Aires, intégrales et primitives dans l'enseignement secondaire, de 1902 à 2019

Daniel PERRIN

Besançon, colloque du cinquantenaire des IREM,
9 mai 2019

Mes sources

- Ma source principale est le remarquable travail de J.-P. Daubelcour de l'IREM de Lille : *Evolution des programmes d'analyse et de géométrie au XX-ième siècle, en terminale scientifique*
  `http://jpdaubelcour.pagesperso-orange.fr/histoire20.html`
  ainsi que les manuels des différentes époques étudiées.

Mes sources

- Ma source principale est le remarquable travail de J.-P. Daubelcour de l'IREM de Lille : *Evolution des programmes d'analyse et de géométrie au XX-ième siècle, en terminale scientifique*
  `http://jpdaubelcour.pagesperso-orange.fr/histoire20.html`
  ainsi que les manuels des différentes époques étudiées.
- Voir aussi le livre de Marc Rogalski : *Carrefours entre Analyse, Algèbre, Géométrie*, Ellipses, 2001.

Pourquoi ce thème ?

- L'invention du calcul infinitésimal (dérivées et intégrales) par Newton et Leibniz (vers 1680) est, à mon avis, le plus grand progrès accompli par l'humanité en mathématiques.

Pourquoi ce thème ?

- L'invention du calcul infinitésimal (dérivées et intégrales) par Newton et Leibniz (vers 1680) est, à mon avis, le plus grand progrès accompli par l'humanité en mathématiques.
- Elle rend faciles les plus grands résultats des mathématiciens de l'Antiquité : calcul du volume de la pyramide (Euclide), quadrature de la spirale, de la parabole, volume de la boule (Archimède) et les met à portée d'un lycéen.

Pourquoi ce thème ? (2)

- C'est un sujet intéressant du point de vue de l'évolution des programmes et notamment des mouvements de balancier excessifs entre des options divergentes : les aires, les sommes de Riemann, les primitives ...

Pourquoi ce thème ? (2)

- C'est un sujet intéressant du point de vue de l'évolution des programmes et notamment des mouvements de balancier excessifs entre des options divergentes : les aires, les sommes de Riemann, les primitives ...
- On verra que la recherche de l'équilibre n'est pas évidente.

Pourquoi ce thème ? (2)

- C'est un sujet intéressant du point de vue de l'évolution des programmes et notamment des mouvements de balancier excessifs entre des options divergentes : les aires, les sommes de Riemann, les primitives ...
- On verra que la recherche de l'équilibre n'est pas évidente.
- On peut suivre en filigrane dans l'évolution des programmes en ce domaine à la fois les conceptions idéologiques (et parfois politiques) qui traversent la société ainsi que l'influence de certains acteurs, les mathématiciens, les professeurs (via l'APMEP) et ... les IREM.

Pourquoi ce thème ? (3)

- Ce thème est l'occasion d'aborder un certain nombre de questions quasiment philosophiques qui tiennent à la pratique des mathématiques (définitions axiomatiques et/ou constructions) et à leurs applications (calculs de grandeurs, liens avec la physique, etc.).

Pourquoi ce thème ? (3)

- Ce thème est l'occasion d'aborder un certain nombre de questions quasiment philosophiques qui tiennent à la pratique des mathématiques (définitions axiomatiques et/ou constructions) et à leurs applications (calculs de grandeurs, liens avec la physique, etc.).
- Enfin, c'est un sujet qui me tient personnellement à cœur (cf. la commission Kahane, mathématiques d'école, le CAPES, etc.)

Le programme de 1902

L'état des lieux avant 1902

- Avant 1902 la place des sciences dans l'enseignement secondaire est réduite.

L'état des lieux avant 1902

- Avant 1902 la place des sciences dans l'enseignement secondaire est réduite.
- Présentant les programmes de 1890 le ministre Léon Bourgeois dit explicitement : *Les lettres, c'est à dire l'étude des langues et des littératures, avec l'histoire et la philosophie comme complément ou couronnement, garderont naturellement la première place.*

L'état des lieux avant 1902

- Avant 1902 la place des sciences dans l'enseignement secondaire est réduite.
- Présentant les programmes de 1890 le ministre Léon Bourgeois dit explicitement : *Les lettres, c'est à dire l'étude des langues et des littératures, avec l'histoire et la philosophie comme complément ou couronnement, garderont naturellement la première place.*
- Cela implique que les élèves de première doivent continuer à suivre les études de latin-grec, même s'ils choisissent la classe de mathématiques élémentaires.

Le contexte politique, social et philosophique de la réforme de 1902

- La troisième République est à son apogée.

Le contexte politique, social et philosophique de la réforme de 1902

- La troisième République est à son apogée.
- La démocratisation de l'enseignement a été une réussite, mais se limite au primaire, les lycéens ne représentent que 2 à 3 % d'une classe d'âge.

Le contexte politique, social et philosophique de la réforme de 1902

- La troisième République est à son apogée.
- La démocratisation de l'enseignement a été une réussite, mais se limite au primaire, les lycéens ne représentent que 2 à 3 % d'une classe d'âge.
- L'idéologie dominante : le positivisme, doctrine philosophique d'Auguste Comte (1798-1857), met en avant la science comme moteur du progrès de l'humanité. Elle influence profondément les fondateurs de la troisième République.

Le contexte politique, social et philosophique de la réforme de 1902

- La troisième République est à son apogée.
- La démocratisation de l'enseignement a été une réussite, mais se limite au primaire, les lycéens ne représentent que 2 à 3 % d'une classe d'âge.
- L'idéologie dominante : le positivisme, doctrine philosophique d'Auguste Comte (1798-1857), met en avant la science comme moteur du progrès de l'humanité. Elle influence profondément les fondateurs de la troisième République.
- Les mathématiciens : Poincaré, Darboux, Appell, Tannery, Lebesgue, y jouent un grand rôle.

Les principes retenus pour l'enseignement des sciences

- Extraits d'une conférence (janvier 1904) de Louis Liard (1846-1917), philosophe, directeur des enseignements supérieurs.

Les principes retenus pour l'enseignement des sciences

- Extraits d'une conférence (janvier 1904) de Louis Liard (1846-1917), philosophe, directeur des enseignements supérieurs.
- *Dans l'enseignement secondaire, les études scientifiques doivent, comme les autres, contribuer à la formation de l'homme. Elles sont donc, elles aussi, à leur façon, des "humanités", au sens large du mot, les "humanités scientifiques".*

Liard : sur la mémoire

... l'enseignement des sciences doit surtout faire appel aux facultés actives des esprits, à celles-là mêmes par lesquelles se fait la construction des sciences. La mémoire y joue sans doute un rôle, mais non le principal. Ce qu'il s'agit de former c'est la vision exacte des choses, le discernement du réel et de l'irréel, du vrai et du faux, le sentiment de la certitude et la justesse du raisonnement. ... Rien de plus contraire au véritable enseignement scientifique que de verser dans des esprits passifs, soit par le livre, soit même par la parole, une masse d'abstractions et de faits à apprendre par cœur. ... Ce qu'il faut, au contraire, c'est susciter la spontanéité de l'élève, mettre en jeu ses activités mentales, provoquer son effort personnel, en un mot le rendre capable d'agir.

