Atelier AMQ 31 mai 2006. Version 2

Le rôle des mathématiques dans la mise en équation différentielle en physique

Marc Rogalski, Université des Sciences et Technologies de Lille
Laboratoire Paul Painlevé (Université et CNRS)

Résumé

Les physiciens utilisent, pour étudier les variations d'une grandeur f en fonction d'une autre x, un procédé "physique" de mise en équation différentielle, en évaluant l'accroissement Δf quand la variable s'accroît de Δx. Ils s'appuient sur une intuition physique qui laisse parfois implicite la négligeabilité effective de certains termes négligés.

Comment les mathématiques peuvent-elles rendre compte de cette intuition et la préciser, en terme d'erreur relative, et au moyen des concepts mathématiques de limite, de dérivabilité et de négligeabilité ? Cette intervention des mathématiques en physique peut-elle en retour améliorer la compréhension du sens de ces concepts mathématiques ? Nous étudions cette question en travaillant en détails sur quelques exemples.

Introduction

Le programme mathématique des terminales scientifiques en France met depuis 2002 l'accent sur les liens entre les mathématiques et la physique. Ce lien est développé de façon très explicite autour des *procédures de mise en équation différentielle de phénomènes physiques* (étude des variations d'une grandeur à taux de variation instantané proportionnel à la grandeur elle-même, équations différentielles $y' = ky$), en particulier de phénomènes d'évolution au cours du temps.

Cette évolution des programmes, et surtout de leur esprit, pose beaucoup de problèmes aux enseignants de mathématiques, peu habitués aux activités de modélisations. De nombreux débats ont ainsi surgi sur le bienfondé de ces nouvelles orientations, en même temps que, dans les documents d'accompagnement des programmes distribués par le ministère, dans les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et dans le bulletin de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), de nombreux exemples de modélisations ont été donnés, souvent intéressants, voire “séduisants”. Mais sont-ils vraiment viables didactiquement ? Il apparaît bien qu'un certains nombres de difficultés aient été sous-estimées, mais il nous semble qu'un des enjeux possibles est de s'emparer de ces difficultés d'un point de vue mathématique, et de les exploiter, à la fois pour mieux cerner la spécificité des deux disciplines physique et mathématiques (voire d'autres), et pour en tirer un bénéfice pour l'enseignement des mathématiques.

I. La procédure de l'accroissement différentiel, les lois physiques “locales”, et les notions mathématiques de dérivabilité et de négligeabilité

Nous allons donc essayer d'analyser les procédures à l'œuvre dans une mise en équation différentielle d'un phénomène physique. Si on regarde les mises en équation possibles, on constate qu'il y en a de deux types :

* celles où *une loi physique est d'emblée déjà une équation différentielle*, et il n'y a donc pas de véritable modélisation à la charnière physique-mathématiques à faire ; c'est par exemple le cas de la plupart des problèmes qui relèvent de la dynamique : $F = m\Gamma$ est déjà une équation différentielle ;
* celles où, au contraire, *l'équation différentielle n'est pas donnée*, et c'est tout l'enjeu de l'activité de modélisation que de l'établir.

C'est uniquement ce dernier cas que nous allons étudier ici.

Pour bien faire comprendre la méthode utilisée en physique, nous allons d'abord étudier un exemple significatif.

I. 1. Un exemple emblématique : la canalisation poreuse

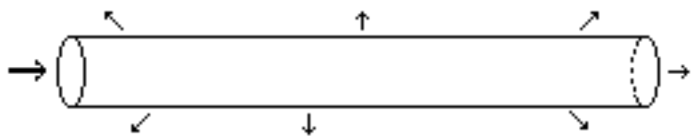
Voici un exemple de problème qu'on pourrait trouver dans un manuel de physique.

$\boxed{1}$ *Ecoulement dans une canalisation poreuse*

On étudie les pertes d'eau le long d'une canalisation poreuse cylindrique de rayon 10 cm. On suppose que le débit d'entrée est de 1800 litres à la minute.

On fait l'hypothèse suivante : sur un petit segment de la canalisation, la fuite (en litres/mn) est à peu près proportionnelle à la surface (en mètres carrés) du segment et au débit (en litres/mn) à travers ce petit segment, le coefficient de proportionnalité étant égal à 10^{-2}.

Quelle longueur maximum peut avoir la canalisation pour que le débit d'eau à sa sortie soit au moins de 1000 litres/mn ?



