Je propose d'ajouter les pages qui suivent après le texte de Bernard Destainville sur l'exercice des bissectrices.

Dans ces exercices on n'a pas poussé la rédaction du problème réciproque jusqu'à déterminer dans quels cas les droites données sont les bissectrices intérieures ou extérieures du triangle obtenu.

Exercice 1 *Construire un triangle ABC dont les bissectrices sont trois droites concourantes, données deux à deux non perpendiculaires.*

Analyse : Dans un triangle triangle ABC, notons d la droite (AC), $\mathfrak{S}_A$, $\mathfrak{S}_B$ et $\mathfrak{S}_C$ les réflexions par rapport aux trois bissectrices intérieures (ou à une bissectrice intérieure et deux extérieures) contenant A B et C.

On a

$$\mathfrak{S}_B(\mathfrak{S}_A)(d)) = \mathfrak{S}_B(AB) = (CB) = \mathfrak{S}_C(d).$$

Ou encore

$$(\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_A)(d) = d.$$

La composée de trois réflexions d'axes concourants est une réflexion dont d est une droite invariante. Comme d n'est pas fixe point par point puisqu'elle ne contient pas O, elle est orthogonale à l'axe de la réflexion obtenue.

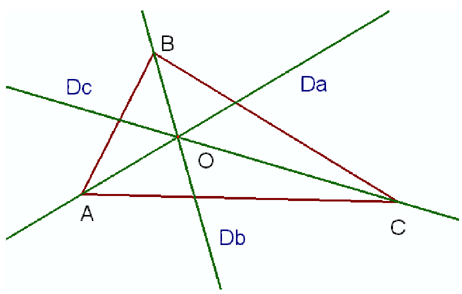


figure 1

Construction :

Appelons θ l'angle (défini à π près) des droites $(\widehat{D_a, D_b})$; et désormais $\mathfrak{S}_A$ $\mathfrak{S}_B$ et $\mathfrak{S}_C$ les réflexions par rapport aux droites D_a, D_b, et D_c.
Il existe une réflexion $\mathfrak{S}$ d'axe D telle que

$$\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_A = \Re_{2\theta} = \mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S},$$

par exemple $D = \Re_{-\theta}(D_c)$. La droite d est construite perpendiculaire à D.
La droite d ainsi construite est sécante à D_c en C (on a $(\widehat{d, D_c}) = \theta + \frac{\pi}{2} \neq 0 \quad [\pi]$).
Elle est aussi sécante à D_a en A. En effet si D_a était parallèle à d, et donc orthogonale à D, on aurait

$$D_a = \mathfrak{S}(D_a) = (\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_A)(D_a)$$

donc

$$D_a = (\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_B)(D_a)$$

et la rotation $(\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_B)$ serait d'angle nul (à π près). Les droites D_b et D_c seraient donc orthogonales, ce qui est exclu.
On trouve les autres côtés du triangle, comme images de d par les réflexions d'axes D_a et D_c (*cf* fig **??**).

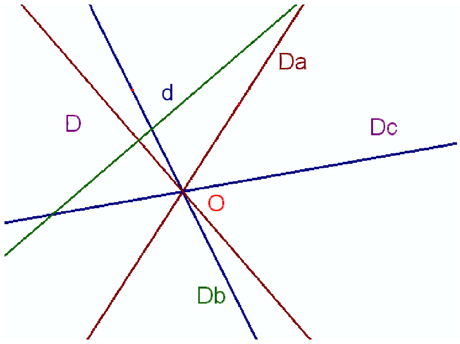


figure 2

Synthèse : La synthèse consiste à démontrer que $\mathfrak{S}_A(d)$ et $\mathfrak{S}_C(d)$ sont sécantes en un point B de D_b.

- L'angle $(\widehat{\mathfrak{S}_A(d), \mathfrak{S}_C(d)}) = -(\widehat{(\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_A)(d),\ d})$ et il n'est pas nul à π près car l'angle de la rotation $\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S}_A$ n'est pas nul, puisque les droites D_a et D_c ne sont pas perpendiculaires.
- Soit B le point d'intersection :

– L'image $\mathfrak{S}_B(B)$ appartient à la droite $(\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_A)(d)$. Or puisque d est orthogonal à l'axe de $\mathfrak{S}$

$$(\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_A)(d) = (\mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S})(d) = \mathfrak{S}_C(d) = (CB)$$

– L'image $\mathfrak{S}_B(B)$ appartient à la droite $(\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_C)(d)$.

$$(\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_C)(d) = (\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_C)(\mathfrak{S}(d)) = (\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_C \circ \mathfrak{S})(d)$$

$$(\mathfrak{S}_B \circ \mathfrak{S}_C)(d) = \mathfrak{S}_A(d) = (AB).$$

Finalement, $\mathfrak{S}_B(B) = (AB) \cap (BC) = \{B\}$; le point B est fixe par $\mathfrak{S}_B$.

