Exercice 1 *Construire un triangle ABC dont les bissectrices sont trois droites concourantes, données deux à deux non perpendiculaires.*

Solution 1 *Analyse :* Dans un triangle triangle ABC, notons d la droite (AC), $\mathfrak{S}_A$, $\mathfrak{S}_B$ et $\mathfrak{S}_C$ les réflexions par rapport aux trois bissectrices intérieures, contenant A B et C.

On a

$$\mathfrak{S}_B(\mathfrak{S}_A)(d)) = \mathfrak{S}_B(AB) = (CB) = \mathfrak{S}_C(d).$$

Ou encore

$$(\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_A)(d) = d.$$

La composée de trois réflexions d'axes concourants est une réflexion dont d est une droite invariante. Comme d n'est pas fixe point par point puisqu'elle ne contient pas O, elle est orthogonale à l'axe de la réflexion obtenue.

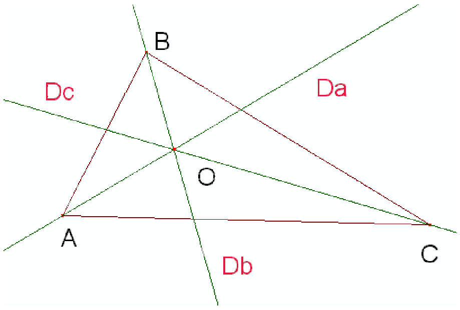

figure 1

Construction :

Appelons θ l'angle (défini à π près) des droites $(\widehat{D_a, D_b})$; et désormais $\mathfrak{S}_A$ $\mathfrak{S}_B$ et $\mathfrak{S}_C$ les réflexions par rapport aux droites D_a, D_b, et D_c.
Il existe une réflexion $\mathfrak{S}$ d'axe D telle que

$$\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_A = \Re_{2\theta} = \mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S},$$

par exemple $D = \Re_{-\theta}(D_c)$. La droite d est construite perpendiculaire à D.
La droite d ainsi construite est sécante à D_c en C (on a $(\widehat{d, D_c}) = \theta + \frac{\pi}{2} \neq 0 \quad [\pi]$).
Elle est aussi sécante à D_a en A. En effet si D_a était parallèle à d, et donc orthogonale à D, on aurait

$$D_a = \mathfrak{S}(D_a) = (\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_A)(D_a)$$

donc

$$D_a == (\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_B)(D_a)$$

et la rotation $(\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_B)$ serait d'angle nul (à π près). Les droites D_b et D_c seraient donc orthogonales, ce qui est exclu.
On trouve les autres côtés du triangle, comme images de d par les réflexions d'axes D_a et D_c (*cf* fig **??**).

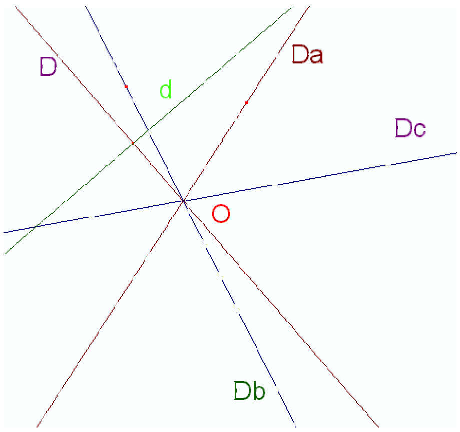

figure 2

Synthèse : La synthèse consiste à démontrer que $\mathfrak{S}_A(d)$ et $\mathfrak{S}_C(d)$ sont sécantes en un point B de D_b.

- L'angle $(\widehat{\mathfrak{S}_A(d), \mathfrak{S}_C}(d)) = -((\widehat{\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_A})(d),\ d)$ et il n'est pas nul à π près car l'angle de la rotation $\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_A$ n'est pas nul, puisque les droites D_a et D_c ne sont pas perpendiculaires.
- Soit B le point d'intersection :

  – L'image $\mathfrak{S}_B(B)$ appartient à la droite $(\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_A)(d)$. Or puisque d est orthogonal à l'axe de $\mathfrak{S}$

  $$(\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_A)(d) = (\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S})(d) = \mathfrak{S}_C(d) = (CB)$$

  – L'image $\mathfrak{S}_B(B)$ appartient à la droite $(\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_C)(d)$.

  $$(\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_C)(d) = (\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_C)(\mathfrak{S}(d)) = (\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S})(d)$$

  $$(\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_C)(d) = \mathfrak{S}_A(d) = (AB).$$

  Finalement, $\mathfrak{S}_B(B) = (AB) \cap (BC) = \{B\}$; le point B est fixe par $\mathfrak{S}_B$.