On constate que l'énoncé présente deux aspects :

* d'une part, une description locale du phénomène, *une "loi locale" de nature "linéaire"*, présentée comme d'autant plus exacte que le phénomène a été très localisé (comme le désignent les locutions "sur un petit segment de la canalisation" et "à peu près proportionnelle") ;
* de l'autre, une *"procédure de l'accroissement différentiel"* : on regarde un accroissement Δx de la variable (ici l'abscisse à partir de l'entrée de la canalisation), à partir de sa valeur x, et on dit quelque chose sur l'accroissement correspondant Δf de la fonction f cherchée (ici le débit $\delta(x)$ à l'abscisse x).

On peut remarquer qu'ici une grande partie de la modélisation est déjà faite : on ne dit pas comment on a déterminé cette loi locale ; nous y reviendrons.

Mais revenons à ce qui est dit de l'accroissement, et à ce que disent fréquemment les physiciens. Parfois, le "à peu près" du texte est carrément absent, et remplacé par une locution du type "est égal à … si Δx est assez petit". On trouve ainsi dans un document du ministère (voir[4]), à propos de la radioactivité, la formulation suivante : "le nombre *moyen* de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps Δt à partir d'un instant t, rapporté au nombre total de noyaux N(t) présents à l'instant t et au temps d'observation Δt, est une constante λ caractéristique du noyau en question. On peut donc écrire $\frac{\Delta N(t)}{N(t)} = -\lambda\Delta t$". Cette formulation a entraîné de nombreuses protestations d'enseignants de mathématiques (voir [2]), pour qui une telle proportionnalité locale *exacte* implique que le phénomène étudié est *globalement* proportionnel ; dit autrement : une fonction localement affine sur un intervalle y est globalement affine.

Dans l'énoncé concernant la canalisation poreuse, on trouve une formulation plus prudente, qu'on trouve aussi dans les textes de physique : on y énonce une *proportionnalité approximative* de Δf à Δx, qu'on écrit souvent $\Delta f \approx K\Delta x$, le coefficient K dépendant explicitement de x et de f(x).

Plus précisément, on peut écrire ici, si $\delta(x)$ est le débit à l'abscisse x de la canalisation et R son rayon :

$$(*)\quad \Delta\delta \approx -k\Delta S\delta(x), \quad \text{soit} \quad \Delta\delta \approx -2\pi Rk\delta(x)\Delta x.$$

I.2. Erreur relative, négligeabilité et dérivée

Mais reste à savoir ce que signifie précisément le signe ≈ ainsi utilisé. Les physiciens mettent en avant à juste titre l'idée d'*approximation*, mais, dans ce type de modélisation, ils restent dans le flou quant au type d'approximation dont il s'agit, c'est-à-dire quant à *la nature de l'erreur* commise. Ce point devrait être essentiel, s'agissant de physique ! Or ce point est très délicat pour les élèves, et encore pour les étudiants à l'université (voir [1], [3]). Il s'agit certes de dire que l'erreur commise en remplaçant Δf par $K\Delta x$ tend vers 0 avec Δx, mais pas n'importe quelle erreur : il s'agit de *l' erreur relative* par rapport à Δx, l'erreur absolue $r = \Delta f - K\Delta x$ doit être *négligeable devant* Δx. En effet, clairement Δf et $K\Delta x$ tendent tous deux vers 0 avec Δx (dès lors qu'on sait que f est *continue*), donc dire que leur différence (l'erreur absolue) tend aussi vers 0 *n'apporte aucune information* ! La *négligeabilité* de l'erreur absolue devant Δx est *l'information supplémentaire* qui va permettre de dire que la forme d'une loi locale $\Delta f = K(x, f(x))\Delta x + o(\Delta x)$ signifie très précisément que la fonction f est *dérivable* en x et que sa dérivée a pour valeur $K(x,f(x))$. Et par conséquent que la fonction f inconnue doit vérifier *l'équation différentielle* $y' = K(x, y)$. Ici, dire que l'erreur r est $o(\Delta x)$ ou est négligeable devant Δx signifie que $\frac{r}{\Delta x}$ tend vers 0 quand Δx tend vers 0.

Il y a là de plus une autre difficulté dans le rapport entre mathématiques et physique. A proprement parler, pour le physicien, le caractère relatif de l'erreur devrait être à rapporter à Δf, surtout si il y a des mesures : on devrait donc avoir $\Delta f = K(x, f(x))\Delta x + o(\Delta f)$. Ceci est équivalent à la formulation précédente, sauf lorsque $K(x, f(x))$ est nul, c'est-à-dire en un point x où la dérivée $f'(x)$ est nulle.