Liard : sur la méthode

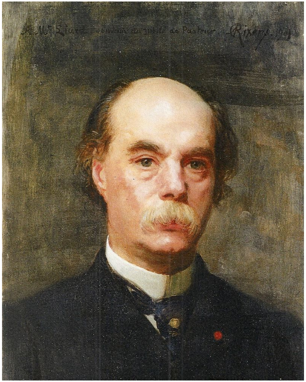
La vieille formule du philosophe est toujours vraie, "savoir, c'est faire". ... le vrai profit n'est pas ce que l'élève peut reproduire, mais ce qu'il peut produire.

Alors, qui nous empêche, dans ces classes, de tout faire pour amener progressivement l'élève à juger personnellement des choses, à discerner les vérités par lui-même et non sur l'autorité de celui qui les énonce, livre ou professeur ? L'idéal serait que, dirigé par le maître, il trouvât tout ce qu'il doit savoir. Assurément, c'est impossible. Il n'y a pas un Pascal latent en chacun de nos écoliers. Mais sans viser à l'impossible, croyez-vous que la méthode, qui est bien vieille, puisque c'était déjà celle de Socrate, ne puisse, appliquée avec discernement, donner de bons effets ?

Liard : sur l'équilibre

... Mais ce qui est à sa place dans l'enseignement supérieur ne l'est pas dans l'enseignement secondaire. Or on m'assure que là, sous l'influence des plus hautes spéculations, il s'est introduit, depuis quelques années, des façons qui ne seraient pas sans péril. Ne perdons pas de vue que, dans nos classes, il s'agit de former, non des candidats à la section de géométrie de l'Académie des sciences, mais des esprits clairs, voyant juste, raisonnant juste.

Louis Liard et Henri Poincaré



Proche de Liard, Poincaré sur l'intégrale

Pour définir une intégrale, nous prenons toutes sortes de précautions ; nous distinguons les fonctions continues et celles qui sont discontinues, celles qui ont des dérivées et celles qui n'en ont pas. Tout cela est à sa place dans l'enseignement des Facultés ; tout cela serait détestable dans les lycées. L'élève, quelque définition que vous lui donniez, ne saura jamais ce qu'est une intégrale si on ne lui en a d'abord montré. Il croit savoir ce qu'est une surface et il ne comprendra qu'il ne le sait pas que quand il saura très bien le calcul intégral.

Le point de vue de Poincaré (suite)

Ce n'est donc pas au moment où il aborde ce calcul qu'il peut y avoir intérêt à le lui dire. Alors ce qui reste à faire est bien simple : définir l'intégrale comme l'aire comprise entre l'axe des x, deux ordonnées (sic) *et la courbe, montrer que quand l'une des ordonnées se déplace, la dérivée de cette aire est précisément l'ordonnée elle-même. C'est le raisonnement de Newton, c'est comme cela que le calcul intégral est né, et bon gré mal gré il faut repasser par où nos pères ont passé.*

Le programme de 1902

- La nouveauté principale du programme est l'introduction de la dérivée, avec le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.

Le programme de 1902

- La nouveauté principale du programme est l'introduction de la dérivée, avec le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.
- S'agissant des intégrales ou des primitives le programme (de terminale) est particulièrement succinct :
  Dérivée de l'aire d'une courbe regardée comme une fonction de l'abscisse (on admettra la notion d'aire).

Le programme de 1902

- La nouveauté principale du programme est l'introduction de la dérivée, avec le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.
- S'agissant des intégrales ou des primitives le programme (de terminale) est particulièrement succinct :
  Dérivée de l'aire d'une courbe regardée comme une fonction de l'abscisse (on admettra la notion d'aire).
- L'examen des problèmes de baccalauréat montre que l'intégration reste marginale dans les programmes.

Un exemple de manuel

- Il s'agit du *Cours d'algèbre élémentaire* de 1910, dont l'auteur est un religieux, le Frère Georges-Marie.

Un exemple de manuel

- Il s'agit du *Cours d'algèbre élémentaire* de 1910, dont l'auteur est un religieux, le Frère Georges-Marie.
- La démonstration du fait que la fonction est la dérivée de l'aire sous la courbe (ce que demandait explicitement Poincaré) est donnée ici (voir page suivante). Elle s'appuie sur une connaissance empirique de la notion d'aire et de ses propriétés (pas toujours explicitées).

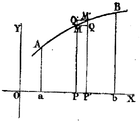
Un exemple de manuel

- Il s'agit du *Cours d'algèbre élémentaire* de 1910, dont l'auteur est un religieux, le Frère Georges-Marie.
- La démonstration du fait que la fonction est la dérivée de l'aire sous la courbe (ce que demandait explicitement Poincaré) est donnée ici (voir page suivante). Elle s'appuie sur une connaissance empirique de la notion d'aire et de ses propriétés (pas toujours explicitées).
- Voir aussi l'excellent *Précis d'algèbre* de F. Brachet et J. Dumarqué de 1930.

496. Théorème. *Soit* $y = f(x)$ *une fonction de* x *qui reste finie et continue, lorsque* x *varie de* a *à* b; *il y a toujours une fonction finie et continue de* x *qui admet* $f(x)$ *pour dérivée dans tout le même intervalle* a *à* b.

Soit AMB l'arc de courbe représentant la fonction donnée $f(x)$,

lorsque x croît de a à b; soient $OP = x$ une valeur de x comprise entre $Oa = a$, $Ob = b$ et $PM = y$ la valeur correspondante de la fonction.



L'aire $AaPM = S$ est une fonction de x, car si l'on donne à x l'accroissement $PP' = h$, cette aire varie avec x; elle s'accroît, par exemple, de l'aire MPP'M'.

L'accroissement de cette aire est compris entre les rectangles MPP'Q et M'P'PQ', c'est-à-dire est compris entre les produits

$$MP.PP' \text{ et } M'P'.PP'.$$

On a donc : $\quad MP.PP' < \text{aire } MPP'M' < M'P'.PP',$

ou
$$MP < \frac{\text{aire } MPP'M'}{PP'} < M'P'.$$

Les côtés MP et M'P' de ces rectangles restent finis par hypothèse, puisque ce sont les ordonnées de la courbe; si l'on fait tendre h vers zéro, la dimension commune PP' de ces rectangles tend vers zéro; l'accroissement d'aire tend donc aussi vers zéro avec h.

