Géométrie, programme d'Erlangen, groupes, transitivité et invariants : de la théorie à la pratique

Daniel PERRIN

Séminaire international des IREM, 14 janvier 2022

Pour des précisions

Je vais aborder beaucoup de thèmes, de manière très sommaire.
Pour des détails voir :

- Ma page web :
  https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ perrin/
  Notamment les rubriques : sur la géométrie, conférences, livre de géométrie projective, projet de géométrie, CAPES, etc.

Pour des précisions

Je vais aborder beaucoup de thèmes, de manière très sommaire. Pour des détails voir :

- Ma page web :
  https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ perrin/
  Notamment les rubriques : sur la géométrie, conférences, livre de géométrie projective, projet de géométrie, CAPES, etc.
- Le rapport de la commission Kahane (*L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, 2002). (La partie géométrie est sur ma page web.)

Pour des précisions

Je vais aborder beaucoup de thèmes, de manière très sommaire. Pour des détails voir :

- Ma page web :
  https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ perrin/
  Notamment les rubriques : sur la géométrie, conférences, livre de géométrie projective, projet de géométrie, CAPES, etc.
- Le rapport de la commission Kahane (*L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, 2002). (La partie géométrie est sur ma page web.)
- PERRIN Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini (2005, 2011).

Pour des précisions

Je vais aborder beaucoup de thèmes, de manière très sommaire.
Pour des détails voir :

- Ma page web :
  https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ perrin/
  Notamment les rubriques : sur la géométrie, conférences, livre de géométrie projective, projet de géométrie, CAPES, etc.
- Le rapport de la commission Kahane (*L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, 2002). (La partie géométrie est sur ma page web.)
- PERRIN Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini (2005, 2011).
- La brochure du groupe IREM Géométrie : `http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf`

Mon objectif général

Mon principal objectif, depuis de nombreuses années, est de défendre l'enseignement de la géométrie et former les professeurs sur ce thème. Voir là-dessus le rapport de la commission Kahane et la Postface de mon projet de livre de géométrie projective.

Mon objectif aujourd'hui

- Montrer comment des notions théoriques autour du programme d'Erlangen de Felix Klein (groupes, "niche écologique" d'un théorème, transitivité) sont pertinentes pour l'enseignement car elles permettent :

Mon objectif aujourd'hui

- Montrer comment des notions théoriques autour du programme d'Erlangen de Felix Klein (groupes, “niche écologique” d'un théorème, transitivité) sont pertinentes pour l'enseignement car elles permettent :
- D'avoir un temps d'avance par rapport aux élèves.

Mon objectif aujourd'hui

- Montrer comment des notions théoriques autour du programme d'Erlangen de Felix Klein (groupes, “niche écologique” d'un théorème, transitivité) sont pertinentes pour l'enseignement car elles permettent :
- D'avoir un temps d'avance par rapport aux élèves.
- De choisir les invariants pertinents pour les démonstrations selon la “niche” en jeu, par exemple l'aire dans le cas de la géométrie affine.

Mon objectif aujourd'hui

- Montrer comment des notions théoriques autour du programme d'Erlangen de Felix Klein (groupes, "niche écologique" d'un théorème, transitivité) sont pertinentes pour l'enseignement car elles permettent :
- D'avoir un temps d'avance par rapport aux élèves.
- De choisir les invariants pertinents pour les démonstrations selon la "niche" en jeu, par exemple l'aire dans le cas de la géométrie affine.
- De comprendre l'importance des critères de transitivité, et notamment des cas d'isométrie et de similitude.

Le programme d'Erlangen

Retour aux sources : Euclide

- Avant de parler du programme d'Erlangen de Felix Klein, je vais expliquer en quoi il me semble déjà en germe dans Euclide et notamment dans la preuve du premier cas d'égalité des triangles (livre 1, prop. 4) :

Retour aux sources : Euclide

- Avant de parler du programme d'Erlangen de Felix Klein, je vais expliquer en quoi il me semble déjà en germe dans Euclide et notamment dans la preuve du premier cas d'égalité des triangles (livre 1, prop. 4) :
- **Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.** Figure*

Retour aux sources : Euclide

- Avant de parler du programme d'Erlangen de Felix Klein, je vais expliquer en quoi il me semble déjà en germe dans Euclide et notamment dans la preuve du premier cas d'égalité des triangles (livre 1, prop. 4) :
- **Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.** Figure*
- Deux mots-clés implicites : groupe de transformations et transitivité.