Fondamentalement, le concept mathématique qui sous-tend cette interprétation en erreur relative est la négligeabilité du reste dans le point de vue concevant la dérivabilité comme l'existence d'un *développement limité à l'ordre 1* : $f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + r(\Delta x)$. Si on ne dit pas que $r(\Delta x) = o(\Delta x)$, on n'a absolument pas une dérivabilité. Ce point est loin d'aller de soi avec les élèves des deux dernières années du lycée (où la dérivée est introduite et utilisée), et encore avec les étudiants des deux premières années d'université.

Voici un exemple d'activité qui peut faire prendre conscience aux élèves que la notion de négligeabilité est au cœur de celle de dérivée. On pose le problème :

$\boxed{2}$ *Evaluer sin(46°) sans utiliser de calculatrice.*

Les élèves pensent rapidement à la formule d'addition : $\sin(46°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\sin(1°)+ \cos(1°)\big)$. Une fois établi que $1° = \frac{\pi}{180}$ radians, les élèves finissent par se rappeler que quand x est petit (ici $\frac{\pi}{180}$ = 0,01745…), $\sin x$ c'est à peu près x. Ils proposent donc de remplacer $\sin x$ par x dans l'expression finale $\sin(1°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(1+\sin(\frac{\pi}{180}) - 2\sin^2(\frac{\pi}{360})\Big)$. Puis vient la question de l'évaluation de l'erreur, ce qui les oblige à préciser ce que signifie la phrase *"quand x est petit, sin x c'est à peu près x"*.

Après discussion entre eux, il est fréquent qu'ils proposent *unanimement* une formule $\sin x = x + \varepsilon$, avec ε tendant vers 0 avec x. Si on leur demande si ε pourrait être de l'ordre de $\sqrt{|x|}$, ou de 3x, ils sentent confusément qu'il y aurait quelque chose qui n'irait pas, mais il faut un certain temps de discussion (où l'enseignant doit intervenir sur la notion d'*information supplémentaire* que doit apporter l'expression "c'est à peu près") pour que la formulation "ε doit être négligeable devant x" finisse par être adoptée. Et il faut alors faire comprendre qu'on n'a rien écrit d'autre que le fait que la dérivée de la fonction sinus en 0 est 1, c'est-à-dire $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, ou $\sin x = x + o(x)$.

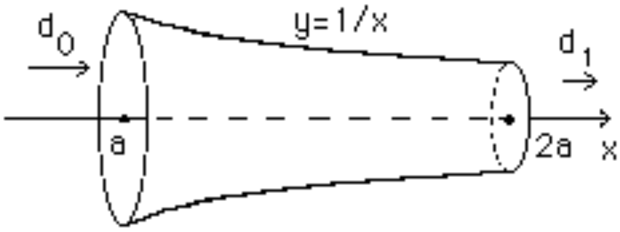
I.3. L'intuition physique de ce qui est négligeable : la procédure physique de l'accroissement différentiel

Si on revient au problème de la canalisation poreuse, l'énoncé ne nous dit pas comment le physicien a fait pour établir la loi locale proposée. C'est une intuition clairement raisonnable de considérer que, localement, les fuites sont proportionnelles à la surface ; la proportionalité au débit à la position x est moins claire, et c'est en somme le choix d'un certain type de porosité qui est fait là : on pourrait imaginer une proportionnalité à la racine carrée du débit, ou toute autre fonction continue croissante nulle en 0, et "raisonnable" au sens de la physique, à condition de "sentir" physiquement qu'on néglige des termes… négligeables.

Le mathématicien n'a pas à mettre en cause la validité de l'intuition du physicien, mais il faut quand même se méfier. On va voir une modification du problème, qui a fait échouer des physiciens, mais aussi des mathématiciens ! Avec la même loi locale $\Delta\delta \approx -k\Delta S\delta(x)$ (on accepte cette première intuition physique), on change la forme de la canalisation.

$\boxed{3}$ *La canalisation poreuse à rayon variable*

On considère une conduite d'eau dont la forme est un tube de révolution engendré par rotation autour de l'axe Ox de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, entre les abscisses a et 2a (a>0). La conduite est poreuse. Sur une petite longueur de la canalisation, la fuite est à peu près proportionnelle à la surface du morceau de tube et au débit à travers celui-ci (on notera k la constante de proportionnalité). Si d_0 est le débit d'entrée, quel est le débit d_1 de sortie ?