La limite du rapport $\dfrac{\text{aire } MPP'M'}{PP'}$ est donc égale à MP, c'est-à-dire à $f(x)$; d'ailleurs, la limite de ce rapport est aussi égale à la dérivée de la fonction S par rapport à x; on a donc pour chaque valeur de x
$$S' = f(x).$$

La surface $AaPM = S$ est donc une fonction de x admettant pour dérivée la fonction $f(x)$.

FIGURE – Le manuel

La période intermédiaire

1902-1972

Les programmes de 1945

- Pour l'essentiel, en analyse, le programme de 1902 reste en vigueur jusqu'aux années 1960, en dépit des projets de réforme du régime de Vichy. En particulier, les programmes de 1945 n'y changent rien (en revanche ils apportent plus de nouveautés en géométrie).

Les programmes de 1945

- Pour l'essentiel, en analyse, le programme de 1902 reste en vigueur jusqu'aux années 1960, en dépit des projets de réforme du régime de Vichy. En particulier, les programmes de 1945 n'y changent rien (en revanche ils apportent plus de nouveautés en géométrie).
- Un exemple de manuel : Lespinard et Pernet, 1947, page suivante.

propriété non triviale, une exigence est posée : "si le rapport $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tend vers une limite bien déterminée. La continuité de f est cette fois citée pour justifier : "quand $\Delta x \to 0$, $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$". S'il y a bien dans cette dernière expression la preuve d'une cohabitation des deux traditions du concept de limite, la démarche déductive est plus rigoureuse qu'en 1902. La démonstration des théorèmes sur la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, est réalisée comme en 1902/1905 par des procédés intuitifs, sans utiliser le ε, α. Donc s'il y a bien évolution, celle-ci demeure mesurée.

§ 3 Calcul intégral 1947

(document 3) Extraits du manuel "Lespinard et Pernet". Les auteurs donnent au § 336, non reproduit ici, une définition classique de la notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle E, puis démontrent que si F est une primitive de f alors celle-ci en admet une infinité définie par G(x) = F(x)+C. Puis ensuite le tableau des primitives des fonctions usuelles au §337 est suivi de l'application des primitives au calcul d'aires au § 338. Nous portons notre attention sur ce concept qui sera suivi tout au long du siècle.

Le paragraphe 338 commence ainsi : ***"Soit y = f(x) une fonction définie et continue dans l'intervalle E et dont nous connaissons une primitive continue F(x). Nous désignerons par (C) la courbe représentative de la fonction dans l'intervalle (a,b)".***

sentative en A et B, l'axe Ox en α et β. Proposons-nous de calculer l'aire comprise entre l'arc de courbe, Ox et les deux droites αA, βB.

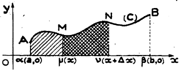


Fig. 112

Soit x une valeur de la variable comprise dans l'intervalle, à laquelle correspond le point M de la courbe, projeté en μ sur Ox. A chaque valeur de x correspond une aire pour le trapèze mixtiligne $\alpha AM\mu$ (nous l'appelons mixtiligne car l'un des côtés du trapèze est remplacé par l'arc de courbe (C) : AM). Cette aire est une fonction croissante de x. Représentons-la par $S(x)$. Cherchons si cette fonction admet une dérivée. Désignons maintenant par x_0 l'abscisse fixe du point M et donnons à x l'accroissement Δx. Soit N le point correspondant sur la courbe, projeté en ν sur l'axe Ox. L'accroissement correspondant de la fonction $S(x)$, représenté par ΔS, a pour " valeur absolue " l'aire du trapèze mixtiligne $\mu MN\nu$ représenté séparément sur la figure 113 (il ne faut pas oublier que Δx étant un nombre algébrique, ΔS est aussi un nombre algébrique). La fonction étant continue dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \Delta x)$ passe nécessairement par un minimum absolu

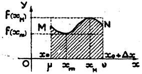


Fig. 113

Évolution dans les années 1960

- Sous l'influence des mathématiciens (notamment Choquet), l'Université a fait sa révolution culturelle dans les années 1950, avec l'apparition du vocabulaire de la théorie des ensembles, de la topologie, de l'algèbre, etc. et une intense réflexion sur l'enseignement des mathématiques se développe (CIEAEM, APM, commission Lichnérowicz, etc.)

Évolution dans les années 1960

- Sous l'influence des mathématiciens (notamment Choquet), l'Université a fait sa révolution culturelle dans les années 1950, avec l'apparition du vocabulaire de la théorie des ensembles, de la topologie, de l'algèbre, etc. et une intense réflexion sur l'enseignement des mathématiques se développe (CIEAEM, APM, commission Lichnérowicz, etc.)
- Au lycée, outre l'apparition du vocabulaire ensembliste, on note un net renforcement de l'analyse (le mot apparaît pour la première fois) : théorème de Rolle (admis), accroissements finis, fonctions logarithme (vue comme primitive de $1/x$) et exponentielle, quelques équations différentielles.

Évolution dans les années 1960

- Sous l'influence des mathématiciens (notamment Choquet), l'Université a fait sa révolution culturelle dans les années 1950, avec l'apparition du vocabulaire de la théorie des ensembles, de la topologie, de l'algèbre, etc. et une intense réflexion sur l'enseignement des mathématiques se développe (CIEAEM, APM, commission Lichnérowicz, etc.)
- Au lycée, outre l'apparition du vocabulaire ensembliste, on note un net renforcement de l'analyse (le mot apparaît pour la première fois) : théorème de Rolle (admis), accroissements finis, fonctions logarithme (vue comme primitive de $1/x$) et exponentielle, quelques équations différentielles.
- Les définitions de limites avec ϵ, η apparaissent dans certains manuels.

Les années 1960 : l'intégrale

- Sur l'intégrale, le programme, après avoir précisé qu'aucune difficulté ne sera soulevée au sujet des notions d'aire et de volume, reste essentiellement le même :

Les années 1960 : l'intégrale

- Sur l'intégrale, le programme, après avoir précisé qu'aucune difficulté ne sera soulevée au sujet des notions d'aire et de volume, reste essentiellement le même :
- *Aire d'un domaine plan limité par un arc de la courbe représentative d'une fonction $f(x)$ continue (on pourra se limiter au cas d'une fonction monotone), positive ou nulle, par l'axe des abscisses, et par deux "ordonnées", l'une fixe, l'autre variable (abscisse x) ; cette aire représente une primitive de la fonction donnée.*

La réforme

des mathématiques modernes

Les contextes

- Le contexte philosophique : le structuralisme, courant de pensée né au milieu du XX-ième siècle (en linguistique), privilégie la notion de structure. Son principal représentant est Claude Lévi-Strauss. En mathématiques, il est représenté par le groupe Bourbaki qui est alors à son apogée.

