Fonctions à la transition entre le lycée et le supérieur : les notions de perspectives dans les calculs de limites

Communication de la CI2U

Le but de ce chapitre est de revisiter les connaissances sur l'enseignement des fonctions au niveau de la transition lycée-université et d'introduire une réflexion – à l'époque nouvelle - sur les notions de perspectives et ce qu'en font les étudiants pour les calculs de limites. Nous présentons les résultats d'un questionnaire qui a eu lieu en 2007 et 2008 dans plusieurs universités : 298 réponses d'étudiants avaient ainsi été analysées. Ce chapitre a été publié sous forme d'une communication en anglais à ICMI (Vandebrouck, 2008). Les paragraphes suivants sont extraits de Vandebrouck (2011 a et b).

1) Quelques caractéristiques générales de la transition liées aux mathématiques

De nombreuses études ont déjà précisé des caractéristiques de cette transition (Robert 1998, Artigue, Batanero et Kent 2007, Gueudet 2008). Par exemple, Robert (1998) a pointé l'introduction à l'université d'un nouveau type de notions mathématiques : les notions à la fois Formalisatrice, Unificatrices et Généralisatrices (FUG), spécifiquement la notion de convergence des suites ou toutes les notions d'algèbre linéaire : espace vectoriel, application linéaire... Ces notions permettent en effet d'introduire plus de généralité, en unifiant différents objets antérieurs grâce à un nouveau formalisme, qui de fait simplifie les écritures mais peut aussi brouiller le sens pour les étudiants. Les notions de topologie, maintenant repoussées en L2 ou L3 sont aussi FUG (Bridoux 2011). En classe de troisième compte tenu des nouveaux programmes du collège, la notion de fonction numérique semble présenter des aspects FUG (Bridoux et al, 2015).

Robert (1998) a aussi relevé une distribution différente, entre lycée et université, au niveau des types de tâches proposées aux étudiants et au niveau des mises en fonctionnement des connaissances attendues : au lycée, les tâches mettent souvent en jeu des connaissances qui sont explicitées et qui doivent être appliquées de façon relativement immédiates. A l'Université, les tâches mettent plus souvent en jeu des connaissances à reconnaître (supposées disponibles) et aussi à adapter (changements de points de vue sur les tâches, mélanger les connaissances visées avec d'autres connaissances, introduire des objets intermédiaires, des étapes de raisonnement …). A l'université, de ce fait, les connaissances doivent être plus disponibles (mobilisables sans indication) et mises en fonctionnement de façon plus complexe, avec une augmentation des exigences en termes de raisonnements, preuves, formalisations et langage. Par ailleurs, le caractère outil (Douady 1986) de certaines connaissances est valorisé dans le secondaire alors que c'est plutôt le caractère objet qui l'est à l'université et vice versa pour d'autres connaissances. A ce niveau didactique, Bloch (2005) a clarifié la complexité par l'introduction de 9 « variables didactiques » dont les valeurs différentes contribuent à « mesurer » les différences entre lycée et université.

On note enfin une différence entre secondaire et supérieur au niveau des déroulements (Grenier-Boley 2009). Par exemple, il y a une accélération du temps didactique, avec un renouvellement rapide des objets mathématiques enseignés qui oblige à des assimilations plus rapides. Il y a également un nouvel équilibre entre exercices à portée générale et exercices plus particuliers, un éventail des types d'exercices plus large qui rend la routinisation beaucoup plus difficile qu'au lycée, cette dernière étant déléguée aux étudiants en travail personnel, qui se doivent de ce fait d'être plus autonomes face à leurs apprentissages (aussi dans Praslon 2000).

2) La notion complexe de fonction et sa conceptualisation

La notion de fonction peut intervenir dans de nombreux cadres, comme outil ou comme objet (Douady 1986) et elle se trouve connectée à deux autres notions essentielles du champ de l'Analyse : les nombres réels (en particulier les nombres réels comme limites) et les suites numériques. Ceci nécessite de prendre en compte le vaste champ conceptuel de l'Analyse (Vergnaud 1991) et non la notion isolée pour questionner la conceptualisation de la notion de fonction. Les domaines de travail que nous définirons plus bas ne seront caractérisés que par rapport à la notion de fonction mais ils devront être entendus pour tout ce champ conceptuel. C'est une limite du travail à prendre en compte.

Le travail sur et avec les fonctions fait également intervenir plusieurs systèmes de représentations dans plusieurs registres différents (Duval 1993), ce qui fait l'une de ses spécificités essentielles : les représentations en tableau de valeurs (registre numérique), les représentations en courbes (registre graphique), les représentations par des formules (registre algébrique), les représentations en tableau de variations (registre schématique) et les représentations formelles (registre symbolique). Selon Duval, la conceptualisation de la notion passe par trois stades de mises en fonctionnement des représentations : la formation des représentations, le traitement des représentations à l'intérieur d'un registre et la conversion entre représentations de registres différents.

Les fonctions sont donc des objets complexes, encore en apprentissage lorsque les étudiants entrent à l'université. Nous postulons que la conceptualisation de la notion de fonction numérique est liée à la rencontre et à la mise en fonctionnement de la notion dans plusieurs cadres, comme outil ou comme objet (Douady 1986), proposées dans un ordre approprié, dans des registres multiples (avec des activités de formation, de traitement, de conversion des représentations au sens de Duval 1991) et à travers des tâches variées, à l'origine de diverses adaptations de connaissances (Robert, 1998), y compris de nombreuses applications immédiates le cas échéant (les « gammes »).

En outre, les études de fonctions font également appel à plusieurs aspects de la notion de fonction. En effet, certaines propriétés sont ponctuelles en un point x_0, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de la valeur de la fonction au point x_0. Par exemple, énoncer $f(x_0)=3$ est une propriété ponctuelle qui ne donne rien sur $f(x_1)$ lorsque $x_1 \neq x_0$. Certaines propriétés sont globales, c'est-à-dire qu'elles sont des propriétés valables sur des intervalles : parité, périodicité, croissance, continuité et dérivabilité globales… Enfin, certaines propriétés d'une fonction f sont locales en un point x_0, c'est-à-dire qu'elles dépendent des valeurs de f sur un voisinage de x_0 aussi petit soit-il : avoir une limite en x_0, être continue en x_0, être dérivable en x_0, être négligeable devant une autre fonction au voisinage de x_0, avoir un développement limité en x_0… Dans certains cas, x_0 peut aussi être infini mais ce cas est pour nous particulier ; par exemple les propriétés locales de continuité et dérivabilité n'y sont pas définies. Nous y reviendrons.