Si on admet la même loi locale, c'est dans l'évaluation du petit élément de surface ΔS que va se situer le problème. Si on l'assimile à un petit cylindre de longueur Δx dont la base est un cercle de rayon $r = \frac{1}{x}$, donc d'aire $\frac{2\pi}{x}\Delta x$, on obtient l'équation différentielle $\delta' = -\frac{2k\pi}{x}\delta$, qui donne facilement la relation $\frac{\delta_1}{\delta_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\pi k}$; ce rapport semble ainsi indépendant du paramètre a.

Mais ce résultat est erroné, car l'erreur commise en remplaçant ΔS par $\frac{2\pi\Delta x}{x}$ n'est pas négligeable devant Δx. Il faut en fait assimiler l'aire ΔS à celle d'un tronc de cône, c'est-à-dire à la quantité plus grande $\frac{2\pi}{x}\Delta x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$, ce qui donne une toute autre équation différentielle, dont la résolution est plus difficile : $\delta' = -\frac{2k\pi}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,\delta$. Cette équation donne, au bout d'un long calcul, un rapport $\frac{\delta_1}{\delta_0}$ dont l'expression, compliquée, dépend cette fois de a. En fait, l'erreur commise en remplaçant l'élément d'aire $\frac{2\pi}{x}\Delta x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ par $\frac{2\pi\Delta x}{x}$ est $\frac{2\pi\Delta x}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)$, elle n'est pas négligeable devant Δx, mais du même ordre de grandeur : les deux équations différentielles obtenues ne sont donc pas les mêmes.

Cette même erreur se retrouve dans le test suivant posé à des étudiants (voir [1] et [3]);

$\boxed{4}$ *Volume et aire de la sphère*

(a) On demande de calculer le volume V d'une sphère de rayon R en déterminant la fonction V(z), volume de la portion de sphère formée des points de cote h vérifiant $- R \leq h \leq z$, par la procédure de l'accroissement différentiel, en assimilant le petit volume ΔV entre z et $z + \Delta z$ à celui d'un cylindre de base le disque de rayon $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$.

(b) Calculer de même l'aire S de la sphère. Commentaires.

La réponse à la question (a), en admettant que $\Delta V \approx \pi r^2(z)\Delta z$ au sens de l'équivalence mathématique (c'est-à-dire avec une erreur qui est $o(\Delta z)$), donne bien le volume classique $\frac{4}{3}\pi R^3$. Mais la deuxième question, en assilant ΔS à l'aire latérale du même petit cylindre qu'en (a), donne la formule $S = \pi^2 R^2$, évidemment fausse !

II. La procédure mathématique de l'accroissement différentiel

C'est la même méthode que celle du physicien, à cela près que *la preuve du caractère de négligeabilité devant* Δx de l'erreur d'évaluation de Δf, ou du fait que le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ *converge bien vers K(x,f(x))* est cette fois *un enjeu important*, au cœur de la spécificité de l'analyse mathématique. Et cela n'est pas le même point de vue que celui du physicien. Approfondissons la différence.

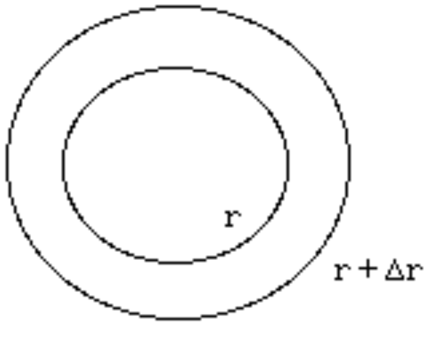
II. 1. Les points de vue différents du physicien et du mathématicien

Reprenons l'exemple $\boxed{4}$. Le physicien n'éprouve nullement le besoin de justifier que le petit volume ΔV ne diffère de $\pi r^2(z)\Delta z$ que d'un terme négligeable devant Δz, l'intuition lui suffit largement. Mais l'exemple de l'aire de la sphère doit amener le mathématicien à plus de rigueur !