Les contextes

- Le contexte philosophique : le structuralisme, courant de pensée né au milieu du XX-ième siècle (en linguistique), privilégie la notion de structure. Son principal représentant est Claude Lévi-Strauss. En mathématiques, il est représenté par le groupe Bourbaki qui est alors à son apogée.
- Le contexte politique : le gaullisme et mai 68.

Les contextes

- Le contexte philosophique : le structuralisme, courant de pensée né au milieu du XX-ième siècle (en linguistique), privilégie la notion de structure. Son principal représentant est Claude Lévi-Strauss. En mathématiques, il est représenté par le groupe Bourbaki qui est alors à son apogée.
- Le contexte politique : le gaullisme et mai 68.
- Le contexte de la noosphère (l'APM, la commission Lichnérowicz, la création des IREM, etc.).

Les mathématiques modernes comme vecteur de la démocratisation ?

- *Pour certains collègues amants des belles mathématiques, c'est la rénovation des contenus qui primait. Alors que pour d'autres, la recherche didactique s'amorçait et ils y voyaient un moyen de diminuer l'échec scolaire. Pour d'autres avec lesquels je me sentais en accord, la rénovation des programmes paraissait une occasion à saisir pour mettre en cause les méthodes anciennes et développer ce qu'on appelait les méthodes actives.*

Les mathématiques modernes comme vecteur de la démocratisation ?

- *Pour certains collègues amants des belles mathématiques, c'est la rénovation des contenus qui primait. Alors que pour d'autres, la recherche didactique s'amorçait et ils y voyaient un moyen de diminuer l'échec scolaire. Pour d'autres avec lesquels je me sentais en accord, la rénovation des programmes paraissait une occasion à saisir pour mettre en cause les méthodes anciennes et développer ce qu'on appelait les méthodes actives.*
- Gilbert Walusinski, Bull. APMEP 353 d'avril 1986.

Les prémisses

- La réforme des maths modernes se veut une réaction à une approche trop intuitive des mathématiques.

Les prémisses

- La réforme des maths modernes se veut une réaction à une approche trop intuitive des mathématiques.
- Un souvenir d'André Revuz.

Les prémisses

- La réforme des maths modernes se veut une réaction à une approche trop intuitive des mathématiques.
- Un souvenir d'André Revuz.
- Les modifications des programmes sont considérables, plus encore en géométrie qu'en analyse.

Les prémisses

- La réforme des maths modernes se veut une réaction à une approche trop intuitive des mathématiques.
- Un souvenir d'André Revuz.
- Les modifications des programmes sont considérables, plus encore en géométrie qu'en analyse.
- L'objectif sous-jacent est de fonder les mathématiques sur la théorie des ensembles : on construit $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, etc.

Les prémisses

- La réforme des maths modernes se veut une réaction à une approche trop intuitive des mathématiques.
- Un souvenir d'André Revuz.
- Les modifications des programmes sont considérables, plus encore en géométrie qu'en analyse.
- L'objectif sous-jacent est de fonder les mathématiques sur la théorie des ensembles : on construit $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, etc.
- En analyse comme en géométrie il n'est pas question d'admettre tout un pan de connaissances (la géométrie d'Euclide, la notion d'aire).

Les programmes d'analyse de terminale C en 1972

- Le programme est très ambitieux.

Les programmes d'analyse de terminale C en 1972

- Le programme est très ambitieux.
- Les réels sont définis de manière axiomatique avec l'axiome de la borne supérieure.

Les programmes d'analyse de terminale C en 1972

- Le programme est très ambitieux.
- Les réels sont définis de manière axiomatique avec l'axiome de la borne supérieure.
- Dans certaines classes on en donne même une construction (souvent par les suites de Cauchy !).

Les programmes de terminale C en 1972 : le calcul intégral

- Définition des sommes de Riemann. Existence de l'intégrale pour une fonction monotone (admise pour les fonctions continues). Primitives.

Les programmes de terminale C en 1972 : le calcul intégral

- Définition des sommes de Riemann. Existence de l'intégrale pour une fonction monotone (admise pour les fonctions continues). Primitives.
- Énoncé des propriétés (admises) des aires.

Les programmes de terminale C en 1972 : le calcul intégral

- Définition des sommes de Riemann. Existence de l'intégrale pour une fonction monotone (admise pour les fonctions continues). Primitives.
- Énoncé des propriétés (admises) des aires.
- Applications géométriques, mécaniques, physiques (volumes, masses, moments d'inertie, vitesse et distance parcourue, intensité, puissance, valeur efficace ...).

Extraits de manuels

- Le livre de terminale C de la collection Queysanne-Revuz :

Extraits de manuels

- Le livre de terminale C de la collection Queysanne-Revuz :
- On définit les fonctions en escalier et leur intégrale.

Extraits de manuels

- Le livre de terminale C de la collection Queysanne-Revuz :
- On définit les fonctions en escalier et leur intégrale.
- Puis on définit une fonction Riemann-intégrable en l'encadrant par des fonctions en escalier et en demandant que la borne supérieure des intégrales minorantes soit égale à la borne inférieure de intégrales majorantes.

Extraits de manuels

- Le livre de terminale C de la collection Queysanne-Revuz :
- On définit les fonctions en escalier et leur intégrale.
- Puis on définit une fonction Riemann-intégrable en l'encadrant par des fonctions en escalier et en demandant que la borne supérieure des intégrales minorantes soit égale à la borne inférieure de intégrales majorantes.
- L'intégrabilité des fonctions monotones est prouvée, celle des fonctions continues admise.

Extraits de manuels

- Le livre de terminale C de la collection Queysanne-Revuz :
- On définit les fonctions en escalier et leur intégrale.
- Puis on définit une fonction Riemann-intégrable en l'encadrant par des fonctions en escalier et en demandant que la borne supérieure des intégrales minorantes soit égale à la borne inférieure de intégrales majorantes.
- L'intégrabilité des fonctions monotones est prouvée, celle des fonctions continues admise.
- On définit ensuite les primitives et on montre le lien avec l'intégrale pour une fonction continue.

Extraits de manuels

- Le livre de terminale C de la collection Queysanne-Revuz :
- On définit les fonctions en escalier et leur intégrale.
- Puis on définit une fonction Riemann-intégrable en l'encadrant par des fonctions en escalier et en demandant que la borne supérieure des intégrales minorantes soit égale à la borne inférieure de intégrales majorantes.
- L'intégrabilité des fonctions monotones est prouvée, celle des fonctions continues admise.
- On définit ensuite les primitives et on montre le lien avec l'intégrale pour une fonction continue.
- L'aire n'arrive qu'au bout de 27 pages !

Discussion

La question qui se pose, par rapport à ce programme (par ailleurs trop ambitieux sans doute) est celle de la nécessité de l'intégrale de Riemann. Nous y reviendrons à propos du programme de 2002.