Le programme d'Erlangen

- C'est la thèse de Felix Klein (1872).

Le programme d'Erlangen

- C'est la thèse de Felix Klein (1872).
- Son but : **unifier** les géométries.

Le programme d'Erlangen

- C'est la thèse de Felix Klein (1872).
- Son but : **unifier** les géométries.
- **Principe :** Une géométrie c'est la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X.

Le programme d'Erlangen

- C'est la thèse de Felix Klein (1872).
- Son but : **unifier** les géométries.
- **Principe :** Une géométrie c'est la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X.
- **Exemples :** Le plan affine euclidien et le groupe des isométries euclidiennes, le plan affine et les bijections affines, le plan projectif et les homographies.

Classification des propriétés

- *... étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*

Classification des propriétés

- *... étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*
- **Exemple 1** Les homographies conservent concours et alignement.

Classification des propriétés

- *... étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*
- **Exemple 1** Les homographies conservent concours et alignement.
- **Exemple 2** Les transformations affines conservent en outre le parallélisme, les rapports de mesures algébriques sur une même droite (tout ce qui se formule avec des vecteurs mais sans produit scalaire) et les rapports d'aires.

Classification des propriétés

- *... étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*
- **Exemple 1** Les homographies conservent concours et alignement.
- **Exemple 2** Les transformations affines conservent en outre le parallélisme, les rapports de mesures algébriques sur une même droite (tout ce qui se formule avec des vecteurs mais sans produit scalaire) et les rapports d'aires.
- **Exemple 3** Les isométries conservent en outre longueurs et angles.

Les théorèmes à la niche

- Chaque théorème possède une **niche écologique** privilégiée qui tient aux propriétés mises en jeu : pour Pythagore c'est la géométrie euclidienne, pour Thalès, la géométrie affine, pour Pappus* la géométrie projective.

Les théorèmes à la niche

- Chaque théorème possède une **niche écologique** privilégiée qui tient aux propriétés mises en jeu : pour Pythagore c'est la géométrie euclidienne, pour Thalès, la géométrie affine, pour Pappus* la géométrie projective.
- C'est dans ce cadre qu'il s'énonce le plus généralement et, souvent, qu'il est le plus facile à prouver. Un exemple : le théorème de Pascal*.

Quel intérêt pour les professeurs ?

Repérer la niche écologique d'un problème a deux avantages :

- Trouver rapidement le résultat cherché, souvent en se ramenant à un cas particulier. La démonstration n'est pas en général au niveau des élèves, mais on a ainsi un **temps d'avance** sur eux.

Quel intérêt pour les professeurs ?

Repérer la niche écologique d'un problème a deux avantages :

- Trouver rapidement le résultat cherché, souvent en se ramenant à un cas particulier. La démonstration n'est pas en général au niveau des élèves, mais on a ainsi un **temps d'avance** sur eux.
- De plus, lorsqu'il s'agit de proposer une preuve abordable par les élèves, le programme d'Erlangen permet d'avoir une **claire conscience des outils à utiliser**.

Programme d'Erlangen

et temps d'avance :

l'exemple affine

La géométrie affine

- La géométrie affine est essentiellement la géométrie des points et des vecteurs (sans distance ni produit scalaire).

La géométrie affine

- La géométrie affine est essentiellement la géométrie des points et des vecteurs (sans distance ni produit scalaire).
- Dans le cas du plan euclidien le groupe affine contient les isométries, les homothéties, mais aussi d'autres transformations : affinités, transvections, etc.

La géométrie affine

- La géométrie affine est essentiellement la géométrie des points et des vecteurs (sans distance ni produit scalaire).
- Dans le cas du plan euclidien le groupe affine contient les isométries, les homothéties, mais aussi d'autres transformations : affinités, transvections, etc.
- Toutes ces transformations conservent les propriétés qui s'expriment en termes de vecteurs (sans produit scalaire) : alignement, concours, parallélisme, milieux, rapports de mesures algébriques sur une même droite ou des droites parallèles, rapports d'aires, mais ni angles, ni longueurs.