Regardons un autre exemple. En formation des maîtres, où les étudiants doivent proposer des énoncés d'exercices pour les élèves, on trouve souvent, dans la rubrique "applications de l'intégrale", la proposition suivante :

$\boxed{5}$ *Retrouver l'aire du cercle par une approximation de l'aire d'une mince couronne*

On note S(r) l'aire du disque de rayon r. En assimilant l'aire ΔS de la mince couronne entre les rayons r et $r + \Delta r$ à $2\pi r\Delta r$, retrouver l'aire du disque de rayon R.



Bien entendu, cette méthode ne marche, mathématiquement, que si on peut prouver que l'erreur commise entre ΔS et $2\pi r\Delta r$ est $o(\Delta r)$. On trouve alors $S'(r) = 2\pi r$, donc $S(R) = \pi R^2$. Mais l'erreur est $\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 - 2\pi r = \pi\Delta r^2$ qui est bien $o(\Delta r)$. Mais ce faisant *on utilise le résultat qu'on veut prouver* !

Pour le physicien, ce n'est pas grave, l'intuition lui donne le bon ordre de grandeur de ΔS, et c'est confirmé par le résultat : c'est physiquement cohérent, et *la cohérence entre les hypothèses et ce que l'on en déduit est l'un des points importants de la notion de vrai en physique* : si on peut montrer qu'un résultat prouvé sous certaines hypothèses permet de conforter cette hypothèse, c'est très bon signe en physique. Mais en mathématiques, après l'usage de l'intuition pour démarrer, *c'est le lien logique interne qui est spécifique du vrai mathématique* : ici, il faut prouver que l'erreur est $o(\Delta r)$ sans utiliser la formule qu'on cherche à établir.

Il est impossible, et ce serait une erreur épistémologique, de convaincre le physicien que son intuition et sa cohérence ne suffisent pas. Sa démarche correspond à son champ spécifique d'étude, et bien sûr son intuition s'appuie aussi sur tout un réseau antérieur de cohérences entre hypothèses de modélisation et résultats expérimentaux. Le mathématicien doit prendre acte que la procédure physique de l'accroissement différentiel, dans la modélisation par équations différentielles, est extrèmement fertile en physique, même si elle ne correspond pas aux canons mathématiques.

II. 2. Mais alors, quelle interdisciplinarité entre physique et mathématiques dans l'enseignement ?

Il me semble que le premier principe d'une saine interdisciplinarité est que *chacun respecte l'épistémologie de l'autre*, et que les *spécificités des deux disciplines* soient bien mises en évidence et expliquées aux élèves, en particulier à partir des *traitements différents mis en œuvre dans des activités de mise en équation.*

Ainsi, les cinq probèmes que nous avons utilisés dans ce qui précède nous paraissent exemplaires de cette différence de traitement entre les deux disciplines. Une ingénierie didactique commune aux enseignants de mathématiques et de physique peut probablement être construite à partir de ces exemples, et sans doute d'autres ; nous en proposerons d'ailleurs un autre plus loin. Voir à ce sujet [6], et le colloque emf 2006, où une version plus courte de [6] a été présentée.

Je voudrais juste ici dégager, et développer ensuite, les procédures spécifiques des mathématiques qui pourraient être valorisées dans des mises en équation différentielles de phénomènes physiques, et aussi dans la procédure de l'accroissement différentiel appliquée à la mesure d'une grandeur par une intégrale (exemples $\boxed{4}$ et $\boxed{5}$, voir [5]). *Il s'agit donc de rendre utile à l'enseignement des mathématiques le fait de faire de la physique en classe de mathématiques.* Il s'agit en même temps, donc, de mettre en évidence de façon concrète la spécificité des mathématiques dans ces problèmes de modélisation.

Comment prouver, dans le cas général, que l'on a bien $\Delta f = K(x,f(x))\Delta x + o(\Delta x)$, ou directement que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = K(x, f(x))$? Il y en fait deux grands types de méthodes :

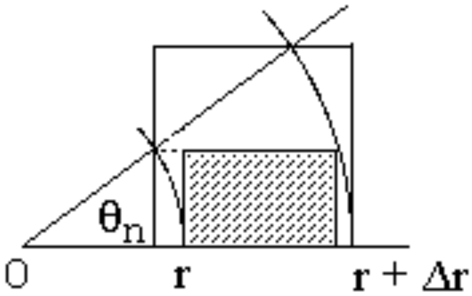
* des majorations et encadrement plus ou moins concrets utilisant des monotonies de fonctions ou des inclusions d'ensembles (c'est la grandeur qu'on veut mesurer qui est monotone pour l'inclusion) ;
* l'utilisation de la continuité, pour déterminer des limites d'encadrement faits par la première méthode, ou faits aussi "à ε près" grâce à la continuité.

