèses et beaucoup produisent des expressions contenant plusieurs égalités avec plusieurs lignes de calcul : il faudra donc travailler dès la $6^{\text{ème}}$ sur l'écriture en ligne avec des expressions numériques d'abord.

4- Le professeur pourra donner dans sa classe les phrases des programmes de calcul écrits sur une seule ligne car l'écriture en colonne que nous avons adoptée ici peut induire les élèves à écrire eux aussi les calculs sur plusieurs lignes. Nous avons conservé les consignes telles qu'elles ont suscité les productions de nos élèves.

IV - Ecriture d'expressions sur une seule ligne : le quatre-quatre.

Nous avons plusieurs situations pour faire travailler les écritures d'expressions numériques en une seule ligne. Nous en donnons une seule ici qui n'est pas la première car si c'est bien l'objectif de l'étape 1 la situation se prolonge dans une étape 2 qui conduit à l'utilisation des lettres. Nous la nommons le « 4x4 ». Elle fonctionne en fin de $6^{\text{ème}}$ ou en début de $5^{\text{ème}}$.

Etape 1 : Expressions numériques

Ecrire tous les entiers de 0 à 9 à l'aide d'une expression contenant quatre fois le nombre 4. On pourra utiliser les quatre opérations, éventuellement plusieurs fois la même.

Pour faciliter la compréhension de la consigne, le professeur écrit au tableau :

4…4…4…4 = 0

4…4…4…4 = 1

On peut préciser aux élèves qu'ils peuvent utiliser des parenthèses ou bien ne pas le préciser. Les deux options ont un inconvénient

Vont-ils s'autoriser à mettre des parenthèses même si on ne l'a pas dit ? Si on le dit, ne va t'on pas trop les guider en induisant la nécessité des parenthèses ? (surtout pour la $5^{\text{ème}}$)

Les élèves cherchent à écrire les entiers de 0 à 9 dans un premier temps, sans calculatrice.

Certains nombres sont plus difficiles à trouver que d'autres, soit parce que les élèves ne pensent pas à $4 \div 4 = 1$ ou parce qu'ils ne pensent pas à mettre des parenthèses.

Pour débloquer la situation, au bout d'un temps de recherche, on demande à la classe de proposer les solutions trouvées pour zéro.
exemples :

$(4 + 4) - (4 + 4) = 0$ $\quad 4 + 4 - 4 - 4 = 0$ $\quad 4 - 4 + 4 - 4 = 0$

$(4 \times 4) - (4 \times 4) = 0$ $\quad 4 \div 4 - 4 \div 4 = 0$

etc.

Le professeur relance ensuite la recherche, puis au bout de quelques minutes il peut mettre les élèves par groupes de deux (sans calculatrice) ce qui accélère la recherche.

Quand la calculatrice est autorisée, il arrive assez souvent que les élèves trouvent des expressions donnant des calculs utilisant des nombres négatifs.
Par exemple : $4 - 4 - 4 + 4 = 0 - 4 + 4 = 0$
Le professeur leur dit alors que l'on ne veut pas s'y intéresser dans cette situation, bien que début 5ème, les élèves aient peut-être déjà rencontré des écritures de ce type.

Au bout d'un temps de recherche, le professeur autorise la calculatrice, pour vérifier les expressions déjà trouvées et chercher les autres.
Certains élèves s'aperçoivent alors que les expressions qu'ils ont trouvées sans calculatrice ne donnent pas avec la calculatrice le résultat prévu : ils tapent les calculs dans l'ordre, sans tenir compte des priorités des opérations et sans mettre de parenthèses.

<u>On pose alors le problème à la classe :</u>
$4 + 4 \div 4 + 4 = 9$ et non 6.
Quel calcul fait la calculatrice ?
Comment faire pour que la première opération soit $4 + 4$?

Certains ont mis des parenthèses autour de $4 \div 4$, ils ont le bon résultat, on peut en déduire que la calculatrice calcule d'abord la division.
En sixième, il faut obligatoirement mettre des parenthèses même si elles sont inutiles car on n'a pas les règles de priorité.

Le professeur de 5ème peut alors donner la règle de priorité des opérations .
On termine alors l'étape 1 en appliquant ces règles de priorité, on peut valider les expressions proposées par les élèves.

<u>Etape 2 : Expressions littérales</u>

L'objectif de cette étape est d'introduire l'usage des lettres pour prouver des conjectures

Pour les expressions suivantes, trouve t-on toujours le même résultat si on remplace les 4 par des 5 ou des 6 ?
Si on ne trouve pas le même nombre, peut-on prévoir le résultat ?
Vos conjectures sont-elles encore vraies si on remplace les 4 par n'importe quel nombre ?