Nous pointons dans nos travaux l'importance pour la conceptualisation de la notion de fonction de ses mises en fonctionnement sous les trois perspectives ponctuelle, globale ou locale. Autrement dit, comme en fait l'hypothèse Rogalski M. (2008), un enjeu important de l'enseignement des fonctions est certainement de développer chez les étudiants une prise de conscience de l'existence de points de vue spécifiques sur les fonctions, associés à ces trois perspectives, ainsi qu'une mise en fonctionnement de toutes ces perspectives d'une fonction (voir aussi Bloch 2003, Maschietto 2001, 2008, Chorlay 2011).

Au niveau du supérieur, on pourrait certainement introduire aussi une perspective « surglobale » à travers laquelle les fonctions sont vues comme élément d'un ensemble dans le cadre plus vaste de l'analyse fonctionnelle.

3) Discussion sur les registres de représentations et les perspectives

Bloch (2003) exploite l'idée que les différentes représentations sont réductrices ou productrices par rapport aux aspects ponctuels ou globaux des fonctions et donc font travailler différemment les perspectives sur les fonctions. En effet, la représentation numérique, et notamment le tableau de valeurs, ne fait travailler que la perspective ponctuelle sur les fonctions.

Au contraire, la représentation en tableau de variation fait travailler la perspective globale. Coppé et al. (2007) ont montré à ce propos que des élèves de seconde ont plus de difficultés à utiliser le registre des tableaux de variations que le registre numérique des tableaux de valeurs. En même temps, la conversion d'un tableau de variation à un autre système de représentation (algébrique, graphique et même numérique) semble être plus difficile que la conversion à partir d'une table de valeur. Ils pointent ainsi que la complexité du tableau de variation est certainement sous-estimée dans l'enseignement. Il y a donc des difficultés inhérentes à l'adoption de la perspective globale sur les fonctions à partir des tableaux de variations en classe de seconde.

Les représentations graphiques permettent à la fois les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions : en effet le graphe d'une fonction peut être tracé point par point et l'adoption de la perspective ponctuelle sur le graphe permet de manipuler les propriétés ponctuelles classiques sur les images et les antécédents. Mais le graphe peut également être considéré globalement et il traduit alors pour les fonctions simples les propriétés globales : croissance, parité, périodicité, majoration...

Au contraire, la représentation algébrique (la formule) ne peut pas soutenir aisément la perspective globale sur les fonctions. Rogalski (1984) explique par exemple que « les caractères producteurs dominants – de la représentation graphique - sont essentiellement le fait que la représentation graphique fait apparaître une fonction comme unité, ce qui la différencie de l'algorithme de calcul représenté par la formule ou aux données discontinues et partielles de la table de valeur ». Dans la même idée, selon Raftopoulos et Portides (2010), les formules ne peuvent être interprétées globalement que par les experts. La fonction $x \rightarrow x^2$ ou la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ peuvent être interprétées globalement par des élèves car ils ont le graphe en tête (disponibilité du graphe) mais c'est plus difficile pour eux dès que les expressions algébriques deviennent plus complexes. Dire que $x \rightarrow x^2 + \sqrt{x} + exp(x)$ est croissante sur R^+ car somme de trois fonctions croissantes suppose l'adoption de la perspective globale à partir de la formule, ce qui demande une certaine expertise. Les élèves de première ou terminale vont bien souvent calculer une dérivée de la fonction sur $[0, +\infty\, [$. En général, les propriétés globales ne sont pas visibles directement à partir de la formule mais elles doivent être déduites à partir de traitements algébriques. Comme cas extrême, citons l'exemple (proposé par Marc Rogalski) de

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{e^{-x} - 1} - 1 - \frac{x}{2}$$

qui est une fonction paire. Cependant, même en adoptant une perspective globale sur la formule, il est impossible de s'en rendre compte. C'est un développement en série entière qui permet de le réaliser ou bien une recherche directe de parité par le calcul de $f(-x)$.

Pour le non expert, la formule ne permet donc pas en général de déduire des aspects globaux de la fonction. Elle ne permet pas la construction directe du tableau de variation. Elle permet la construction de la courbe, mais point par point, ce qui ne fait pas travailler la perspective globale sur la fonction en jeu. C'est seulement la réinterprétation d'un tableau de variation ou d'un graphe déjà construit qui peut faire adopter une perspective globale sur la fonction pour des élèves.

Remarquons que le traitement de ces propriétés globales peut plus ou moins faire travailler la perspective globale : certaines propriétés globales sont en effet des propriétés ponctuelles universelles, c'est-à-dire des propriétés ponctuelles vérifiées pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle de définition – par exemple : f est paire si et seulement si son intervalle de définition est symétrique et pour tout x de cet intervalle, on a $f(x)=f(-x)$; f est t périodique si et seulement si pour tout x de son intervalle de définition, on a $f(x)=f(x+t)$. L'établissement de ces propriétés est donc facilement accessible par un traitement mettant en jeu une seule variable x. L'absence de perspective globale peut ne pas être handicapante sauf s'il faut réinterpréter globalement des propriétés ponctuelles universelles (par exemple pour tout x, $f(x)=f(x+t)$ donc f est t périodique). Au contraire, d'autres propriétés, comme la croissance, sont liées à la variation, et sans une hypothèse de dérivabilité des fonctions, elles ne peuvent pas se traduire par une propriété ponctuelle universelle. Elles nécessitent la prise en compte de deux valences de la variable sur l'intervalle de définition de la fonction : f est croissante si et seulement si pour tout x et y tels que $x \leq y$ on a $f(x) \leq f(y)$. La perspective globale et la quantification deviennent fondamentales dans l'activité. En particulier, un traitement de la croissance sous cette forme fait sans nul doute mieux travailler la perspective globale qu'un traitement par la positivité de la dérivée. Pour plus de détails, voir Vandebrouck (2011b).