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, le temps d'avance pour le résultat

- **Principe** : On identifie que le problème est un problème affine. Exemple : le concours des médianes, les tiers*.

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, le temps d'avance pour le résultat

- **Principe** : On identifie que le problème est un problème affine. Exemple : le concours des médianes, les tiers*.
- On effectue une transformation affine pour transformer le problème en un problème plus simple. On utilise pour cela des propriétés de **transitivité**, par exemple :
  le groupe affine est transitif sur les triangles*.

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, le temps d'avance pour le résultat

- **Principe** : On identifie que le problème est un problème affine. Exemple : le concours des médianes, les tiers*.
- On effectue une transformation affine pour transformer le problème en un problème plus simple. On utilise pour cela des propriétés de **transitivité**, par exemple :
  le groupe affine est transitif sur les triangles*.
- On résout le problème simplifié (médianes, tiers*) et on revient au cas initial par la transformation inverse.

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, le temps d'avance pour le résultat

- **Principe** : On identifie que le problème est un problème affine. Exemple : le concours des médianes, les tiers*.
- On effectue une transformation affine pour transformer le problème en un problème plus simple. On utilise pour cela des propriétés de **transitivité**, par exemple :
  le groupe affine est transitif sur les triangles*.
- On résout le problème simplifié (médianes, tiers*) et on revient au cas initial par la transformation inverse.
- Cette procédure n'est pas applicable en classe, mais elle donne au professeur un **temps d'avance** sur ses élèves car elle lui donne le résultat à prouver. Un exemple* (bis*).

Invariants et transitivité

Les invariants comme mesure du défaut de transitivité

Lorsque le groupe G n'est pas transitif sur X, on cherche des conditions qui garantissent qu'on peut passer d'un objet x à un objet y.
Ces conditions s'expriment le plus souvent en termes **d'invariants** : il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$ si et seulement si x et y ont mêmes invariants. Dans les cas les plus simples, un seul invariant suffit.

Les invariants de la géométrie élémentaire

- Si X est l'ensemble des couples de points du plan affine euclidien, G le groupe des isométries, un invariant du couple (A, B) est la **longueur** AB.

Les invariants de la géométrie élémentaire

- Si X est l'ensemble des couples de points du plan affine euclidien, G le groupe des isométries, un invariant du couple (A, B) est la **longueur** AB.
- Pour les couples de demi-droites un invariant est leur **angle**.

Les invariants de la géométrie élémentaire

- Si X est l'ensemble des couples de points du plan affine euclidien, G le groupe des isométries, un invariant du couple (A, B) est la **longueur** AB.
- Pour les couples de demi-droites un invariant est leur **angle**.
- Un invariant de la géométrie affine est l'**aire** (ou les rapports d'aires).

Les invariants de la géométrie élémentaire

- Si X est l'ensemble des couples de points du plan affine euclidien, G le groupe des isométries, un invariant du couple (A, B) est la **longueur** AB.
- Pour les couples de demi-droites un invariant est leur **angle**.
- Un invariant de la géométrie affine est l'**aire** (ou les rapports d'aires).
- C'est un fait d'expérience que ces invariants jouent un rôle essentiel en géométrie. Il y a une raison théorique qui justifie ce fait : tout théorème est la traduction d'une relation entre des invariants.

La géométrie affine et l'invariant aire

- **Principe** : Lorsqu'un problème relève de la géométrie affine, il peut toujours être résolu en utilisant l'unique invariant du groupe affine qui est **l'aire** (ou les rapports d'aires).

La géométrie affine et l'invariant aire

- **Principe** : Lorsqu'un problème relève de la géométrie affine, il peut toujours être résolu en utilisant l'unique invariant du groupe affine qui est **l'aire** (ou les rapports d'aires).
- De plus les outils à utiliser sont ceux qui décrivent l'invariance de l'aire par les transformations affines : ce sont exactement les **lemmes du collège** de *Mathématiques d'école* (la plupart de ces lemmes sont déjà dans Euclide).

Les lemmes "du collège"

- Parallélogramme, trapèze*.

Les lemmes "du collège"

- Parallélogramme, trapèze*.
- Proportions et chevron*.

Exemples

- Si l'on en croit le principe énoncé ci-dessus, on doit donc pouvoir résoudre n'importe quel problème affine avec ces outils. Voici quelques exemples.