Le statut de la lettre est nouveau. Il s'agit maintenant d'un **nombre généralisé**. C'est ce statut de la lettre qui permet de faire des démonstrations avec l'algèbre .

<u>Remarque :</u> Le professeur choisit quelques expressions parmi celles proposées par les élèves à l'étape 1. Faire le travail pour toutes les expressions serait long et fastidieux et parfois difficile pour certaines.

Par exemple : 5 = (4 $\times$ 4 + 4) $\div$ 4 d'où en généralisant (a $\times$ a + a) $\div$ a = $\frac{a^2+a}{a}=a+1$.

Les élèves remplacent les 4 par 5 puis 6 et refont les calculs. Ils conjecturent que pour les trois premières expressions, on trouve toujours le même résultat et pour les suivantes, on peut prévoir. Pour la quatrième, on trouve le nombre choisi au départ et pour la dernière, on trouve deux fois ce nombre.
Le professeur suggère alors d'appeler a un nombre inconnu fixé et de remplacer les 4 par a dans les expressions ci dessus.

Expression proposée	Généralisation	A Retenir
(4 – 4) + (4 – 4) = 0	$(a-a)+(a-a)$ $=0+0$ $=0$	$a-a=0$
$(4-4)+4:4=1$	$(a-a)+a:a$ $=0+1$ $=1$	$a:a=\frac{a}{a}=1$
$4:4+4:4=2$	$a:a+a:a$ $=1+1$ $=2$	
$(4-4)\times4+4=4$	($a-a$) $\times$ $a+a$ = 0 $\times$ $a+a$ = 0 + a = a	0 $\times$ a = 0 0 + a = a
(4 – 4) : 4 + 4 = 4	($a-a$): $a+a$ = 0 : $a+a$ = 0 + a = a	0: a = $\frac{0}{a}$ = 0 pour $a \neq 0$
(4 : 4) $\times$ 4 + 4 = 8	(a: a) $\times$ $a+a$ = 1 $\times$ $a+a$ = $a+a$ = 2 $\times$ a	1 $\times$ a = a $a+a$ = 2 $\times$ a

Les élèves notent les résultats à retenir.

Pour n'importe quel nombre ***a* :**
a – a = 0 $\quad \frac{a}{a}$ ***= a : a = 1*** $\quad$ ***0*** $\times$ ***a = 0*** $\quad \frac{0}{a}$ ***= 0*** $\quad \frac{a}{1}$ ***= a***
0 + a = a $\quad$ ***1*** $\times$ ***a = a*** $\quad$ ***a + a = 2*** $\times$ ***a***

Ces expressions paraissent anodines, elles figurent rarement dans les bilans des manuels. Mais on les utilise très souvent pour simplifier des expressions littérales, surtout à partir de la quatrième.

Par exemple on les utilise pour les calculs suivants où il est important d'expliciter la démarche, au moins au début de l'apprentissage.

$$x+4-x=(x-x)+4=0+4=4$$

$$\frac{x}{3x}=\frac{x\times1}{x\times3}=\frac{1}{3}$$

$$x^2+x=x\times x+x\times1=x(x+1)$$

$$\frac{3x}{x}=3\times\frac{x}{x}=3\times1=3$$

$4x - x = 4 \times x - 1 \times x = (4 - 1) \times x = 3 \times x = 3x$

V- La distributivité en 5ème :

Pour certains élèves, la manipulation de la distributivité avec des entiers est intuitive.
Ils l'ont utilisée à l'école primaire et en 6ième en calcul mental, dans la technique de la multiplication et dans le calcul de périmètres de rectangles. Nous donnons en 6ième quelques réductions d'expressions algébriques simples (voir **II C**).
L'objectif est ici de lui donner un statut de savoir scolaire pour qu'elle devienne un outil de calcul ou de preuve.

1. Résoudre chacun de ces deux problèmes de deux façons différentes :

- Une baguette coûte 0,61 euro . Le boulanger en vend 57 le matin et 43 l'après midi.
Combien a-t-il encaissé ce jour là pour la vente de ses baguettes?

- Une élève achète 5 stylos à 2,25 euro chacun et 5 cahiers à 0,75 euro chacun.
Combien va-t-elle payer ?