En ce qui concerne la perspective locale, remarquons tout d'abord que les propriétés locales en un point x_0 ne sont rien d'autres que des propriétés globales vérifiées sur tout voisinage de x_0. Nous émettons l'hypothèse qu'adopter une perspective locale sur le graphe suppose donc de dépasser la perspective uniquement ponctuelle. En effet, dans une recherche ancienne sur l'acquisition de la notion locale de limite de suites, Robert (1982) met en évidence la corrélation entre une conception statique, bidimensionnelle, de la notion locale de limite et l'acquisition de la définition en termes formels. Aussi, la perspective ponctuelle sur les fonctions ne semble pas permettre une conception statique et bidimensionnelle de la notion de limite mais plutôt une conception dynamique, qui fait obstacle à l'acquisition de la définition. Cette perspective ponctuelle peut rentrer en conflit avec la perspective locale. Par exemple, les représentations de la droite numérique (et donc des fonctions) associées à la perspective ponctuelle sont des représentations discrètes alors que les représentations nécessaires pour adopter la perspective locale sont des représentations continues, qui ne sont disponibles qu'avec une perspective globale sur la droite ou la fonction. En d'autres termes, la perspective locale sur les fonctions ne pourrait s'adopter sans la disponibilité préalable d'une perspective globale et savoir adopter la perspective globale serait une condition nécessaire pour conceptualiser la notion fondamentale de limite.

En outre, Robert et Boschet (1984) pointent l'importance pour les étudiants de disposer de connaissances disponibles dans plusieurs cadres et registres (hypothèse des blocs) et non seulement dans un seul (qu'il soit algébrique, graphique ou symbolique notamment). D'après ces résultats et conformément aux arguments développés plus haut, adopter la perspective globale sur les fonctions ne pourrait se faire sans une maitrise par les étudiants de représentations mettant l'accent sur les propriétés globales des fonctions, d'où la nécessité de connaissances graphiques et symboliques. Les représentations algébriques, seules, peuvent ne pas suffire pour adopter la perspective globale, en particulier lorsque des propriétés comme la croissance ne sont pas suffisamment travaillées avec leur définition originale relevant de la perspective globale.

4) Les programmes

A partir du collège, les représentations des fonctions (notamment les tableaux de variations, les graphiques et les formules algébriques) sont introduites, donnant corps à un nouveau cadre de travail pour les élèves, appelé cadre fonctionnel. Puis un chapitre important de la classe de seconde est le chapitre « généralités sur les fonctions ». Les notions de parité, de périodicité ou de croissance, dont nous avons déjà parlé, sont des propriétés globales des fonctions qui sont ou peuvent être travaillées en seconde dans ce cadre-là. Les notions de maximum, minimum (globaux) sont également travaillées, toujours sous différents registres de représentations. Les variations globales de fonctions polynômes de degré 2, de l'inverse, et dans une moindre mesure de fonctions homographiques, sont étudiées mais ces fonctions le statut de fonctions de références qu'elles avaient dans des anciens programmes. Des inéquations sont résolues, à la fois algébriquement et graphiquement. Toutes ces activités doivent concourir à l'articulation entre perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions.

Cependant, comme dit Comin (2005) : « *l'approche ensembliste de la notion de fonction par une mise en correspondance terme à terme des éléments de deux ensembles, modélisée par un graphe, évacue cette idée de contrainte entre deux grandeurs (…) nous faisons l'hypothèse que les pratiques qui sont proposées aux élèves portent sur un nombre fini de valeurs et éloignent les élèves de l'idée de variabilité et de continuité* ». Autrement dit, l'approche retenue dans les programmes pour la définition de fonction éloigne de la perspective globale sur les fonctions et peut enfermer les élèves dans la perspective ponctuelle. Les utilisations de tableaux de valeurs, les tâches de recherches d'image et d'antécédent ou les tâches de recherches de solutions à des équations seraient par exemple surreprésentées en fin de collège et en classe de seconde. En outre, l'herbier de fonctions disponibles se limite finalement à des fonctions affines, des fonctions polynomiales de degré 2, la fonction inverse et parfois quelques fonctions homographiques. Ces fonctions perdent en première et terminale le statut de fonctions de référence qu'elles avaient dans les anciens programmes pour introduire les notions locales.

Bloch (2003) met en évidence le fait que les élèves n'exploitent que rarement la puissance du graphique au niveau global. Elle fait des propositions pour des séquences d'enseignement en seconde, supportées par la perspective globale du registre graphique. Elle pointe déjà le travail au niveau local qui pourrait être engagé au lycée. Dans son travail, Maschietto (2001) met aussi en évidence l'importance que pourraient avoir les représentations graphiques comme outils pour entrer dans des tâches d'Analyse locale dès la première S.

Dès la classe de seconde (mais surtout à partir de la première S) il semble que les élèves travaillent beaucoup avec les formules algébriques. En effet, comme le notent Coppé et al. (2007), le registre algébrique déjà important pour l'étude des fonctions dans les manuels de seconde (de 30% à 58% des exercices selon un manuel de seconde) devient prédominant dans les manuels de première et de terminale scientifique. Notre hypothèse est que le cadre fonctionnel se réduit alors au cadre algébrique où tout le « relief » que l'enseignement a donné à la notion de fonction au collège et en seconde est masqué : en particulier les deux perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions, qui ne sont déjà pas suffisamment repérées par les élèves ne sont plus du tout mises en valeur, étant donné l'insuffisance de la représentation algébrique vis-à-vis de ces perspectives. Autrement dit, les élèves ne sont pas assez experts au sortir de la classe de seconde pour interpréter toutes les représentations algébriques rencontrées comme des fonctions sous leurs perspectives globales et ponctuelles.