Exemples

- Si l'on en croit le principe énoncé ci-dessus, on doit donc pouvoir résoudre n'importe quel problème affine avec ces outils. Voici quelques exemples.
- Le théorème de Thalès*.

Exemples

- Si l'on en croit le principe énoncé ci-dessus, on doit donc pouvoir résoudre n'importe quel problème affine avec ces outils. Voici quelques exemples.
- Le théorème de Thalès*.
- Les médianes*, les tiers* ou le parallélogramme*.

Critères de transitivité :

les cas d'isométrie

Transitivité et invariants : l'exemple des triangles

- Comme on l'a vu, lorsqu'un groupe G opère sur un ensemble X de manière non transitive, on vise un résultat du genre : on peut envoyer un objet sur un autre si et seulement si ils ont mêmes invariants.

Transitivité et invariants : l'exemple des triangles

- Comme on l'a vu, lorsqu'un groupe G opère sur un ensemble X de manière non transitive, on vise un résultat du genre : on peut envoyer un objet sur un autre si et seulement si ils ont mêmes invariants.
- Or, pour un triangle ABC, on connaît des invariants : les longueurs des côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, les trois angles α, β, γ en A, B, C, mais aussi bien d'autres (aire, périmètre, longueurs des médianes, des hauteurs, etc.) mais la question est de savoir lesquels caractérisent les triangles à isométrie près.

Combien d'invariants ?

- La première question est de déterminer de combien d'invariants on a besoin.

Combien d'invariants ?

- La première question est de déterminer de combien d'invariants on a besoin.
- Pour trouver ce nombre on raisonne sur la **dimension** des espaces (au sens des variétés).

Combien d'invariants ?

- La première question est de déterminer de combien d'invariants on a besoin.
- Pour trouver ce nombre on raisonne sur la **dimension** des espaces (au sens des variétés).
- Un triangle est formé de trois points de $\mathbf{R}^2$ avec chacun deux coordonnées. L'espace $\mathscr{T}$ des triangles dépend donc de six paramètres : il est de dimension 6.

Combien d'invariants ?

- La première question est de déterminer de combien d'invariants on a besoin.
- Pour trouver ce nombre on raisonne sur la **dimension** des espaces (au sens des variétés).
- Un triangle est formé de trois points de $\mathbf{R}^2$ avec chacun deux coordonnées. L'espace $\mathscr{T}$ des triangles dépend donc de six paramètres : il est de dimension 6.
- Mais le groupe G des isométries du plan est de dimension trois. En effet une isométrie (directe) est composée d'une translation (dimension 2) et d'une rotation de centre fixé (dimension 1).

Combien d'invariants ?

- On en déduit que l'espace $\mathscr{T}/G$ des triangles modulo isométrie est de dimension $3 = 6 - 3$ (car les isométries identifient certains triangles, voir Bonus) : il faut trois invariants pour caractériser un triangle modulo isométrie.

Combien d'invariants ?

- On en déduit que l'espace $\mathscr{T}/G$ des triangles modulo isométrie est de dimension $3 = 6 - 3$ (car les isométries identifient certains triangles, voir Bonus) : il faut trois invariants pour caractériser un triangle modulo isométrie.
- Cela permet, par exemple, de répondre à la question : *Deux triangles qui ont même aire et même périmètre sont-ils isométriques ?*

Combien d'invariants ?

- On en déduit que l'espace $\mathscr{T}/G$ des triangles modulo isométrie est de dimension $3 = 6 - 3$ (car les isométries identifient certains triangles, voir Bonus) : il faut trois invariants pour caractériser un triangle modulo isométrie.
- Cela permet, par exemple, de répondre à la question : *Deux triangles qui ont même aire et même périmètre sont-ils isométriques ?*
- Évidemment non, il faut au moins trois invariants, voir ma conférence IREM de 2013, `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/aireperi/APM-aire-perimetre10.pdf`

Trois invariants ?

- Il faut trois invariants, mais pas n'importe lesquels, par exemple pas les trois angles qui sont liés par la relation $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Trois invariants ?