On va pouvoir ainsi trouver, grâce à la physique, des activités qui vont valoriser des concepts ou techniques essentiels en analyse : dérivabilité, négligeabilité, majorations, continuité, raisonnement à ε près… On doit en effet commencer à manipuler ces concepts dès le lycée, si on veut que la transition entre le secondaire et l'enseignement supérieur, dans le domaine si difficile de l'analyse, soit moins brutale qu'actuellement.

II. 3. Exemples de preuves de la négligeabilité de l'erreur par encadrement par monotonie

(a) Reprenons l'exemple $\boxed{4}$ du volume de la sphère. La petite tranche ΔV est clairement encadrée, au sens ensembliste, entre deux cylindres, l'un qui la contient (base $\pi r^2(z)$, hauteur Δz), l'autre qu'elle contient (base $\pi r^2(z + \Delta z)$, hauteur Δz). On a ainsi $\Delta z\pi(R^2 - (z+\Delta z)^2) \leq \Delta V \leq \Delta z\pi(R^2 - z^2)$, soit $2\pi z(\Delta z)^2 + \pi(\Delta z)^3 \geq \Delta z\pi(R^2 - z^2) - \Delta V \geq 0$. L'erreur entre ΔV et $\Delta z\pi(R^2 - z^2)$ est donc bien négligeable devant Δz. Remarquons qu'ici la preuve est suffisamment "physique" pour sembler raisonnable à un physicien. Il n'en est sans doute pas de même pour la suivante.

(b) Reprenons en effet le cas $\boxed{5}$ de l'aire du cercle. Comment prouver que ΔS ne diffère de $2\pi r\Delta r$ que d'un terme négligeable devant Δr ? On ne voit pas comment un argument de type "global", concernant toute la couronne, pourrait fonctionner. L'intuition nous dit qu'assimiler l'aire de cette couronne à celle du rectangle de base Δr et de hauteur $2\pi r$ n'est vraisemblable que si on se borne à un petit morceau de l'arc du cercle, disons déterminé par un angle $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$ pour un entier n grand. Il devrait suffire de majorer l'erreur e_n entre l'aire $\Delta_n S$ d'un tel secteur de la couronne et celle du rectangle de base Δr et de hauteur $\frac{2\pi r}{n}$, et l'erreur totale entre ΔS et $2\pi r\Delta r$ sera ne_n, par invariance par rotation.



On encadre l'aire $\Delta_n S$ par celle de deux rectangles : après quelques calculs, on obtient

$$f(n) \leq \Delta_n S \leq g(n), \quad \text{et donc} \quad nf(n) \leq \Delta S \leq ng(n),$$

où les fonctions f et g sont précisées ci-dessous. On passe alors à la limite quand n tend vers l'infini, et on obtient l'encadrement $2\pi r\Delta r \leq \Delta S \leq 2\pi r\Delta r + 2\pi(\Delta r)^2$, ce qui donne bien le résultat souhaité $\Delta S = 2\pi r\Delta r + o(\Delta r)$. On en déduit que $S'(r) = 2\pi r$, ce qui donne l'aire du cercle. On peut remarquer que la majoration de l'erreur obtenue $(2\pi(\Delta r)^2)$ est plus grossière que le résultat exact $(\pi(\Delta r)^2)$, une fois la formule finale connue. Donnons les deux fonctions f et g :

$$f(n) = r \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \left[\sqrt{(r + \Delta r)^2 - r^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} - r\right],$$

$$g(n) = r\,\Delta r \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left(2 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) + (\Delta r)^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right).$$

Remarquons que le passage à la limite va utiliser la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$, résultat admis au lycée en France (voir [5]).

Il paraît clair qu'un physicien trouvera ce calcul disproportionné devant la simplicité de l'intuition qui assimile ΔS à $2\pi r\Delta r$!

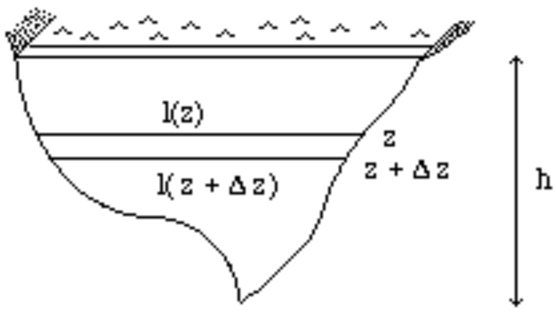
En encadrant entre deux trapèzes, on tombe sur la valeur exacte de l'erreur : $\pi(\Delta r)^2$, mais c'est la méthode habituelle des polygones pour l'aire du cercle, cela sort de la problématique différentielle.