Cependant, les notions locales sont progressivement introduites : limite, continuité, dérivabilité, la dernière étant d'ailleurs introduite dans les programmes de première scientifique avant la notion de limite. De nombreux travaux (Schneider 1991, Castela 1995, Vivier 2010) ont ici mis en évidence la difficulté pour les élèves à adopter la perspective locale à partir du jeu de cadre géométrique / numérique symbolique (Schneider 1991) qui est proposé dans l'enseignement. Cette introduction est basée sur l'idée de tangente comme limite des sécantes mais les élèves ne peuvent avoir qu'une perspective globale sur la tangente, vue au collège et en seconde comme droite qui intercepte la courbe (le cercle ou la parabole essentiellement) en un unique point double. Le changement de perspective, important au moment de l'introduction de ce nombre dérivé, ne peut donc pas non plus être suffisamment repéré par les élèves. Cette perspective locale est ensuite très peu travaillée pour elle-même en première et en terminale. Maschietto (2001, 2008) a par exemple travaillé avec les technologies le jeu global/local au moment de l'introduction du nombre dérivé. Elle utilisait la fonctionnalité de zooms des calculatrices graphiques mais il s'agissait d'un travail d'ingénierie qui n'est pas usuel dans les pratiques enseignantes.

Les notions locales sont en fait principalement mobilisées dans des exercices où les fonctions sont représentées et représentables par une formule algébrique, en général polynomiale puis mêlant exponentielles et logarithmes en terminale. Les recherches de limites sont traitées par des calculs algébriques et les démarches de minorations, majorations et encadrement avec des fonctions de références, qui existaient par exemple dans les programmes à partir de 1982 et qui pouvaient donner corps à la perspective locale, ont quasiment disparu. Il n'y a plus de définition opérationnelle du concept de limite et une approche intuitive de la notion de limite apparaît. Les représentations graphiques permettent seulement d'illustrer les notions et quelques résultats locaux dont les preuves ne sont pas assumées. Selon Bloch (2002), « *cette illustration des propriétés est supposée s'appuyer sur l'intuition graphique. Elle ne questionne pas le rapport graphique / fonctions supposé transparent : les élèves sont supposés voir dans le dessin graphique ce qu'y voit le professeur* ». Compte tenu des considérations faites plus haut sur la difficulté d'accès à la perspective globale sur les fonctions, cette perspective locale ne peut effectivement pas aller de soi pour les élèves.

Au niveau du baccalauréat, Coppé et al. (2007) notent qu'il existe toujours une forte algébrisation de techniques pour l'étude des fonctions, basées sur des règles de calcul algébriques (calculs de limites, de dérivées, étude des variations de fonctions polynômes, exponentielles, logarithmes…), qui renforcent les élèves dans des pratiques algébriques. Les questions portent sur des études globales mais sont algébrisées. En particulier, les fonctions sont toujours dérivables globalement et la variation est étudiée à partir du signe de la dérivée, ce qui ramène des propriétés globales à des propriétés ponctuelles universelles et masque le caractère global de ces propriétés. Les tableaux de variations et les graphiques dont l'usage permettrait de travailler la perspective globale, ne sont que rarement des outils de travail mais sont essentiellement des objets à construire, à compléter, à confronter aux résultats algébriques. Le théorème et l'inégalité des accroissements finis, qui étaient des outils permettant des encadrements et des majorations globales, critiqués parce que stéréotypant les sujets de baccalauréat, ont disparu des programmes, participant à ce recul du travail des perspectives globale et locale sur les fonctions. Les questions ponctuelles (résolutions d'équations ou intersections de graphes) sont traitées algébriquement et le graphique ne sert encore qu'à conforter les résultats algébriques, ce qui réduit son rôle à un rôle de contrôle. Les problèmes locaux (limites, continuité, dérivabilité en un point) sont encapsulés dans des procédures algébriques. Le taux de variation d'une fonction peut-être explicitement demandé à des élèves de terminale mais l'idée de son calcul n'est pas supposée disponible spontanément quand elle est judicieuse.

Au final, Bloch, Comin, Coppé et al pointent comme nous, le fait qu'avec l'importance du travail algébrique, l'enseignement secondaire contribue à masquer les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions et il évacue aussi la perspective locale dans ses programmes, ses manuels et ses pratiques. Autrement dit, il y aurait sans doute une trop large algébrisation, qui nuirait d'une part à l'accès des élèves à la perspective locale et qui masquerait d'autre part les perspectives ponctuelle et globale à adopter sur les fonctions. Des élèves, qui se retrouveraient majoritairement dans les populations étudiantes à l'université, ne pourraient pas facilement passer du ponctuel au global et vice versa. Hors des situations algébrisées, les fonctions seraient considérées au mieux, soit comme des correspondances ponctuelles, soit comme des objets globaux, sans une articulation possible entre les deux perspectives. Dans les situations algébrisées, les objets manipulés seraient très formels, sans les différentes perspectives sous-jacentes.

5) Notre questionnaire et les perspectives mises adoptées par les étudiants

Dans le cadre du travail de la CI2U, un questionnaire a été proposé aux étudiants de L1 de plusieurs universités françaises (Paris Diderot, Bordeaux 1, Montpellier, Rouen) aux rentrées 2007 et 2008, pendant la première semaine de cours. 298 réponses d'étudiants ont été analysées pour ce qui concerne l'Analyse. Il s'agissait de regarder les capacités des étudiants à adopter diverses perspectives (ponctuelles, globale ou locale) et ce à travers des calculs de limites de suites et de fonctions. Il était important d'insérer aussi dans ce questionnaire des questions de limites de suites pour détecter des étudiants qui n'auraient raisonné que sous une perspective ponctuelle. Nous y reviendrons.

1. Parmi ces suites données par leur terme général, quelles sont celles qui ont une limite quand *n* tend vers l'infini ? Précisez cette limite quand elle existe.