La contre-réforme des années 1980

Les raisons de la colère

- Un échec global de la réforme (plus encore sur la partie géométrie que sur la partie analyse), donnant l'impression d'une formalisation excessive par rapport au contenu.

Les raisons de la colère

- Un échec global de la réforme (plus encore sur la partie géométrie que sur la partie analyse), donnant l'impression d'une formalisation excessive par rapport au contenu.
- Les protestations des utilisateurs de mathématiques.

Les raisons de la colère

- Un échec global de la réforme (plus encore sur la partie géométrie que sur la partie analyse), donnant l'impression d'une formalisation excessive par rapport au contenu.
- Les protestations des utilisateurs de mathématiques.
- Une nouvelle position idéologique : le constructivisme, issu des travaux de Piaget sur l'apprentissage et sa traduction scolaire : *l'élève au centre du système éducatif*.

Les raisons de la colère

- Un échec global de la réforme (plus encore sur la partie géométrie que sur la partie analyse), donnant l'impression d'une formalisation excessive par rapport au contenu.
- Les protestations des utilisateurs de mathématiques.
- Une nouvelle position idéologique : le constructivisme, issu des travaux de Piaget sur l'apprentissage et sa traduction scolaire : *l'élève au centre du système éducatif*.
- Le rôle que commencent à jouer les outils de calcul et notamment les calculatrices.

Les raisons de la colère

- Un échec global de la réforme (plus encore sur la partie géométrie que sur la partie analyse), donnant l'impression d'une formalisation excessive par rapport au contenu.
- Les protestations des utilisateurs de mathématiques.
- Une nouvelle position idéologique : le constructivisme, issu des travaux de Piaget sur l'apprentissage et sa traduction scolaire : *l'élève au centre du système éducatif*.
- Le rôle que commencent à jouer les outils de calcul et notamment les calculatrices.
- Une implication forte des IREM dans la réflexion sur les programmes (avec notamment Jean-Louis Ovaert).

Le cadre de l'analyse

- On bat en retraite sur l'usage des définitions en ϵ, η pour préférer une approche par les "fonctions de référence" et recentrer l'analyse sur ses fondements : majorer, minorer, encadrer.

Le cadre de l'analyse

- On bat en retraite sur l'usage des définitions en ϵ, η pour préférer une approche par les "fonctions de référence" et recentrer l'analyse sur ses fondements : majorer, minorer, encadrer.
- Une conséquence de ce choix est le rôle important que joue l'inégalité des accroissements finis.

Le cadre de l'analyse

- On bat en retraite sur l'usage des définitions en ϵ, η pour préférer une approche par les "fonctions de référence" et recentrer l'analyse sur ses fondements : majorer, minorer, encadrer.
- Une conséquence de ce choix est le rôle important que joue l'inégalité des accroissements finis.
- Un exercice devient incontournable, notamment au Bac : l'étude des suites récurrentes en encadrant la distance au point fixe grâce à cette inégalité.

L'intégrale

- Le retour de balancier est particulièrement brutal : l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est définie comme la différence des valeurs $F(b) - F(a)$ d'une primitive F de f.

L'intégrale

- Le retour de balancier est particulièrement brutal : l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est définie comme la différence des valeurs $F(b) - F(a)$ d'une primitive F de f.
- L'avantage de cette définition est qu'on démontre facilement les propriétés de linéarité, positivité, moyenne, etc.

L'intégrale (suite)

- Le défaut principal est la déconnection avec la notion d'aire. Les auteurs en sont conscients :
  Il a toujours été malaisé de présenter en Terminale l'intégration ; en effet, à ce niveau, par souci des techniques de calcul, le concept de primitive prédomine sur celui d'intégrale. Il a donc paru plus efficace et plus court de rattacher la définition de l'intégrale d'une fonction continue aux primitives de cette fonction ; il va de soi que cette définition d'aura rien d'abrupt, elle peut être précédée d'une sensibilisation au moyen de la notion d'aire.

L'intégrale (suite)

- Le défaut principal est la déconnection avec la notion d'aire. Les auteurs en sont conscients :
  Il a toujours été malaisé de présenter en Terminale l'intégration ; en effet, à ce niveau, par souci des techniques de calcul, le concept de primitive prédomine sur celui d'intégrale. Il a donc paru plus efficace et plus court de rattacher la définition de l'intégrale d'une fonction continue aux primitives de cette fonction ; il va de soi que cette définition d'aura rien d'abrupt, elle peut être précédée d'une sensibilisation au moyen de la notion d'aire.
- Un exemple emblématique de manuel, le Terracher : il montre en activités préliminaires que l'aire est une primitive, mais se conforme au programme pour donner la définition.

Le programme 2002

ou le cul entre deux chaises

Les changements du programme d'analyse

- On notera en particulier :

Les changements du programme d'analyse

- On notera en particulier :
- La disparition de l'inégalité des accroissements finis (et de la plupart des exercices sur les suites récurrentes).

Les changements du programme d'analyse

- On notera en particulier :
- La disparition de l'inégalité des accroissements finis (et de la plupart des exercices sur les suites récurrentes).
- L'introduction de l'exponentielle *via* l'équation différentielle et, plus généralement, un accent mis sur les équations différentielles, avec un remarquable document d'accompagnement sur la datation.

Le changement de point de vue sur les intégrales

- La définition précédente par les primitives perdait tout l'aspect géométrique de l'intégrale.

Le changement de point de vue sur les intégrales

- La définition précédente par les primitives perdait tout l'aspect géométrique de l'intégrale.
- On revient donc à une définition par l'aire.

Le changement de point de vue sur les intégrales

- La définition précédente par les primitives perdait tout l'aspect géométrique de l'intégrale.
- On revient donc à une définition par l'aire.
- Mais cette introduction est tout de suite tempérée par une sorte de remords :
  On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.

Le changement de point de vue sur les intégrales

- La définition précédente par les primitives perdait tout l'aspect géométrique de l'intégrale.
- On revient donc à une définition par l'aire.
- Mais cette introduction est tout de suite tempérée par une sorte de remords :
  On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.
- Une résurgence des sommes de Riemann ?

Les raisons du changement de point de vue sur les intégrales (suite)

- Et, plus loin :
  Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions : tout développement théorique est exclu.

Les raisons du changement de point de vue sur les intégrales (suite)

- Et, plus loin :
  Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions : tout développement théorique est exclu.
- On sent ici la nostalgie du bon temps des maths modernes où l'on construisait tous les objets.

Les primitives ou le retour du balancier

- Le programme précédent définissait l'intégrale avec les primitives, ce qui est très discutable, mais ici elles sont reléguées à la fin, après les propriétés (linéarité, Chasles, etc.) qui sont toutes admises et dont il est difficile de donner une démonstration (notamment pour la linéarité).