Par la confrontation des expressions écrites par les élèves on déduit dans chaque cas une égalité.
Le professeur conserve sur un transparent les égalités obtenues de façon à faire ensuite le bilan, ces questions pouvant être traitées sur deux séances. On arrive à :

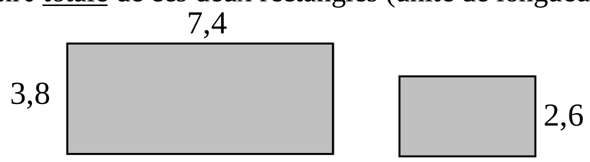
$57 \times 0,61 + 43 \times 0,61 = (57+43) \times 0,61$

$5 \times 2,25 + 5 \times 0,75 = 5 \times (2,25+0,75)$

Certains élèves croient qu'ils ont fourni les deux solutions exigées en donnant deux présentations d'un même calcul, une fois en une seule ligne et une autre fois sur deux lignes.

Le professeur les incite à donner du sens aux étapes des calculs pour distinguer les deux solutions. Pour le deuxième membre de l'égalité, dans le deuxième problème, cela revient à faire des lots (stylo + cahier). C'est une démarche pas toujours naturelle pour les élèves.

2. Tracer les deux rectangles suivants et les découper. La largeur du grand est égale à la longueur du petit. Calculer l'aire totale de ces deux rectangles (unité de longueur : cm)



Après le travail sur les aires fait en 6ème , l'idée de rassembler les deux rectangles doit venir pour faciliter les calculs.

On arrive à :

$$\boxed{\mathbf{3{,}8 \times 7{,}4 + 3{,}8 \times 2{,}6 = 3{,}8 \times (7{,}4+2{,}6)}}$$

3. <u>Comment peut-on calculer mentalement</u> :

$$13 \times 1002$$
$$43 \times 82{,}5 + 43 \times 17{,}5$$
$$27 \times 13 + 13 \times 73$$

[illegible] $= 43 \times 100$

[illegible] $= 13 \times 100$

$13 \times 1002 \ = \ \mathbf{13 \times (1000 + 2) = 13 \times 1000 + 13 \times 2}$

Nous ne demandons pas d'emblée 13×1001 qui pose plus de problèmes pour écrire les égalités souhaitées, compte tenu de l'obstacle de l'écriture 13×1 quand 13 suffit.

4. Ecrire d'autres égalités du même genre avec des nombres de ton choix.
   Ecrire une règle qui résume les différentes égalités obtenues.

(Un transparent est projeté avec les différentes égalités ci-dessus encadrées et les égalités écrites par les élèves)

Pour la première question certains élèves n'ont pas vraiment compris la structure des égalités demandées. Ils proposent des égalités vraies mais d'une autre forme, voire des égalités fausses ! La mise en commun permet de garder les égalités vraies et de bonne structure.

Pour la seconde question, la plupart tente de faire des phrases parfois très maladroites et finalement n'y arrivent pas.

La différence avec ce qui se passe pour la recherche d'une formule, par exemple dans la situation des poignées de main ($6^{\text{ème}}$), est qu'ici on ne se trouve pas dans la communication d'une procédure , mais dans la traduction d'une égalité entre deux expressions qui diffèrent par leur structure.

Le fait qu'ici les élèves n'arrivent pas à exprimer la règle par une phrase est plutôt bénéfique car cela leur permet de voir l'intérêt des lettres auxquelles certains pensent pour remplacer les phrases, grâce au travail de familiarisation que nous avons fait auparavant.

Le statut des lettres dans l'écriture de l'identité de distributivité est celui d'**indéterminées.**

<u>VI- Structure des expressions numériques et algébriques dès la $6^{\text{ème}}$</u>

Ce qui précède nous conduit à travailler dès la $6^{\text{ème}}$ sur la structure des expressions numériques et algébriques.

1- <u>Priorité des opérations :</u>

Il est important de proposer des exercices dans lesquels l'élève doit numéroter ou repérer les opérations selon l'ordre de priorité et rédiger les calculs sans écrire d'égalités fausses.

1- Calculer $A = (7{,}5 \times 4) + (6 \times 12)$ (Classe de $6^{\text{ème}}$)