- 1-1 $(\lceil 1)^n \lceil 1$:
- 1-2 $\sqrt{n} \lceil n$:
- 1-3 $\sin(\lceil \lceil n)$:
- 1-4 $\cos(\frac{2\lceil}{n})$:

2. Donnez les limites des fonctions suivantes :

- $f(x) \lceil \frac{e^x}{x^3}$. 2-1a Limite quand *x* tend vers plus l'infini :

  2-1b Limite quand *x* tend vers en 0 :

  2-1c Limite quand *x* tend vers moins l'infini :

- $g(x) \lceil x^{10} e^x$. 2-2a Limite quand *x* tend vers plus l'infini :

  2-2b Limite quand *x* tend vers 0 :

  2-2c Limite quand *x* tend vers moins l'infini :

- $j(x)= \cos(2\lceil x)$. 2-3 Limite quand *x* tend vers plus l'infini :
- $l(x) \lceil \frac{\ln x \lceil \ln 2}{x \lceil 2}$. 2-4a Limite quand *x* tend vers plus l'infini :

  2-4b Limite quand *x* tend vers 2 :

Tableau 1: les questions concernant des calculs de limites

Les suites et les fonctions avaient été choisies en fonction de l'importance d'adopter des perspectives ponctuelles, globales ou locales pour obtenir leurs limites. C'est-à-dire que l'on cherchait à voir dans quelle mesure l'adoption d'une ou l'autre des perspectives aidait à trouver la limite : c'était particulièrement le cas pour la limite de la suite $\sin(\lceil \lceil n)$ quand *n* tend vers l'infini - où l'adoption d'une perspective ponctuelle permet immédiatement de voir que cette suite est toujours nulle – et de la limite de la fonction $\cos(2\lceil x)$ quand *x* tend vers l'infini pour laquelle l'adoption de la perspective globale permet immédiatement de conclure qu'elle n'existe pas.

Nous avons également ajouté des fonctions et des suites pour lesquelles des manipulations algébriques aussi bien que l'utilisation des perspectives permettaient de trouver les limites ($f(x) \lceil \frac{e^x}{x^3}$; $g(x) \lceil x^{10} e^x$; $\sqrt{n} \lceil n$). Enfin nous avons ajouté une question où l'adoption de la perspective locale paraissait nécessaire pour trouver la limite : $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$ lorsque x tend vers 2.

La distribution des pourcentages de bonnes réponses parmi les 298 questionnaires fût la suivante :

1-1	1-2	1-3	1-4	**2-1.a**	**2-1b**	**2-1c**	**2-2a**	**2-2b**	**2-2c**	2-3	2-4a	2-4b
48%	46%	18%	41%	**78%**	**9%**	**67%**	**87%**	**71%**	**55%**	20%	53%	13%

Table 2: pourcentages de bonnes réponses dans les questionnaires

Le premier résultat d'ordre général est la faiblesse des pourcentages, ce qui pouvait surprendre étant donné que les étudiants interrogés étaient en filière science.

Le second résultat est le relatif succès des étudiants aux questions où le calcul de limite peut se faire en appliquant de façon directe une règle algébrique, comme $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ et $g(x) = x^{10}e^{x}$ (questions 2-1 et 2-2 en gras). Les différences de réussites peuvent être expliquées par quelques erreurs ou quelques défaillances dans l'application de ces règles.

Le particulièrement bas résultat à la question 2.1b (9%) peut-être expliqué par une habitude naturelle à ne considérer que les réels positifs alors que le résultat très bon en 2.2a (87%) peut lui être expliqué par la non existence d'une forme indéterminée. En question 2.1b, la perspective globale adoptée sur l'expression algébrique aurait pu permettre d'appréhender cette difficulté et cela montre certainement la difficulté des étudiants à adopter cette perspective.

En question 2.4a, il n'on voit qu'une application non immédiate de règles mène à de moins bons résultats (53%) : les étudiants doivent mettre en facteurs au numérateur et au dénominateur les termes dominants, à savoir $ln(x)$ et x. A défaut, ils doivent adopter la perspective locale pour dire que la fonction se comporte comme $\mathbf{ln(x)}/x$ mais ce n'est surement pas non plus naturel pour eux.

Un autre résultat est la faible réussite à la question 2-4-b (13%) qui montre à nouveau la difficulté de la grande majorité d'étudiants à quitter le champ algébrique et à adopter la perspective locale qui était cette fois nécessaire pour reconnaître ici un taux d'accroissement.

Enfin, le dernier résultat est que seulement 3 étudiants sur 298 ont répondu correctement aux question 1.3 **sin(⌈ ⌈ *n*)** et 2.3 **cos(2⌈ *x*)**. Cela nous a permis d'identifier deux groupes d'étudiants assez disjoints au sens où seuls ces 3 étudiants étaient à l'intersection. D'une part des étudiants qui semblent adopter de façon privilégiée la perspective ponctuelle et d'autre part ceux qui semblent adopter de façon privilégiée la perspective globale.

Nous avons donc décidé de diviser la population des 298 étudiants en fonction de leur réponse à la question 1.3 : 104 étudiants ont d'une part répondu que **sin(⌈ ⌈ *n*)** n'a pas de limite lorsque *n* tend vers l'infini, ce qui semblait révéler l'adoption de la perspective globale sur la fonction ***sin*** – fonction qui oscille, notamment au voisinage de l'infini. 68 étudiants d'autre part ont répondu que **sin(⌈ ⌈ *n*)** a 0 ou 1 comme limite, semblant révéler qu'ils l'adoption de la perspective ponctuelle et l'évaluation de la suite en certains entier *n*. Ici nous avons choisi de grouper les étudiants qui ont répondu 0 ou 1 car notre objectif était de conforter le fait qu'ils adoptaient de façon privilégiée la perspective ponctuelle et non qu'ils connaissent leur trigonométrie de base. Nous avons aussi choisi de mettre les 3 étudiants qui ont répondu correctement aux deux questions dans cette catégorie mais le choix aurait pu être autre.

Avec cette classification, 126 étudiants restaient hors des deux groupes. Nous pouvions penser qu'ils n'avaient pu recourir ni à l'une ni à l'autre des deux perspective pour traiter **sin(⌈ ⌈ *n*)** – rappelons qu'aucune règle algébrique ne s'applique. Nous verrons plus bas que ce troisième groupe était le groupe des étudiants les plus faibles globalement.