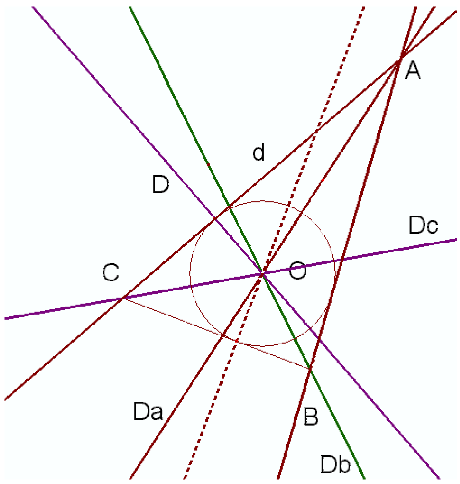


figure 3

Exercice 2 *Construire un triangle ABC dont les bissectrices sont trois droites concourantes, données deux à deux non perpendiculaires.*

Solution 1 *Analyse :*

Si le triangle n'est pas équilatéral, il n'est pas isocèle en C par exemple. Les bissectrices extérieures (*resp* intérieures) des angles en A et B se coupent alors en Q. Le cercle de diamètre OQ et de centre I contient alors A et B.

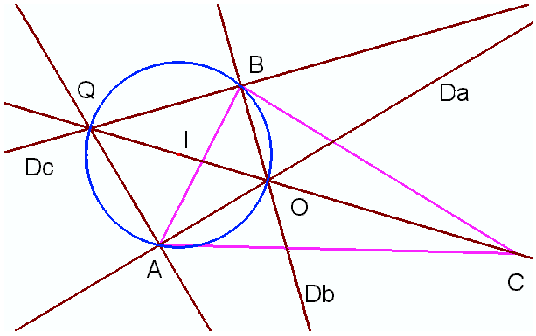


figure 4

Construction :

Un point quelconque Q de D_c se projette orthogonalement sur D_b et D_a en B et A. On trace l'image de (AB) dans la réflexion d'axe (OB).

Si la droite ainsi construite est parallèle à D_c alors elle est sécante à D_a en A' (*cf* fig. 6). Par parallélisme

$$((\widehat{AA'); (A'}B)) = ((\widehat{AO); (O}Q))$$

et comme le triangle de base $[AO]$ et de sommet le centre du cercle est isocèle :

$$((\widehat{AA'); (A'}B)) = ((\widehat{AO); (A}B)).$$

Finalement le triangle AOB serait rectangle en O ce qui est exclu puisque les droites sont choisies non orthogonales.

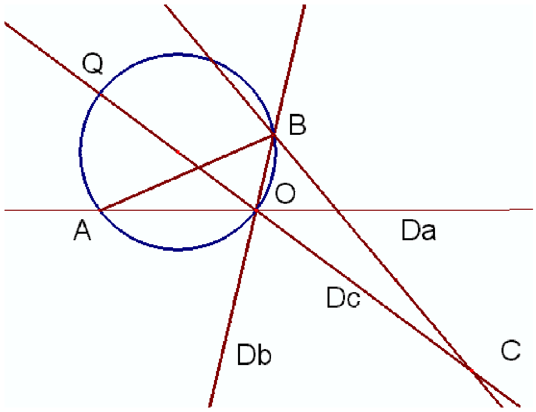


figure 5

On construit donc le point C à l'intersection de l'image de (AB) dans la réflexion d'axe (OB) et de D_c.

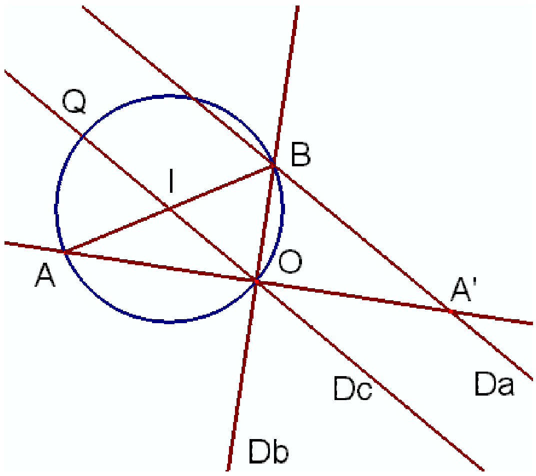


figure 6

Synthèse :

Par construction D_b est bissectrice de l'angle en B. L'autre bissectrice orthogonale est la droite (BQ). Supposons que la droite (AB) coupe D_c en P. Alors la division $[Q; O; P; C]$ est harmonique.