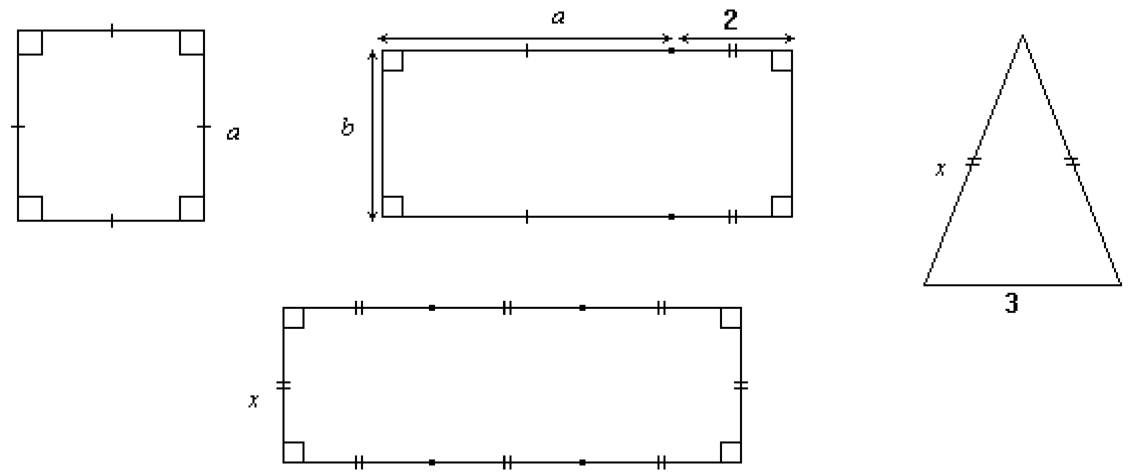
A = (7,5 × 4) + (6 × 12)
(1) (2) (1)
A = 30 + 72
A = 102

Les élèves pourront écrire en bilan que :

- Lorsque la dernière opération est une addition le nombre est écrit sous la forme d'une somme.
- Lorsque la dernière opération est une multiplication le nombre est écrit sous la forme d'un produit.

2- Structure des expressions littérales :

Ecrire le périmètre de ces figures de plusieurs façons différentes (Classe de 6ème)



Par exemple lorsqu'on demande aux élèves d'écrire le périmètre du carré de côté *a* de plusieurs façons différentes , ils se prennent au jeu. Nous avons relevé dans une classe les propositions suivantes:

$a\times 2+a+a$	$(a\times 8)\div 2$	$a\times 4$
$(a\times 2)\times 2$	$a+a+a+(a\times 1)$	$(a\times 4)\times 1$
$2\times a+(a\times 2)$	$(a\times 5)-a$	$a+a+a+a$
$(a\times 24)-(a\times 20)$	$(a\times 3)+a$	$(a\times 3)+(a\times 1)$
$(a\times 2{,}5)+(a\times 1{,}5)$	$(a\div 4)\times 16$	

Si des élèves font des propositions fausses, d'autres élèves leurs montrent leurs erreurs en remplaçant *a* par une ou plusieurs valeurs ou en se reportant à la figure.

En réduisant les écritures, on obtient $4\times a$.
Par exemple, on peut justifier que $(a\times 3)+a=4\times a$ en écrivant :
[illegible].
Ce travail est à reprendre en 5ème pour utiliser la distributivité. On pourra alors écrire :
[illegible].
La distributivité vue en 5ème est indispensable pour réduire par exemple 1,5 x + x

Les différentes expressions justes trouvées par les élèves pour chaque figure sont écrites au tableau. Le professeur leur demande alors d'en classer certaines dans quatre colonnes selon leur structure. Si une

expression ne peut pas être classée car elle se présente comme une succession d'opérations différentes sans qu'aucune ne soit prioritaire, l'élève doit la transformer en ajoutant seulement des parenthèses pour qu'elle puisse être classée dans l'une ou l'autre des colonnes. Le professeur peut adapter le choix des expressions au niveau de la classe (6ème ou 5ème)
Par exemple s'il est écrit pour le périmètre du carré $4a - a + a$ ou $a \times 8 \div 2$, les élèves seront confrontés au fait que la différence $4a - (a + a)$ n'est pas égale à la somme $(4a - a) + a$.
On a bien $(a \times 8) \div 2 = a \times (8 \div 2)$
Mais le produit $(a \div 8) \times 2$ n'est pas égal au quotient $a \div (8 \times 2)$.
Ce dernier point permet d'attirer l'attention des élèves sur l'avantage du trait de fraction pour écrire un quotient par rapport au signe $\div$ qu'ils affectionnent. Le trait de fraction tient lieu de parenthèse.

	somme	différence	produit	quotient
Figure 1				

Conclusion :

Nous avons essayé d'expliciter comment nous construisons nos progressions pas à pas en suivant les élèves et en prenant un certain recul par l'analyse des situations.

Maintenant nous pouvons dire de façon plus précise à quel moment nos élèves font de l'algèbre.

C'est quand :

- ils produisent des programmes de calcul en une seule ligne que ce soit avec une expression numérique ou que soit avec une expression littérale, que ce soit à partir d'un problème « concret » ou pour transmettre un programme écrit avec des phrases. Dans tous les cas ils utilisent les propriétés des opérations, les priorités opératoires, avec des signes de l'algèbre (signes opératoires, parenthèses, ...). Les lettres ont alors le statut de variables.

