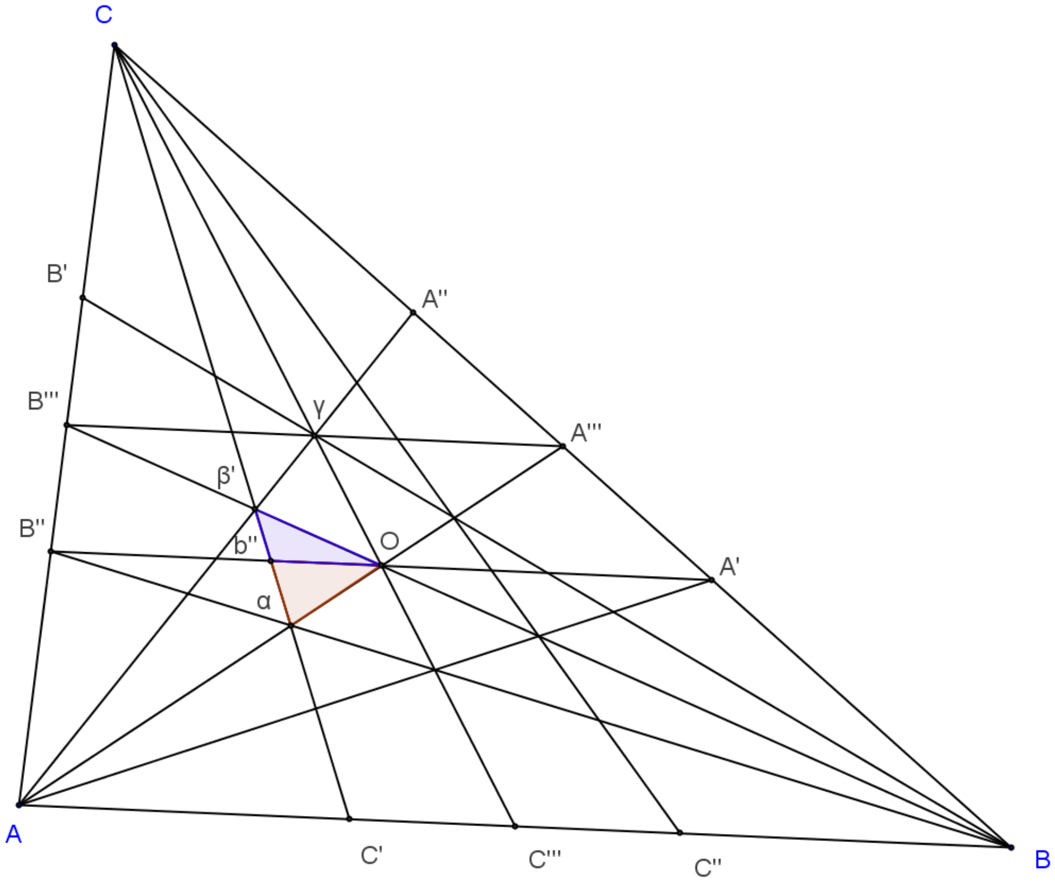

Cette démonstration utilise essentiellement des calculs d'aires reposant sur des triangles de base commune et de hauteurs proportionnelles ou bien sur des triangles semblables.

Tout d'abord, O est le centre de gravité du triangle ABC. Nous allons déterminer l'aire du triangle $O\alpha\beta'$ en fonction de celle de ABC. Par symétrie de la situation et si ce rapport d'aire est invariant des points O, α et β', ce rapport d'aire sera le même pour les cinq autres triangles constituant l'hexagone et nous pourrons alors exprimer l'aire de l'hexagone dessiné par la construction en fonction de l'aire du triangle ABC.

$A(Ob''\alpha) = \frac{1}{3}A(OB''\alpha)$ car $\frac{Ob''}{C'C'''} = \frac{2}{3}$ (théorème de Thales) et $C'C''' = \frac{1}{3}AC'''$ donc $Ob'' = \frac{1}{3}OB''$

et les triangles $O\alpha b''$ et $O\alpha B''$ ont une base $[O\alpha]$ commune.

$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}A(OB''B)$ car $[OB'']$ est une base commune aux deux triangles $OB''\alpha$ et $OB''A$

$$\frac{\alpha O}{\alpha A} = \frac{B''O}{AC} = \frac{\frac{2}{3}AC'''}{AC} = \frac{1}{3} \text{ donc } O\alpha = \frac{1}{3}\alpha A \text{ d'où } O\alpha = \frac{1}{4}OA$$

$= \frac{1}{12}[\, A(OB''AC''') - A(OAC''')]$

$= \frac{1}{12}\left[\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right).\, A(CAC''') - \frac{1}{2}A(OAB)\right]$

$= \frac{1}{12}\left[\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}A(ABC) - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\, A(ABC)\right]$

$= \frac{1}{108}A(ABC)$

$$A(Ob''\beta') = \frac{1}{3}A(OB''\beta') \quad \text{car} \quad \frac{B'''\beta'}{B\beta'} = \frac{B'''\gamma}{AB} = \frac{\frac{1}{4}AB}{AB} = \frac{1}{4} \text{ (théorème de Thales)}$$

$$\text{donc } B'''\beta' = \frac{1}{4}\beta'B = \frac{1}{5}B'''B = \frac{3}{5}B'''O$$

$$\text{or } B'''B = 3B'''O \ \text{ donc } O\beta' = \frac{2}{5}OB'''$$

et les triangles $OB''\beta'$ et $OB''B'''$ ont une base $[OB'']$ commune.

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} A(OB''B''')$$

$$= \frac{2}{15}[\, A(OB''B'''\gamma) - A(OB'''\gamma)]$$

$$= \frac{2}{15}\left[\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right). A(CB''O) - \frac{1}{4}A(OC'''B)\right]$$

$$= \frac{2}{15}\left[\frac{7}{16}\times\frac{4}{9}A(CAC''') - \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} A(OAB)\right]$$

$$= \frac{2}{15}\left[\frac{7}{36}\times\frac{1}{2}A(ABC) - \frac{1}{8}\times\frac{1}{3} A(ABC)\right]$$

$$= \frac{1}{135}A(ABC)$$

Puis il vient

$$A(Ob''\alpha) + A(Ob''\beta') = \left[\frac{1}{108} + \frac{1}{135}\right]A(ABC) = \frac{1}{60}A(ABC)$$

Par symétrie, chaque triangle constituant l'hexagone central est de même proportion au triangle *ABC* et on trouve que l'hexagone central a pour aire un dixième de celle du triangle *ABC*.