Les primitives ou le retour du balancier

- Le programme précédent définissait l'intégrale avec les primitives, ce qui est très discutable, mais ici elles sont reléguées à la fin, après les propriétés (linéarité, Chasles, etc.) qui sont toutes admises et dont il est difficile de donner une démonstration (notamment pour la linéarité).
- De plus, sans les primitives, il est difficile de donner une définition consistante de l'intégrale dans le cas des fonctions qui ne sont pas de signe constant.

Les primitives ou le retour du balancier

- Le programme précédent définissait l'intégrale avec les primitives, ce qui est très discutable, mais ici elles sont reléguées à la fin, après les propriétés (linéarité, Chasles, etc.) qui sont toutes admises et dont il est difficile de donner une démonstration (notamment pour la linéarité).
- De plus, sans les primitives, il est difficile de donner une définition consistante de l'intégrale dans le cas des fonctions qui ne sont pas de signe constant.
- En résumé : un coup à gauche, un coup à droite ...

Discussion sur les sommes de Riemann

- Revenons sur la question de la nécessité des sommes de Riemann, omniprésentes en 1970 et, dans une moindre mesure, en 2002. Voici quelques justifications couramment avancées :

Discussion sur les sommes de Riemann

- Revenons sur la question de la nécessité des sommes de Riemann, omniprésentes en 1970 et, dans une moindre mesure, en 2002. Voici quelques justifications couramment avancées :
- Elles permettent de définir l'aire ou l'intégrale et de montrer leur existence.

Discussion sur les sommes de Riemann

- Revenons sur la question de la nécessité des sommes de Riemann, omniprésentes en 1970 et, dans une moindre mesure, en 2002. Voici quelques justifications couramment avancées :
- Elles permettent de définir l'aire ou l'intégrale et de montrer leur existence.
- Elles permettent de les calculer.

Discussion sur les sommes de Riemann

- Revenons sur la question de la nécessité des sommes de Riemann, omniprésentes en 1970 et, dans une moindre mesure, en 2002. Voici quelques justifications couramment avancées :
- Elles permettent de définir l'aire ou l'intégrale et de montrer leur existence.
- Elles permettent de les calculer.
- Elles permettent de les approcher.

Discussion sur les sommes de Riemann

- Revenons sur la question de la nécessité des sommes de Riemann, omniprésentes en 1970 et, dans une moindre mesure, en 2002. Voici quelques justifications couramment avancées :
- Elles permettent de définir l'aire ou l'intégrale et de montrer leur existence.
- Elles permettent de les calculer.
- Elles permettent de les approcher.
- Elles permettent de modéliser des situations physiques.

Définir l'aire, un exemple de dérive : l'article de Sophie Dupuy-Touzet et Pierre Lopez

- Le calcul intégral n'est pas un calcul d'aires ... mais il doit le devenir (Bull. APMEP 463, 2006)

Définir l'aire, un exemple de dérive : l'article de Sophie Dupuy-Touzet et Pierre Lopez

- Le calcul intégral n'est pas un calcul d'aires ... mais il doit le devenir (Bull. APMEP 463, 2006)
- *Les élèves n'envisagent pas qu'une surface n'ait pas d'aire ... les élèves ne peuvent pas comprendre nos préoccupations théoriques concernant la notion d'aire.*

Définir l'aire, un exemple de dérive : l'article de Sophie Dupuy-Touzet et Pierre Lopez

- Le calcul intégral n'est pas un calcul d'aires ... mais il doit le devenir (Bull. APMEP 463, 2006)
- *Les élèves n'envisagent pas qu'une surface n'ait pas d'aire ... les élèves ne peuvent pas comprendre nos préoccupations théoriques concernant la notion d'aire.*
- *Or (est-il besoin de le rappeler), le calcul intégral ... montre (et on pourrait rajouter "surtout") que l'on peut définir l'aire de ces surfaces.*

Un exemple de dérive : l'article de Dupuy et Lopez (suite)

- *Le calcul intégral n'est pas un calcul d'aire parce que sans le calcul intégral, les aires n'existent pas. ... C'est le calcul intégral qui va permettre de parler de la notion d'aire. ... Le calcul intégral devient un calcul d'aire car on dira que "l'aire sous la courbe" est définie par l'intégrale de la fonction ...*

Un exemple de dérive : l'article de Dupuy et Lopez (suite)

- *Le calcul intégral n'est pas un calcul d'aire parce que sans le calcul intégral, les aires n'existent pas. ... C'est le calcul intégral qui va permettre de parler de la notion d'aire. ... Le calcul intégral devient un calcul d'aire car on dira que "l'aire sous la courbe" est définie par l'intégrale de la fonction ...*
- *... nous ne ferons pas l'injure aux rédacteurs* [des programmes] *de penser que, quand ils disent que l'intégrale est l'aire sous la courbe, ils ignorent que cette aire est une notion intuitive ...*

Avec les sommes de Riemann : de quoi j'ai l'aire ?

- Encore un exemple de *fake news* : les sommes de Riemann définiraient l'aire.

Avec les sommes de Riemann : de quoi j'ai l'aire ?

- Encore un exemple de *fake news* : les sommes de Riemann définiraient l'aire.
- Voir le livre de Lebesgue *La mesure des grandeurs*.

Avec les sommes de Riemann : de quoi j'ai l'aire ?

- Encore un exemple de *fake news* : les sommes de Riemann définiraient l'aire.
- Voir le livre de Lebesgue *La mesure des grandeurs*.
- Définition axiomatique *versus* construction ?

Avec les sommes de Riemann : de quoi j'ai l'aire ?

- Encore un exemple de *fake news* : les sommes de Riemann définiraient l'aire.
- Voir le livre de Lebesgue *La mesure des grandeurs*.
- Définition axiomatique *versus* construction ?
- Une idée importante pour l'enseignement des mathématiques : l'usage **d'axiomes intermédiaires**.

Pour une fois que je suis d'accord avec Dieudonné ...

Mais il convient ici comme ailleurs de débarrasser l'enseignement de la superstition consistant à vouloir à n'importe quel prix tout rattacher à une source axiomatique unique. Les mathématiciens professionnels ont de bonnes raisons de tenir à ce qu'il en soit ainsi, mais ces raisons ne concernent qu'eux ; ce qui est par contre d'une importance universelle, c'est de savoir faire des déductions logiques correctes à partir de prémisses qui n'ont pas besoin d'être nécessairement sanctifiées par un arbre généalogique remontant à la Théorie des ensembles !

Discussion sur les sommes de Riemann : le calcul ?

- Rappelons le programme de 2002 :

Discussion sur les sommes de Riemann : le calcul ?

- Rappelons le programme de 2002 :
- *Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.*

Discussion sur les sommes de Riemann : le calcul ?

- Rappelons le programme de 2002 :
- *Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.*
- Le principe du calcul*.

Discussion sur les sommes de Riemann : le calcul ?