Avec cette catégorisation, nous avons regardé les résultats à plusieurs limites où les règles algébriques ne s'appliquaient pas (sauf pour la question 1-4) :

Questions	Réponses (effectifs)	Total (298)	Global (104)	Ponctuel (68)	Sans (126)
1-3	Pas de limite	35%	**100%**	*******	*******
sin(⌈ ⌈ *n*)	**0** or 1	23%	*******	**100%**	*******
	Pas de réponse	27%	*******	*******	**65%**
2-3	Pas de limite	20%	**52%**	4% (*)	3%
cos(2⌈ *x*)	0 or 1	21%	15%	**73%**	**23%**
	Pas de réponse	30%	20%	10%	**49%**
1-1	Pas de limite	48%	**80%**	**49%**	21%
	Si pair/impair	5%	3%	**9%**	5%
	Pas de réponse	17%	0%	9%	**37%**
1-2	Pas de limite	12%	11%	18%	10%
	- ∞	46%	**65%**	**47%**	29%
	Pas de réponse	23%	9%	12%	**41%**
1-4	**0 or 1**	41%	**53%**	**75%**	33%
cos($\frac{2⌈}{n}$)	Pas de réponse	27%	5%	13%	**53%**

Table 3: pourcentage des réponses d'étudiants aux questions 1-3, 2-3, 1-1, 1-2 et 1-4 avec le filtre de notre catégorisation

Pour simplifier, pour chacune des questions 1-3, 2-3, 1-1, 1-2 et 1-4, nous n'avons considéré que les principales catégories de réponses. Dans la première ligne, les nombres entre parenthèses sont les effectifs sur lesquels les pourcentages ont été pris. La note (*) signifie ces 4% sont les 3 étudiants qui ont répondu correctement à la fois à la limite de *sin*(⌈ ⌈ *n*) (1-3) et à la limite à l'infini de *cos*(2⌈ *x*) (2-3).

Pour simplifier encore, on notera (G) le premier groupe (104 étudiants), (P) le second groupe (68 étudiants) et (U) le troisième groupe (126 étudiants).

Cette catégorie est très simpliste et peut-être critiquée à tous points de vue mais elle fournit un contraste très net entre les étudiants pour les questions 1-3 et 2-3 mais aussi ensuite pour les questions 1-1, 1-2 et 1-4 même si c'est peut-être dans une moindre mesure pour les deux dernières. Dans le derniers cas, les étudiants pouvaient par exemple à nouveau se raccrocher à une règle algébrique de composition assez immédiate. Mais il est intéressant de voir que sur cette question-là le pourcentage de réussite est meilleur pour le groupe (P). Cela renforce une idée introduite dans le paragraphe 3 sur le lien entre représentation algébrique et la perspective ponctuelle (l'importance du ponctuel universel associé à la formule).

La plus importante corrélation est observée entre la question 2-3 $\mathbf{cos(2\lceil\ }\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ et la question 1-1 $\mathbf{(\lceil 1)}^{n}\lceil\ \mathbf{1}$ où aucune règle algébrique ne pouvait être appliquée : il y a une forte cohérence avec les réponses à la question 1-3 $\mathbf{sin(\lceil\ \ \lceil\ \ }\boldsymbol{n}\mathbf{)}$ et aux réponses à la question 2-3 $\mathbf{cos(2\lceil\ }\boldsymbol{x}\mathbf{)}$. Alors que 20% de la population totale donne la bonne réponse à la question 2-3, ce pourcentage augmente à 52% dans le groupe (G) et tombe à 4% et 3% dans les deux autres groupes. Ce résultat est aussi clair à l'inverse – mais cela n'apparait pas sur le tableau compte tenu du choix de catégorisation. En effet, 90% des étudiants qui ont répondu correctement à la question 2-3 $\mathbf{cos(2\lceil\ }\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ ont répondu que $\mathbf{sin(\lceil\ \ \lceil\ \ }\boldsymbol{n}\mathbf{)}$ n'a pas de limite. Ceci dénote l'adoption privilégiée de la perspective globale sur les fonctions prise par les étudiants de ce groupe. Cela les mène à des erreurs en ce qui concerne la suite.

Ensuite, la différence entre (G) et (P) montre que 80% des étudiants du groupe (G) répondent correctement à la question 1-1 $\mathbf{(\lceil 1)}^{n}\lceil\ \mathbf{1}$ alors que ce pourcentage tombe à 49% pour le groupe (P). C'est-à-dire que l'adoption de la perspective ponctuelle semble insuffisante pour affronter une telle suite pour laquelle à nouveau aucune règle algébrique ne permet de conclure. Dans le même temps, 21% des étudiants ont donné 0 ou 1 comme limite à la fonction $\mathbf{cos(2\lceil\ }\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ et ce pourcentage monte à 73% parmi les étudiants de (P), beaucoup plus que dans le groupe (U) 23%. En outre, dans le groupe (P), 9% des étudiants répondent que la limite de la suite $\mathbf{(\lceil 1)}^{n}\lceil\ \mathbf{1}$ dépend de la parité de n, plus que dans le groupe (U) 5%. Cela renforce donc la pertinence de notre classification. Il aurait fallu regarder si les étudiants du groupe (G) s'en soirtait mieux sur la question 2-1b

Ces résultats confirment donc la difficulté des étudiants appartenant au groupe (P) d'approcher les fonctions comme des objets globaux, par exemple avec une limite unique. En fait, ces utilisations des perspectives ponctuelle ou globales se revèlent être de bons leviers pour répondre à certaines limites mais aussi des pièges dans d'autres cas. Il apparait que peu d'étudiants sont capables d'adopter l'une et l'autre des perspectives en fonction de la situation. En effet, si on regarde par rapport au groupe (U), il semble que les étudiants donnent plus souvent aucune réponse, ce qui revèle la faiblesse de ce groupe et leur difficultés à raisonner dès que les règles algébriques ne peuvent pas s'appliquer.

La catégorisation est moins cruciale vis-à-vis des réponses aux questions 2-1 et 2-2. Le tableau suivant montre encore la faiblesse relative des différents groupes vis-à-vis des manipulations algébriques. Il n'y a pas pour ces questions de différence majeure entre les trois groupes (G), (P) et (U), mais dans chacune des lignes du tableau, il est remarquable que les résultats des étudiants du groupe (G) sont supérieurs à ceux des étudiants du groupe (P), eux-mêmes supérieurs à ceux du groupe (U).