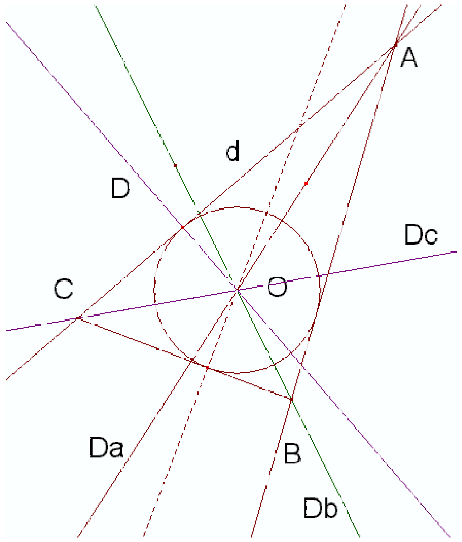

figure 3

Exercice 2 *Construire un triangle ABC dont les bissectrices sont trois droites concourantes, données deux à deux non perpendiculaires.*

Solution 2 *Analyse :*

Si le triangle n'est pas équilatéral, il n'est pas isocèle en C par exemple. Les bissectrices extérieures des angles en A et B se coupent alors en Q. Le cercle de diamètre OQ et de centre I contient alors B et C.

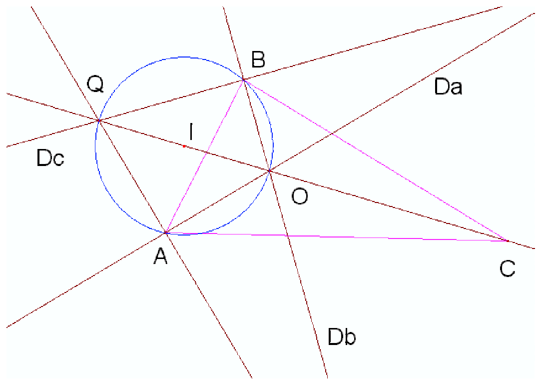

figure 4

Construction :

Un point quelconque Q de D_c se projette orthogonalement sur D_b et D_a en B et A. On trace l'image de (AB) dans la réflexion d'axe (OB).

Si la droite ainsi construite est parallèle à D_c alors elle est sécante à D_a en A' (*cf* fig. 6). Par parallélisme

$$((\widehat{AA'); (A'}B)) = ((\widehat{AO); (O}Q))$$

et comme le triangle de base $[AO]$ et de sommet le centre du cercle est isocèle :

$$((\widehat{AA'); (A'}B)) = ((\widehat{AO); (A}B)).$$

Finalement le triangle AOB serait rectangle en O ce qui est exclu puisque les droites sont choisies non orthogonales.

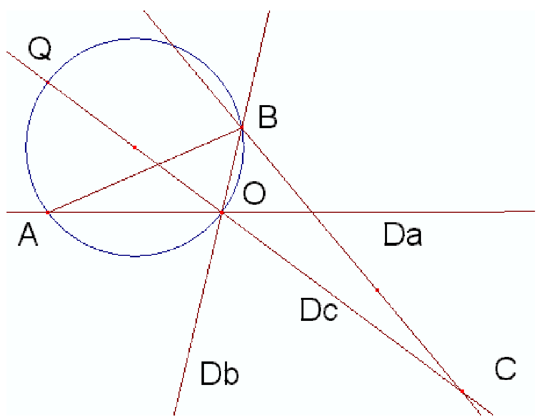

figure 5

On construit donc le point C à l'intersection de l'image de (AB) dans la réflexion d'axe (OB) et de D_c.

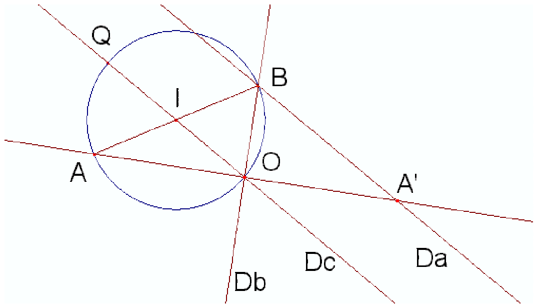

figure 6

Synthèse :

Par construction D_b est bissectrice de l'angle en B. L'autre bissectrice orthogonale est la droite (BQ). La droite (AB) coupe D_c en P. (? ?cazz à faire), la division $[Q; O; P; C]$ est harmonique.

n

Le faisceau de droites $[(AQ); (AO); (AP); (AC)]$ est donc lui aussi harmonique. Mais comme les droites (AQ) et (AO) sont orthogonales, ceci signifie que (AQ) et (AO) sont les bissectrices de l'angle en A. Le point O est le point d'intersection des bissectrices dans le triangle ABC.

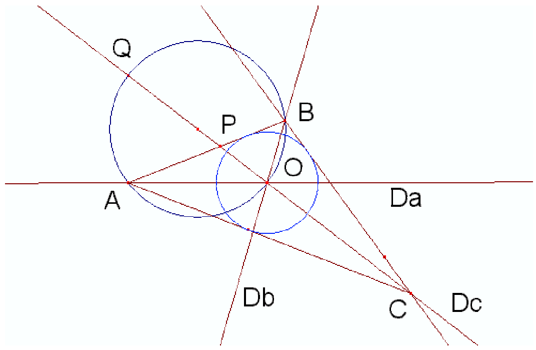

figure 7