II. 4. Exemple de preuve de la négligeabilité de l'erreur utilisant un encadrement à ε près

Regardons le problème suivant, dans lequel figure volontairement une fonction qui n'est pas précisée, de sorte qu'on ne puisse pas utiliser des calculs élémentaires et des encadrements provenant d'une formule explicite.

$\boxed{6}$ *Force exercée par l'eau sur la paroi d'un barrage*

Un barrage plan de profondeur totale h a, à la profondeur z, une largeur l(z), où $z \to l(z)$ est une fonction continue sur [0, h]. Déterminer, en fonction de cette fonction l, la force exercée sur la paroi du barrage par l'eau.



$? \leq \Delta F \leq ?$

Il s'agit d'un problème de mesure d'une grandeur. Le dessin suggère d'introduire la force F(z) exercée par la partie de l'eau dont la profondeur est entre 0 et z, et d'évaluer ΔF quand z augmente de Δz. Sur la bande horizontale d'épaisseur Δz, la pression est comprise entre $\rho g z$ et $\rho g(z + \Delta z)$ (ρ est la masse volumique de l'eau, et g est l'accélération de la pesanteur) ; la longueur de la bande est proche de l(z), précisément elle est comprise entre $l(z) - \varepsilon$ et $l(z) + \varepsilon$, si on a pris Δz assez petit (continuité de la fonction l ; on s'est donné un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit). On peut donc encadrer ΔF entre les quantités $\rho g z \Delta z\big(l(z) - \varepsilon\big)$ et $\rho g(z + \Delta z)\Delta z\big(l(z) + \varepsilon\big)$, soit

$$\rho g z l(z)\Delta z - \rho g z \varepsilon \Delta z \leq \Delta F \leq \rho g z l(z)\Delta z + \rho g z \varepsilon \Delta z + \rho g(l(z) + \varepsilon)(\Delta z)^2.$$

Ainsi, en assimilant ΔF à $\rho g z l(z)\Delta z$, l'erreur r commise est majorée par $M\big(\varepsilon\Delta z + (\Delta z)^2\big)$, où on peut prendre par exemple $M = \rho g \max\big(h, \underset{z}{\mathrm{Max}}\ l(z) + 1\big)$, si on a pris $\varepsilon \leq 1$. Ainsi $\frac{r}{\Delta z} \leq M\big(\varepsilon + \Delta z\big)$.

Comme on a choisi ε arbitrairement petit, on voit qu'on peut rendre $\frac{r}{\Delta z}$ aussi petit qu'on veut en prenant Δz assez petit : on a prouvé que $r = o(\Delta z)$.

Bien entendu, la relation $\Delta F \approx \rho g z l(z)\Delta z$ semblera naturelle au physicien, qui ne s'embarassera pas avec l'encadrement précédent. Il en déduira immédiatement l'égalité $F'(z) = \rho g z l(z)$, et donc, en intégrant, $F = \int_0^h \rho g z l(z)\, dz$.

Remarquons que lorsqu'on cherche à mesurer une grandeur F par une intégrale, et que la situation peut être décrite par une seule variable z, ce qu'on obtient assez souvent en évaluant ΔF quand z augmente de Δz n'est qu'une équation différentielle *dégénérée* $F'(z) = \phi(z)$, c'est-à-dire simplement un problème de primitive. C'est le cas ici.

L'intérêt de cet exemple $\boxed{6}$ est que la fonction $z \to l(z)$ n'est pas explicitée ; elle pourrait même n'être pas monotone (selon la forme du relief…). Il est donc absolument nécessaire de faire un raisonnement à ε près, utilisant la seule hypothèse qu'on ait, la continuité de la fonction l. Cet exemple et d'autres analogues sont précieux pour rendre opérationnel ce raisonnement à ε près, typique de l'analyse mathématique.