Réponses correctes	Total (298)	Grpe (G) (104)	Grpe (P) (68)	Grpe (U) (126)
Question 2.1.a	78%	**92%**	81%	65%
Question 2.1.b	9%	**19%**	7%	2%
Question 2.1.c	67%	**83%**	72%	51%
Question 2.2.a	88%	**96%**	94%	80%
Question 2.2.b	72%	**81%**	71%	65%
Question 2.2.c	56%	**70%**	60%	42%

Tableau 4 : pourcentage des bonne réponses des étudiants dans chacune des catégories pour les questions 2-1-a-b-c et 2-2-a-b-c

La classification entre ces trois groups peut aussi être vue en fonction des types de baccalauréat et les résultats des étudiants (leur mention). Cela montre à nouveau que l'appartenance des étudiants au groupe (G) est fortement corrélée aux bons résultats au baccalauréat et à la sortie du bac S. Pourtant comme on l'a dit plus haut, ce sont bien les étudiants du groupe (G) qui ont mal répondu à la limite de **sin(⌈ ⌈ *n*)** et moins bien répondu à la limite de $cos(\frac{2\pi}{n})$.

	Total (298)	Grpe (G) (104)	Grpe (P) (68)	Grpe (U) (126)
Bac S	91%	97%	95%	84%
Passable	48%	27%	**61%**	**56%**
Assez Bien	35%	**47%**	23%	31%
Bien	15%	**22%**	13%	11%

Table 5 : pourcentage des étudiants avec un *Bac S* , mention "*passable*", "*assez bien*" et "*bien*" en fonction de leur appartenance aux trois groupes

6) Résultats

Reprenons de façon synthétique nos observations. Les résultats concernant des calculs de limites étaient assez bons dès lors que ces limites mettaient en jeu des règles algébriques sur les fonctions monômes, exponentielles, logarithmes, avec des formes et des bornes usuelles : le calcul de la limite de $g(x) = x^{10}e^{x}$ lorsque *x* tend vers moins l'infini étant par exemple réussi à 55 %, le calcul lorsque *x* tend vers plus l'infini étant le mieux réussi avec 87 %. Les résultats étaient toujours corrects mais sensiblement moins bons lorsque les formes ne correspondaient pas à des formes indéterminées usuelles de terminale, c'est-à-dire que les règles algébriques ne s'appliquaient pas de façon immédiate : le calcul de la limite de $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$ lorsque *x* tend vers plus l'infini étant par exemple réussi à 53 %, celui le moins bien réussi étant celui de la limite de $f(x) = \frac{e^{x}}{x^{3}}$ lorsque *x* tend vers 0, réussi à seulement 9 % : l'absence de disponibilité de la perspective globale sur la fonction représentée semble pouvoir expliquer ce taux d'échec chez les étudiants. En effet, la fonction $f(x) = \frac{e^{x}}{x^{3}}$ tend vers $-\infty$ en 0^{-} et tend vers $+\infty$ en 0^{+}. La perspective globale adoptée sur l'expression algébrique $f(x) = \frac{e^{x}}{x^{3}}$ permettrait d'appréhender cette difficulté mais comme nous l'avons expliqué plus haut seul un expert peut spontanément adopter cette perspective à partir de la seule expression algébrique. L'étudiant peut ne référer qu'aux formules algébriques et ne pense pas à la différence de traitement qui doit être faite en 0^{+} et en 0^{-}.

En outre, ces résultats de la CI2U ont remis en évidence la non disponibilité chez les étudiants de la perspective locale nécessaire pour un calcul correct des limites en formes de taux d'accroissement, la limite de $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$ lorsque *x* tend vers 2 n'étant réussie qu'à 13%.

Concernant des calculs de limites à l'infini qui ne mettent pas en jeu des règles algébriques, seuls 3 étudiants sur 298 ont répondu correctement aux deux calculs de limites $\sin(2\pi n)$ lorsque n tend vers l'infini et $\cos(2\pi x)$ lorsque x tend vers plus l'infini. Plus précisément, deux groupes d'étudiants sont alors apparus nettement. Le premier groupe est constitué des étudiants, très nombreux (126 sur 298), qui ne se dégagent pas d'une approche algébrique et ne donnent aucune réponse à ce genre de calcul de limite ($\sin(2\pi n)$ lorsque n tend vers l'infini, $\cos(2\pi x)$ lorsque x tend vers plus l'infini et d'autres du même type). L'autre groupe est constitué d'étudiants qui semblent pouvoir dépasser cette approche purement algébrique des fonctions et des calculs de limites : on trouve cependant parmi ceux-là d'une part des étudiants qui semblent plutôt raisonner sur les deux limites (et d'autres) avec une perspective ponctuelle, donnant une limite finie à la suite et à la fonction (54 étudiants sur les 298), et d'autre part des étudiants qui semblent plutôt adopter une perspective globale pour conclure (traitant notamment les suites comme des fonctions, 49 sur 298). Pour tous les autres étudiants, hors des deux grands groupes que nous venons d'identifier, le questionnaire était trop limité pour les catégoriser.

Comme le calcul de ces limites se fait à l'infini, il semble que ce ne soit pas la perspective locale qui soit pertinente ici mais bien la perspective ponctuelle (dans quelques cas particulier de suites comme $\sin(2\pi n)$ où la perspective ponctuelle permet de trouver que la suite est constamment nulle) et surtout la perspective globale sur les fonctions en jeu (comme pour la fonction $\cos(2\pi x)$ où la perspective globale permet de déduire de l'oscillation la non convergence). De fait, si la coordination des deux perspectives ponctuelle et globale se révélait nécessaire pour traiter au mieux tous les calculs de limites rencontrés, il est apparu que peu d'étudiants arrivant en L1 semblent capables de changer de perspective spontanément (une vingtaine dont les 3 qui ont répondu correctement aux limites de $\sin(2\pi n)$ et $\cos(2\pi x)$) et que beaucoup d'étudiants ne semblent mobiliser aucune des deux perspectives, répondant faux ou ne répondant pas à toutes les questions où les procédures algébriques sont inefficaces et où ces perspectives sont pertinentes.

7) Compléments

Nous avons mené depuis des expérimentations sur plus de 500 étudiants entrant en L1 à l'université Paris Diderot (Vandebrouck et Leidwanger, 2016). Les résultats, obtenus automatiquement par statistiques, mettent en évidence la façon dont certains étudiants recourent tout de même aux perspectives pour calculer des limites de fonctions (pas de mélanges avec des suites dans cette expérimentation, limites aussi bien à l'infini qu'en des valeurs finies).