- Rappelons le programme de 2002 :
- *Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.*
- Le principe du calcul*.
- Il s'agit de calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Discussion sur les sommes de Riemann : le calcul ?

- Rappelons le programme de 2002 :
- *Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.*
- Le principe du calcul*.
- Il s'agit de calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
- Cette procédure est celle qu'utilisait Archimède, non pas pour le calcul de l'aire du segment de parabole, mais pour celle de la spirale*. Il divise* l'aire en n parties en divisant l'angle et encadre les morceaux entre des secteurs circulaires dont la somme des aires se calcule avec S_n.

Archimède et la somme des carrés

- *Si des lignes en nombre quelconque, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, sont disposées les unes à la suite des autres, l'excédent étant d'ailleurs égal à la plus petite ; et si on dispose un même nombre d'autres lignes, dont chacune est aussi grande que la plus grande des premières, les carrés des lignes égales à la plus grande, ajoutés au carré de la plus grande ainsi qu'au rectangle délimité sous la plus petite et sous une ligne égale à la somme de celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, valent le triple des carrés de toutes les lignes se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur.*

Archimède et la somme des carrés

- *Si des lignes en nombre quelconque, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, sont disposées les unes à la suite des autres, l'excédent étant d'ailleurs égal à la plus petite ; et si on dispose un même nombre d'autres lignes, dont chacune est aussi grande que la plus grande des premières, les carrés des lignes égales à la plus grande, ajoutés au carré de la plus grande ainsi qu'au rectangle délimité sous la plus petite et sous une ligne égale à la somme de celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, valent le triple des carrés de toutes les lignes se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur.*
- $n \times n^2 + n^2 + (1 + 2 + \cdots + n) = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) := 3S_n$

Archimède (suite)

- On cherche à montrer
$(n+1)\times n^2+(1+2+\cdots+n)=3(1^2+2^2+\cdots+n^2):=3S_n.$

Archimède (suite)

- On cherche à montrer $(n+1)\times n^2+(1+2+\cdots+n) = 3(1^2+2^2+\cdots+n^2) := 3S_n$.
- On écrit $n^2=(n-k)^2+k^2+2k(n-k)$ d'où

$$(n+1)\,n^2 = 2S_n + 2\sum_{k=0}^{n} k(n-k).$$

Archimède (suite)

- On cherche à montrer $(n+1)\times n^2+(1+2+\cdots+n)=3(1^2+2^2+\cdots+n^2):=3S_n$.
- On écrit $n^2=(n-k)^2+k^2+2k(n-k)$ d'où

$$(n+1)\,n^2=2S_n+2\sum_{k=0}^{n}k(n-k).$$

- On ajoute $1+2+\cdots+n=\sum_{k=0}^{n}(n-k)$ et il reste à voir :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n-k).$$

Archimède (suite)

- On cherche à montrer
$(n+1) \times n^2 + (1+2+\cdots+n) = 3(1^2+2^2+\cdots+n^2) := 3S_n$.
- On écrit $n^2 = (n-k)^2 + k^2 + 2k(n-k)$ d'où

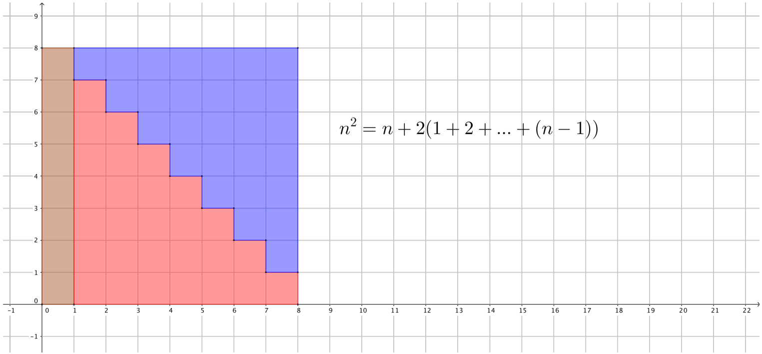
$$(n+1)\,n^2 = 2S_n + 2\sum_{k=0}^{n} k(n-k).$$

- On ajoute $1+2+\cdots+n = \sum_{k=0}^{n}(n-k)$ et il reste à voir :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n-k).$$

- On note pour cela la formule
$n^2 = n + 2(1+2+\cdots+(n-1))$.

Explication de la formule



$$n^2 = n + 2(1 + 2 + \ldots + (n-1))$$

Archimède (suite)

- On a donc la suite de formules :

$$n^2 = n + 2 \times (1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1))$$
$$(n-1)^2 = (n-1) + 2 \times (1 + 2 + \cdots + (n-2))$$
$$(n-2)^2 = (n-2) + 2 \times (1 + 2 + \cdots + (n-3))$$
$$\ldots.$$
$$2^2 = 2 + 2 \times (1)$$
$$1^2 = 1 + 2 \times (0).$$

Archimède (suite)

- On a donc la suite de formules :
  $n^2 = n + 2 \times (1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1))$
  $(n-1)^2 = (n-1) + 2 \times (1 + 2 + \cdots + (n-2))$
  $(n-2)^2 = (n-2) + 2 \times (1 + 2 + \cdots + (n-3))$
  ....
  $2^2 = 2 + 2 \times (1)$
  $1^2 = 1 + 2 \times (0)$.
- En sommant, on trouve que la somme des carrés vaut une fois n, plus 3 fois $n-1$, etc. soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)(n-k)$.

La quadrature de la spirale par les primitives

- La version du physicien* : $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}a^2\theta^2 d\theta$. L'aire est alors la "somme" $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^2\theta^2 d\theta$ que le physicien calcule avec une primitive (?).

La quadrature de la spirale par les primitives

- La version du physicien* : $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}a^2\theta^2 d\theta$. L'aire est alors la "somme" $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^2\theta^2 d\theta$ que le physicien calcule avec une primitive (?).
- Adaptation mathématique : on introduit la fonction $\mathcal{A}(\theta)$, aire jusqu'à θ et on prouve la formule* $\mathcal{A}'(\theta) = \frac{1}{2}a^2\theta^2$.

La quadrature de la spirale par les primitives

- La version du physicien* : $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}a^2\theta^2 d\theta$. L'aire est alors la "somme" $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^2\theta^2 d\theta$ que le physicien calcule avec une primitive (?).
- Adaptation mathématique : on introduit la fonction $\mathcal{A}(\theta)$, aire jusqu'à θ et on prouve la formule* $\mathcal{A}'(\theta) = \frac{1}{2}a^2\theta^2$.
- On en déduit que l'aire de la spirale vaut $\dfrac{4\pi^3 a^2}{3}$ c'est-à-dire le tiers de l'aire du disque qui la contient.