- ils écrivent des égalités entre des écritures (le même nombre écrit de différentes façons ou le même programme de calcul écrit sous forme d'expressions algébriques différentes) et ils justifient ces égalités par des transformations d'écriture. Dans ces égalités les lettres ont alors le statut d'indéterminées.

- ils résolvent des équations. Les lettres ont le statut d'inconnues.

- ils démontrent des conjectures (arithmétiques par exemple) en utilisant le calcul littéral. Les lettres ont alors le statut de nombres généralisés.

Nous avons limité notre propos à la 6ème et à la 5ème pour cette introduction du calcul littéral. En effet, les programmes de 4ème et de 3ème sont lourds en algèbre car on y traite de la double distributivité, des équations, des racines carrés, et des fonctions, objets que nous allons travailler aussi pour ces niveaux. Pour éviter d'avoir tout à faire en 4ème , nous préférons introduire les lettres en 6ème et 5ème avec des situations comme les « carrés bordés » ou « les poignées de mains ». Bien sûr, les enseignants qui le souhaitent peuvent se servir de quelques-unes de ces situations, les « poignées de main » notamment, jusqu'en seconde. Nous avons décrit ce qui se passe en 4ème.
Pour faire entrer les élèves dans l'algèbre en 6ème et 5ème, il faut aussi des situations strictement numériques mais essentielles car elles font travailler les structures des ensembles de nombres (propriétés de l'addition et de la multiplication, relatifs, décimaux, fractions). Dans notre progression elles prennent place à l'intérieur de la succession décrite ici qui ne concerne que le calcul littéral. Le travail sur les structures numériques doit se faire en parallèle. Nous pouvons aussi le tenir à disposition des enseignants, car nous l'avons écrit et donné dans de nombreux stages de formation. Vous trouverez ce travail dans une brochure de l'IREM d'Aquitaine intitulée « Entrées dans l'algèbre en sixième et cinquième ».

Depuis des années nous travaillons pour donner du sens à l'enseignement des mathématiques, au niveau de la classe. Nous nous référons dans notre travail à la théorie des situations de Guy Brousseau. C'est lui et Régine Douady, qui, sans doute parce que nous avons pu travailler avec eux , nous ont donné une certaine exigence pour construire des situations dans lesquelles les élèves peuvent entrer dans le problème, travaillent réellement à le résoudre en faisant des mathématiques et non en imitant un modèle sans comprendre ou en essayant de deviner la solution, ont la possibilité de valider leur résultat, soit seuls, soit en confrontant leur résultat avec celui des autres lors d'une mise en commun bien menée par l'enseignant. Nous avons parfois travaillé dans le cadre géométrique – plus spécifiquement mesure des longueurs et des aires – pour introduire des expressions algébriques. C'est un support pour donner du sens à l'algèbre car nous avons utilisé des figures très familières aux élèves (segments, triangles, quadrilatères).

A ce travail de construction de situations ponctuelles, s'ajoute un travail sur la construction d'un enchaînement de ces situations en classe, ce que nous avons réalisé en partie pour le collège en géométrie, travail qui a commencé depuis de nombreuses années. Sans l'outil du calcul algébrique, les élèves seront limités dans leurs capacités à comprendre et utiliser la force des mathématiques. Notre ambition est de leur donner cet outil de façon qu'il puissent se l'approprier pour aller plus loin en mathématiques et plus généralement en sciences.

Les enchaînements de situations que nous avons construits pour arriver à ce résultat dans nos classes sont des AER (Activités d'Etudes et de Recherches) au sens d'Yves Chevallard. Il semble qu'une même situation puisse appartenir à des PER différentes. Par exemple la situation dite « les poignées de main » pourrait être incluse aussi dans un PER sur le dénombrement au lycée ou un PER sur les fonctions. Il nous apparaît en tous cas que nous conduisons effectivement les élèves à rencontrer des questions Q, que nous leur permettons d'élaborer leur réponse R, et que nous leur donnons toutes les techniques permettant d'aller plus loin avec d'autres questions.

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature de la didactique spécifique à l'algèbre beaucoup de documents nous permettant d'acquérir des outils pour concevoir et analyser des situations dans ce domaine. Outre les deux documents déjà cités celui de l'Inspection de l'Académie d'Orléans et la publication INRP : « L'algèbre au collège », nous avons trouvé quelques appuis dans le document « Algèbre et fonctions » publié par le Groupement national d'équipes de recherche en didactique des mathématiques (DESCO) qui rend compte de nombreuses recherches déjà parues.