Le faisceau de droites $[(AQ);(AO);(AP);(AC)]$ est donc lui aussi harmonique. Mais comme les droites (AQ) et (AO) sont orthogonales, ceci signifie que (AQ) et (AO) sont les bissectrices de l'angle en A. Le point O est le point d'intersection des bissectrices dans le triangle ABC.

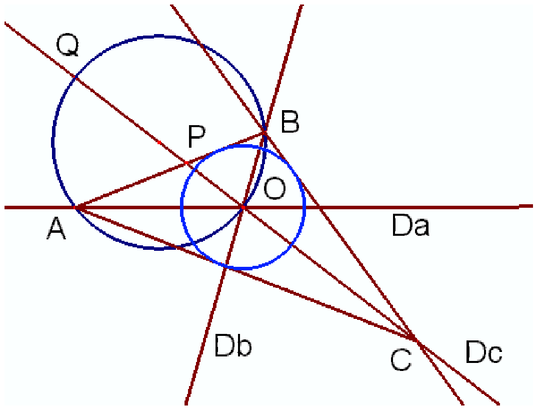


figure 7

Si la droite (AB) est parallèle à D_c. Alors le quadrilatère $(ABOQ)$ est un trapèze isocèle. Sur la figure 8, on montre facilement en utilisant les angles alternes internes que la droite (OB) est une bissectrice de l'angle $(\widehat{IB, AB})$ si bien que le point C de la construction coïncide alors avec le milieu de $[OQ]$. La division $[Q;O;\infty;C]$ reste donc harmonique et le même raisonnement s'applique.

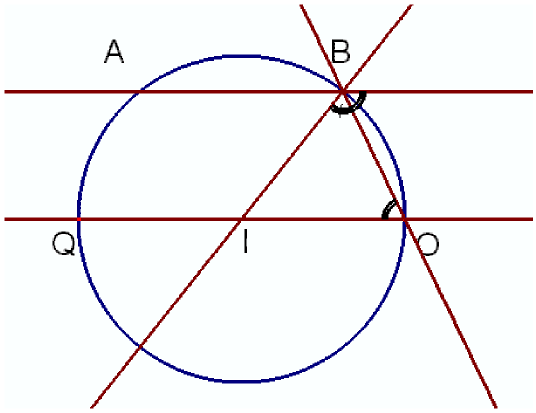


figure 8

Exercice 3 *Construire un triangle ABC dont les bissectrices sont trois droites concourantes, données deux à deux non perpendiculaires.*

On peut se donner les trois côtés du triangle par des équations normales du type

$$(BC):\ x\cos\alpha + y\sin\alpha + p = 0$$

$$(CA):\ x\cos\beta + y\sin\beta + q = 0$$

$$(AB):\ x\cos\gamma + y\sin\gamma + r = 0.$$

On remarque tout de suite qu'il y a deux couples (α, p) et $(\alpha \pm \pi, -p)$ qui définissent, par exemple, la même droite (BC).

Un point $M(x, y)$ de la bissectrice intérieure d_A de l'angle en A vérifie[1]

$$d(M,(AB)) = d(M,(BC))$$

autrement dit

$$|x\cos\gamma + y\sin\gamma + r| = |x\cos\beta + y\sin\beta + q|.$$

Si on choisit comme centre du repère le point O situé à l'intersection des bissectrices et si l'on choisit les constantes r et q positives, on est sûr que l'équation du demi-plan de frontière (AB) (*resp* (CA)) qui contient O est justement $x\cos\gamma + y\sin\gamma + r \geqslant 0$ (*resp* $x\cos\beta + y\sin\beta + q$) si bien qu'une équation de la bissectrice d_A est justement

$$x(\cos\gamma - \cos\beta) + y(\sin\gamma - \sin\beta) \ = \ 0.$$

Compte tenu des formules classiques de trigonométrie on trouve

$$(d_A):\ y = \mathrm{tg}\,\frac{\beta+\gamma}{2}\ x.$$

[1]Hélas ce n'est pas caractéristique, puisque les points de la bissectrice extérieure ont la même propriété...

$$(d_B): \ y = \operatorname{tg} \frac{\gamma+\alpha}{2}\, x.$$

$$(d_C): \ y = \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}\, x.$$

Si par exemple (d_A) et (d_B) étaient perpendiculaires on aurait

$$\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{-1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma+\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\gamma+\alpha+\pi}{2}.$$

On trouverait donc $\beta \equiv \alpha \quad [\pi]$ autrement dit les droites (BC) et (CA) seraient parallèles, c'est exclu.