III. Conclusion : quels enjeux en classe ?

Deux questions se posent, concernant la prise en compte dans l'enseignement des idées ici présentées.
(1) Peut-on vraiment faire de façon profitable de la physique en classe de mathématiques sans s'en donner les moyens mathématiques, si on veut apporter aux élèves autre chose que ce que l'enseignement de physique peut déjà leur apporter ? Quels sont alors ces moyens ?
(2) Inversement, la confrontation avec la physique peut-elle permettre de construire des savoirs et des habiletés mathématiques que la lettre des seuls programmes mathématiques rend improbables ?

Il nous semble que la réponse à la question (1) consiste essentiellement en la prise de conscience d'une *procédure mathématique de l'accroissement différentiel*, *apport spécifique des mathématiques* à ces questions de mise en équation différentielle, et que cela demande une pratique de certains aspects de l'analyse : négligeabilité, liens avec la dérivabilité et la notion d'erreur relative dans une procédure différentielle, majorations et encadrements, un peu d'usage de la continuité avec des ε, usage de notations symboliques permettant un certain jeu avec des paramètres (pour ce dernier point, nous renvoyons le lecteur à [6]).
Ceci doit s'accompagner d'une *mise en évidence de la différence des points de vue entre physique et mathématiques*, et donc des échanges et une collaboration entre enseignants des deux disciplines.

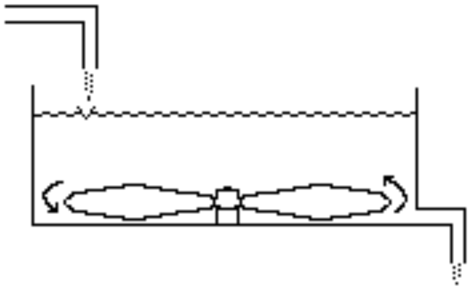
La réponse à la deuxième question consisterait en la mise au point d'une *ingénierie didactique* précise, articulée autour des cinq problèmes analysés dans ce texte, et sans doute d'autres (nous en donnons un en annexe, très intéressant à travailler en classe en physique et en mathématiques ; on pourra se reporter à [6] pour l'analyse détaillée de ce problème, ainsi que pour des propositions plus précises pour une telle ingénierie).
Cela serait d'autant plus intéressant que, pour faire intervenir les techniques d'analyse évoquées plus haut, on est pratiquement *obligé de travailler avec des fonctions non précisées, encore inconnues en début de problème, ce qui est exactement le cas des problèmes de physique*. Or le contenu des programmes mathématiques actuels de la terminale française ne propose et ne permet probablement aucune situation permettant le jeu sur ces techniques : il y a juste quelques théorèmes du cours sur la continuité ou la dérivabilité automatique de fonctions non précisées (somme, produit…), mais seules les preuves de ces résultats obligeraient à ce jeu, et elles sont hors programmes - et sans véritable motivation. Il y avait à une époque la fonction réciproque, mais elle a disparu des programmes…

En définitive, l'intervention des mathématiques sur les problèmes de mise en équation différentielle exige un approfondissement des savoirs et pratiques des élèves en analyse, et en même temps c'est le seul lieu où, en l'état actuel de la lettre des programmes, cet approfondissement puisse être développé.

Annexe : un problème supplémentaire

$\boxed{7}$ *Dilution d'une solution saline*

Un bassin contient 100 litres d'eau, dans lesquels sont dissous 10 kg de sel. Une arrivée d'eau pure, avec un débit de 10 litres/mn, démarre à l'instant 0. En même temps que l'arrivée d'eau pure, une évacuation du mélange contenu dans le bassin est assurée avec un débit de 10 litres/mn. L'homogénéisation du contenu du bassin est assurée de façon permanente et instantanée par un mélangeur. Au bout d'une heure, quelle quantité de sel reste-t-il dans le bassin ?



Bibliographie

[1] M. Artigue, *Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes,* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg, vol 2, 1989, 173-190.

[2] R. Noirfalise, *Modélisation et équations différentielles en TS : utilisation d'un modèle praxéologique pour poser des questions didactiques,* Petit x 66, 6-17, 2004.

[3] *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire,* Rapport du GRECO du CNRS : "Didactique et acquisition des connaissances scientifiques", groupe mathématiques et physique-enseignement supérieur ; document IREM Paris 7 et LDPES, 1989.

[4] *Radioactivité,* document interdisciplinaire d'accompagnement des programmes de terminale S.

[5] Rogalski M. et all., *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*, Ellipses, 2001.

[6] Rogalski M., *Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique*, Repères IREM n° 64, juillet 2006. Et aussi emf2006…