Sommes de Riemann et calcul : conclusion

- On voit sur cet exemple que le calcul est beaucoup plus simple avec les primitives qu'avec les sommes de Riemann. C'est un principe général :

Sommes de Riemann et calcul : conclusion

- On voit sur cet exemple que le calcul est beaucoup plus simple avec les primitives qu'avec les sommes de Riemann. C'est un principe général :
- **Le continu c'est plus simple que le discret**.

Sommes de Riemann et calcul : conclusion

- On voit sur cet exemple que le calcul est beaucoup plus simple avec les primitives qu'avec les sommes de Riemann. C'est un principe général :
- **Le continu c'est plus simple que le discret**.
- Et encore la fonction à intégrer $f(x) = x^2$ est simple, on pensera à x^{17} ou $\sin x$ ou $\ln x$ ou ...

Sommes de Riemann et calcul : conclusion

- On voit sur cet exemple que le calcul est beaucoup plus simple avec les primitives qu'avec les sommes de Riemann. C'est un principe général :
- **Le continu c'est plus simple que le discret**.
- Et encore la fonction à intégrer $f(x) = x^2$ est simple, on pensera à x^{17} ou $\sin x$ ou $\ln x$ ou ...
- La méthode des sommes de Riemann, ou d'Archimède, pour le calcul, est donc supplantée par l'utilisation des primitives.

Sommes de Riemann et calcul : conclusion

- On voit sur cet exemple que le calcul est beaucoup plus simple avec les primitives qu'avec les sommes de Riemann. C'est un principe général :
- **Le continu c'est plus simple que le discret**.
- Et encore la fonction à intégrer $f(x) = x^2$ est simple, on pensera à x^{17} ou $\sin x$ ou $\ln x$ ou ...
- La méthode des sommes de Riemann, ou d'Archimède, pour le calcul, est donc supplantée par l'utilisation des primitives.
- Une citation : *Et ne devons-nous pas conclure que cette œuvre admirable* [celle d'Archimède] *d'où le calcul intégral, de l'aveu de ses créateurs, est tout entier sorti, est en quelque façon à l'opposé du calcul intégral ?*

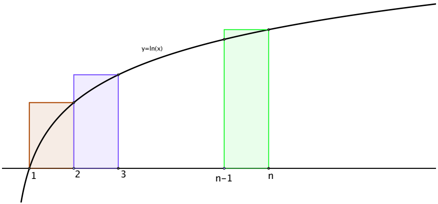
Discussion sur les sommes de Riemann : les approximations

- Lorsqu'on n'a pas de primitives, il est pertinent d'utiliser des sommes de Riemann pour obtenir des approximations.

Discussion sur les sommes de Riemann : les approximations

- Lorsqu'on n'a pas de primitives, il est pertinent d'utiliser des sommes de Riemann pour obtenir des approximations.
- Mais, dans les cas usuels (monotone, convexe), la croissance de l'intégrale suffit pour avoir un encadrement.

Un exemple : la formule de Stirling



On obtient les inégalités :

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln 2 + \cdots + \ln n \leq n \ln n - n + 1 + \ln n,$$

$$\text{et} \quad n^n e^{-n} e \leq n! \leq n^n e^{-n} e \; n.$$

Discussion sur les sommes de Riemann : le calcul des grandeurs et la modélisation

- En dimension ≥ 2 on ne peut faire l'économie d'une définition de l'intégrale avec des sommes (voir Rogalski), mais, au niveau de la terminale, la plupart des problèmes se ramènent à la dimension 1 et à l'usage d'une procédure "dérivée-primitive" comme dans la quadrature de la spirale, avec le mot d'ordre :

Discussion sur les sommes de Riemann : le calcul des grandeurs et la modélisation

- En dimension ≥ 2 on ne peut faire l'économie d'une définition de l'intégrale avec des sommes (voir Rogalski), mais, au niveau de la terminale, la plupart des problèmes se ramènent à la dimension 1 et à l'usage d'une procédure "dérivée-primitive" comme dans la quadrature de la spirale, avec le mot d'ordre :
- On introduit la fonction grandeur jusqu'à x. Exemples : 1 2.

Discussion sur les sommes de Riemann : le calcul des grandeurs et la modélisation

- En dimension ≥ 2 on ne peut faire l'économie d'une définition de l'intégrale avec des sommes (voir Rogalski), mais, au niveau de la terminale, la plupart des problèmes se ramènent à la dimension 1 et à l'usage d'une procédure "dérivée-primitive" comme dans la quadrature de la spirale, avec le mot d'ordre :
- On introduit la fonction grandeur jusqu'à x. Exemples : 1 2.
- En conclusion sur les sommes de Riemann :
  Tout cela est à sa place dans l'enseignement des Facultés ; tout cela serait détestable dans les lycées.

Discussion sur les sommes de Riemann : le calcul des grandeurs et la modélisation

- En dimension ≥ 2 on ne peut faire l'économie d'une définition de l'intégrale avec des sommes (voir Rogalski), mais, au niveau de la terminale, la plupart des problèmes se ramènent à la dimension 1 et à l'usage d'une procédure "dérivée-primitive" comme dans la quadrature de la spirale, avec le mot d'ordre :
- On introduit la fonction grandeur jusqu'à x. Exemples : 1 2.
- En conclusion sur les sommes de Riemann :
  Tout cela est à sa place dans l'enseignement des Facultés ; tout cela serait détestable dans les lycées.
- Voir, sur ma page web : `https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Bordeaux06-1.pdf`

Le programme 2011

alleluia !

Le programme 2011 : enfin l'équilibre

- Le programme 2011 reprend nombre des recommandations ci-dessus, quel bonheur ...

Le programme 2011 : enfin l'équilibre

- Le programme 2011 reprend nombre des recommandations ci-dessus, quel bonheur ...
- Sur l'intégrale, hormis quelques détails (la disparition de l'intégration par parties, outil essentiel s'il en est, l'absence des calculs approchés, le peu d'exemples d'applications en physique), le programme me semble être le meilleur possible.

Le programme 2011 : enfin l'équilibre

- Le programme 2011 reprend nombre des recommandations ci-dessus, quel bonheur ...
- Sur l'intégrale, hormis quelques détails (la disparition de l'intégration par parties, outil essentiel s'il en est, l'absence des calculs approchés, le peu d'exemples d'applications en physique), le programme me semble être le meilleur possible.
- *C'qui prouve qu'en protestant, quand il est encore temps, on peut finir par obtenir des ménagements !*

Le programme 2011 : enfin l'équilibre

- Le programme 2011 reprend nombre des recommandations ci-dessus, quel bonheur ...
- Sur l'intégrale, hormis quelques détails (la disparition de l'intégration par parties, outil essentiel s'il en est, l'absence des calculs approchés, le peu d'exemples d'applications en physique), le programme me semble être le meilleur possible.
- *C'qui prouve qu'en protestant, quand il est encore temps, on peut finir par obtenir des ménagements !*
- Je vous remercie de votre attention.