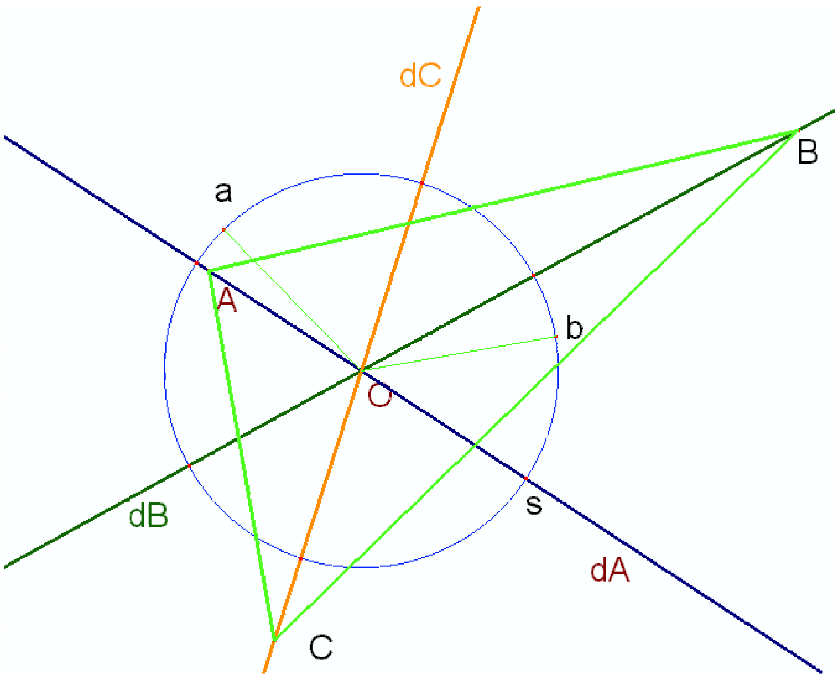
Si on se donne, réciproquement trois droites, concourantes en O, et deux à deux non perpendiculaires, par des équations du type

$$(d_A): \ y = x \operatorname{tg} \lambda \quad (d_B): \ y = x \operatorname{tg} \mu \quad (d_C): \ y = x \operatorname{tg} \nu$$

on peut supposer que le repère orthonormé de centre O est tel que $\lambda = 0$. La non perpendicularité des côtés signifie que les autres bissectrices ne sont pas verticales ce qui justifie l'équation en tangente. On a aussi $\operatorname{tg} \nu$ différent de $\frac{-1}{\operatorname{tg} \mu} = \operatorname{tg}(\nu + \frac{\pi}{2})$, donc $\nu - \mu$ n'est pas égal à $\frac{\pi}{2}$ à π près.
Reconstruire les côtés du triangle, revient à se donner un point A sur (d_A) et à rechercher les équations normales des côtés avec $\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2} = \operatorname{tg} \lambda \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma+\alpha}{2} = \operatorname{tg} \mu \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{tg} \nu \end{cases}$
On trouve d'abord que $\beta + \gamma \equiv 0 \quad [2\pi]$ et donc les deux dernières équations donnent

$$\alpha \equiv \nu + \mu \quad [2\pi] \qquad \beta \equiv \nu - \mu \quad [2\pi].$$

On choisit un point A sur la droite d_A. On trace un cercle de centre O et on place s à l'une des intersections du cercle avec d_A. On construit le point b sur ce cercle tel que $(\widehat{\overrightarrow{Os}, \overrightarrow{Ob}}) = \nu - \mu$. On trace ensuite la droite passant par A et perpendiculaire à (Ob). Elle coupe d_C en C.



En effet

$$(\widehat{Ob, d_C}) = (\widehat{Os, d_C}) - (\widehat{Os, Ob}) = \nu - (\nu - \mu) = \mu \neq \frac{\pi}{2} \quad [\pi].$$

On construit ensuite sur le cercle le point a tel que $(\widehat{\overrightarrow{Os}, \overrightarrow{Oa}}) = \nu + \mu$. la droite passant par C et perpendiculaire à (Oa). Elle coupe d_B en B. En effet

$$(\widehat{Oa, d_B}) = (\widehat{Os, d_B}) - (\widehat{Os, Oa}) = \mu - (\nu + \mu) = -\nu \neq \frac{\pi}{2} \quad [\pi].$$

Le triangle (ABC) a d'après ce qui précède des côtés dont d_A d_B et d_C sont axes de symétrie, mais c'est la place de O par rapport à d_A d_B et d_C qui détermine alors s'il s'agit d'une bissectrice intérieure ou extérieure qui a été construite.