- Il faut trois invariants, mais pas n'importe lesquels, par exemple pas les trois angles qui sont liés par la relation $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
- De ce point de vue, une question autrefois classique est celle des résolutions de triangles. Il s'agit de déterminer un triangle (à isométrie près) connaissant trois de ses invariants, par exemple son aire et deux des longueurs de ses côtés, ou ses trois hauteurs et une profusion d'autres exemples.

Trois invariants ?

- Il faut trois invariants, mais pas n'importe lesquels, par exemple pas les trois angles qui sont liés par la relation $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
- De ce point de vue, une question autrefois classique est celle des résolutions de triangles. Il s'agit de déterminer un triangle (à isométrie près) connaissant trois de ses invariants, par exemple son aire et deux des longueurs de ses côtés, ou ses trois hauteurs et une profusion d'autres exemples.
- Si les invariants sont bien choisis, on va trouver seulement un nombre fini de solutions possibles.

L'intérêt des cas d'isométrie

- Le cas essentiel est celui où les trois invariants déterminent un **unique** triangle à isométrie près, c'est ce que font les **cas d'isométrie** (deux côtés et un angle, deux angles et un côté, les trois côtés).

L'intérêt des cas d'isométrie

- Le cas essentiel est celui où les trois invariants déterminent un **unique** triangle à isométrie près, c'est ce que font les **cas d'isométrie** (deux côtés et un angle, deux angles et un côté, les trois côtés).
- Les cas d'isométrie donnent donc des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie transformant un triangle en un autre.

L'intérêt des cas d'isométrie

- Le cas essentiel est celui où les trois invariants déterminent un **unique** triangle à isométrie près, c'est ce que font les **cas d'isométrie** (deux côtés et un angle, deux angles et un côté, les trois côtés).
- Les cas d'isométrie donnent donc des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie transformant un triangle en un autre.
- Deux points sont essentiels pour en comprendre l'intérêt :
  On obtient comme conséquence l'égalité des autres invariants que ceux utilisés.

L'intérêt des cas d'isométrie

- Le cas essentiel est celui où les trois invariants déterminent un **unique** triangle à isométrie près, c'est ce que font les **cas d'isométrie** (deux côtés et un angle, deux angles et un côté, les trois côtés).
- Les cas d'isométrie donnent donc des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie transformant un triangle en un autre.
- Deux points sont essentiels pour en comprendre l'intérêt : On obtient comme conséquence l'égalité des autres invariants que ceux utilisés.
- On peut montrer que deux triangles sont isométriques **sans être obligé d'exhiber l'isométrie qui fait le travail**.

L'intérêt des cas d'isométrie

- Le cas essentiel est celui où les trois invariants déterminent un **unique** triangle à isométrie près, c'est ce que font les **cas d'isométrie** (deux côtés et un angle, deux angles et un côté, les trois côtés).
- Les cas d'isométrie donnent donc des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie transformant un triangle en un autre.
- Deux points sont essentiels pour en comprendre l'intérêt : On obtient comme conséquence l'égalité des autres invariants que ceux utilisés.
- On peut montrer que deux triangles sont isométriques **sans être obligé d'exhiber l'isométrie qui fait le travail**.
- Il peut le dire !

Utilisation des cas d'égalité comme outil de démonstration

- L'objectif est de montrer l'égalité de deux longueurs ou de deux angles.

Utilisation des cas d'égalité comme outil de démonstration

- L'objectif est de montrer l'égalité de deux longueurs ou de deux angles.
- On incorpore ces éléments dans deux triangles qui semblent visuellement "pareils".

Utilisation des cas d'égalité comme outil de démonstration

- L'objectif est de montrer l'égalité de deux longueurs ou de deux angles.
- On incorpore ces éléments dans deux triangles qui semblent visuellement "pareils".
- On montre que ces triangles sont isométriques en prouvant que trois de leurs éléments (autres que ceux convoités) sont égaux et on conclut.

Utilisation des cas d'égalité comme outil de démonstration

- L'objectif est de montrer l'égalité de deux longueurs ou de deux angles.
- On incorpore ces éléments dans deux triangles qui semblent visuellement "pareils".
- On montre que ces triangles sont isométriques en prouvant que trois de leurs éléments (autres que ceux convoités) sont égaux et on conclut.
- Un exemple* avec plusieurs preuves.

Critique des preuves par les transformations

- Les transformations nécessitent souvent des constructions supplémentaires (ici le point F).