Nos nouvelles analyses tendent maintenant à faire penser que quand bien mêmes les étudiants arrivent toujours avec une vision très algébrisée des fonctions et des habiletés essentiellement algébriques pour répondre aux calculs de limites, ils sont beaucoup moins à l'aise avec les règles de l'algèbre des limites et les méthodes algébriques pour lever les indéterminations quand les règles ne permettent pas de conclure.

Il semble qu'ils se sont constitués des connaissances d'une algèbre généralisée ($exp(-\infty)=0$; $ln(0)=-\infty$…) où les calculs de limites s'amalgament à des problèmes de substitution et de composition numériques. Mais dans les sommes, produits, quotients, ils semblent identifier difficilement les formes algébriques indéterminées ($\infty-\infty$, $0 \times \infty$…). Il n'y a pas de différence sensible dans les résultats selon que les formes sont déterminées ou indéterminées. Les étudiants ont surement en outre des difficultés pour entrer dans un travail algébrique permettant de lever les indéterminations le cas échéant.

Il semble toutefois qu'on arrive progressivement à faire d'un cercle vicieux un cercle vertueux. Faute d'un travail suffisent mettant en jeu les perspectives sur les fonctions (associé à un travail graphique par exemple, et un stock suffisant de fonction de références), les étudiants ne comprennent pas correctement et ne savent pas appliquer correctement les règles techniques qu'on leur demande de retenir et d'appliquer. Ils n'identifient en particulier plus quelles sont les formes déterminées et les formes indéterminées. De surcroit, ils ont des difficultés en calcul algébrique (mise en facteur notamment).

De fait, il semble qu'ils puissent avoir développé des connaissances qualitatives sur les perspectives que nous avons introduites. Ils semblent par exemple identifier à tort et à raison que l'exponentielle est une fonction qui domine les autres fonctions qu'ils rencontrent. Ces mises en perspectives des différents termes dans les formules algébriques se substituent donc peut-être à une algèbre des limites, très technique, mais qui n'a plus beaucoup de sens pour les étudiants, faute d'avoir justement travaillé les perspectives.

Bien sûr, faute d'être étayées institutionnellement, ces connaissances sur les perspectives sont incomplètes, pas maîtrisées et mènent aussi bien à des bonnes réponses qu'à des erreurs. On voit également des juxtapositions de perspectives, avec des règles en actes que nous avons bien identifiées comme « *0 fois quelque chose fait toujours 0* ». Peut-être l'enseignement devrait-il bâtir sur ces connaissances qualitatives liées aux perspectives plutôt qu'à algébriser encore plus l'analyse ?

Références

Artigue M. (1993) Enseignement de l'analyse et fonctions de références, *Repère IREM*, vol 11, 115-139

Artigue M. (1991) *Analysis*, in D. Tall (ed.) Advanced mathematical thinking, Kluwer Academic Press, 167-198

Artigue M., Batanero C., Kent P. (2007) Mathematics thinking and learning at post-secondary level. Dans F. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.1011-1049). Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing, Inc.

Bloch, I. (2002) Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée, *petit x*, vol 58, 25-46

Bloch, I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu : what forms of knowledge enable students to conjecture and prove, *Educational Studies in Mathematics,* 52, 3-28

Bloch, I. (2004) The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and university, ICME10, communication to the Topic Study Group 12, Copenhagen

Bridoux S. (2011) *Enseignement des premières notions de topologie à l'université : une étude de cas*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot. Paris.

Bridoux S. Chappet-Pariès M., Grenier-Boley N., Hache C., Robert A. (2015) Les moments d'exposition des connaissances, *Cahier du LDAR numéro 14*, juillet 2015

Castela C. (1995) Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 15 (1). pp 7-48.

Chorlay R. (2011) Local-global: the first twenty years. *Archives for history for exact sciences*. Vol 65. pp 1-66.

Comin, E. (2005) Variables et functions, du collège au lycée. Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel

Coppé, S., Dorier J.L., Yavuz I. (2007) De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 27 (2), 151-186
Douady R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 7 (2). pp 5-31.
Duval R. (1991) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol 5. pp 37-65.
Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives de Strasbourg*, vol 5, 37-65
Grenier-Boley N. (2009) *Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université*. Cahier de Didirem, Numéro 59, Publication de IREM de Paris 7.
Gueudet G. (2008) Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 67. pp 237-254.
Maschietto M. (2001) Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 21 (1-2). pp 123-156.
Maschietto M. (2008) Graphic Calculators and Micro Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computer for Mathematics Learning*. Vol 13. pp 207-230.
Raftopoulos A., Portides D. (2010) Le concept de fonction et sa représentation spaciale, Dans *Actes de Deuxième Symposium Franco-Chypriote « Mathematical Work Space ».* 201-214. Paris.
Robert A. (1982) *Divers travaux de mathématiques et l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*. Thèse d'Etat. Université Paris 7.
Robert A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP*. Vol 340. pp 431-449.
Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol 18 (2), 139-190
Robert A., Boschet F. (1984) *Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de DEUG première année*. Cahier de didactique des mathématiques, Numéro 7, Publication de IREM de Paris 7.
Rogalski J. (1984) Représentations graphiques dans l'enseignement: concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonction. Dans A. Giordan et J.-L. Martinand (Eds.) *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifiques. Sixième journées internationales sur l'éducation scientifique et technique* (pp.379-388). Chamonix:
Rogalski M. (2008) Les rapports entre local et global: mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. Dans L. Viennot (Eds.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp.61-87). Paris: PUF.
Schneider M. (1991) Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *Repère IREM*. Vol 5. pp 65-82.
Vandebrouck F. (2008a) Functions at the transition between French upper secondary school and University. Communication de la commission inter irem université (CI2U), Dans *Actes de ICMI.* Monterey, Mexico.
Vandebrouck, F. (2011a). Points de vue et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de Strasbourg, 16*, 149-185.
Vandebrouck F. (2011b) Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignants, *Habilitation à Diriger des Recherches,* Université Paris Diderot

Vandebrouck F., Leidwanger S. (2016) Students'vizualisation of functions from secondary to tertiary level, *Communication au colloque INDRUM*, Montpellier, 31 mars-1er Avril 2016
Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 10 (2-3). pp 133-169.
Vivier L. (2010) Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 15. pp 173-199.