Critique des preuves par les transformations

- Les transformations nécessitent souvent des constructions supplémentaires (ici le point F).
- Elles sont moins visuelles : les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.

Critique des preuves par les transformations

- Les transformations nécessitent souvent des constructions supplémentaires (ici le point F).
- Elles sont moins visuelles : les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.
- Il faut déjà repérer quelles sont les transformations pertinentes (ici, rotation, mais de quel centre).

Critique des preuves par les transformations

- Les transformations nécessitent souvent des constructions supplémentaires (ici le point F).
- Elles sont moins visuelles : les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.
- Il faut déjà repérer quelles sont les transformations pertinentes (ici, rotation, mais de quel centre).
- Les preuves sont plus compliquées à écrire (ici les médiatrices).

Critique des preuves par les transformations

- Les transformations nécessitent souvent des constructions supplémentaires (ici le point F).
- Elles sont moins visuelles : les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.
- Il faut déjà repérer quelles sont les transformations pertinentes (ici, rotation, mais de quel centre).
- Les preuves sont plus compliquées à écrire (ici les médiatrices).
- Pour être efficace, on doit disposer de toute la panoplie des transformations (symétries axiales, centrales, translations, rotations).

D'autres exemples

- Il y a beaucoup d'exemples de ce type et beaucoup aussi avec les cas de similitude, dans la brochure IREM numéro 100.

D'autres exemples

- Il y a beaucoup d'exemples de ce type et beaucoup aussi avec les cas de similitude, dans la brochure IREM numéro 100.
- En voici un autre*. Et un dernier pour la route*.

D'autres exemples

- Il y a beaucoup d'exemples de ce type et beaucoup aussi avec les cas de similitude, dans la brochure IREM numéro 100.
- En voici un autre*. Et un dernier pour la route*.
- La conclusion que l'on tire de l'étude de ces exemples est que l'ostracisme envers les cas d'égalité prononcé par les promoteurs de la réforme de maths modernes (*À bas Euclide, plus de triangles*) était bien injuste, même en se plaçant dans le cadre du programme d'Erlangen.

Conclusion

Les arguments énoncés ci-dessus ont servi de perspective au groupe Géométrie de l'IREM de Paris dans l'élaboration de la Brochure IREM numéro 100.

- Cette brochure propose une progression pour l'enseignement de la géométrie au collège qui récuse l'usage trop précoce des transformations en privilégiant au contraire les points suivants :

Conclusion

Les arguments énoncés ci-dessus ont servi de perspective au groupe Géométrie de l'IREM de Paris dans l'élaboration de la Brochure IREM numéro 100.

- Cette brochure propose une progression pour l'enseignement de la géométrie au collège qui récuse l'usage trop précoce des transformations en privilégiant au contraire les points suivants :
- Utilisation des invariants (et notamment des aires).

Conclusion

Les arguments énoncés ci-dessus ont servi de perspective au groupe Géométrie de l'IREM de Paris dans l'élaboration de la Brochure IREM numéro 100.

- Cette brochure propose une progression pour l'enseignement de la géométrie au collège qui récuse l'usage trop précoce des transformations en privilégiant au contraire les points suivants :
- Utilisation des invariants (et notamment des aires).
- Utilisation des cas d'isométrie et de similitude des triangles.

Conclusion

Les arguments énoncés ci-dessus ont servi de perspective au groupe Géométrie de l'IREM de Paris dans l'élaboration de la Brochure IREM numéro 100.

- Cette brochure propose une progression pour l'enseignement de la géométrie au collège qui récuse l'usage trop précoce des transformations en privilégiant au contraire les points suivants :
- Utilisation des invariants (et notamment des aires).
- Utilisation des cas d'isométrie et de similitude des triangles.
- Je vous remercie de votre attention.

Références complémentaires

- DUPERRET Jean-Claude, PERRIN Daniel, RICHETON Jean-Pierre ([DPR]), *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 2001.
- KAHANE Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob (2002).
- KLEIN Felix, *Le programme d'Erlangen*, J. Gabay (1991).
- PERRIN Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini (2005, 2011).
- PERRIN Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations.* Repères IREM, 53, p. 91-110, 2003.
- PERRIN Daniel, *La géométrie, un domaine hors-programme ?* Bull. APMEP 496 (2011).