LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE SOUS TOUTES SES FORMES

Colloque International des **IREM**

du 2 au 4 Juin 2016

STRASBOURG

Denise GRENIER

Université Grenoble Alpes (France)

Judith NJOMGANG NGANSOP

Université de Yaoundé 1/École Normale Supérieure de Yaoundé (Cameroun)

Strasbourg,le 04 juin 2016

Les travaux du groupe « Logique » de la CII Lycée

(Irem de Brest, Grenoble, Marseille, Montpellier, Paris 7)

Ateliers aux journées de l'APMEP (Metz 2012, Marseille 2013, Toulouse 2014)

Communications

- aux séminaires ADIREM (2013)
- aux journées des CII (Bordeaux 2013, Clermont-Ferrand 2015)
- au colloque « La réforme des programmes du lycée, et alors ? » (Lyon 2013)

- **Publications** diverses (articles, brochures, actes de colloques)

En relation étroite avec des travaux de chercheurs en didactique (Thèses, HDR)

Remarques et questions

Il n'y a pas de « savoir de référence » (écrit, officiel) pour l'enseignement de la logique et du raisonnement mathématiques dans l'enseignement secondaire.

Très peu de manuels scolaires en fournissent un, souvent très partiel, et les quelques éléments donnés ne sont pas très utilisables (mal définis voire même présentés de manière fausse).

Alors que :

- Argumentations, raisonnements et preuves en mathématiques doivent respecter des règles spécifiques.
- Un énoncé, une *conjecture*, une *hypothèse, une proposition,* ont un statut et des écritures précises, contiennent souvent des *variables* et des *quantificateurs.*

Que serait un « savoir de référence » pour l'enseignement de la logique au Secondaire ?

Les notions de *proposition*, *variable* (muette ou parlante)

Les connecteurs : ET, OU, NON, ⇒, ⇔ , OU-exclusif

Les quantificateurs :

« Pour tout », « Quel que soit », « Il existe … tel que »

Le Vrai et le Faux

À partir de propositions élémentaires, les connecteurs permettent de construire de nouvelles propositions.

Tous sont utilisés dans les raisonnements dès le collège, trop souvent sans les désigner et sans les avoir « définis ».

Et, au lycée, ils restent implicites, contextualisés (dans des chapitres).

- Jusqu'où la logique naturelle permet-elle de bien raisonner en mathématique ?
- Les contextes de la « vie courante » sont-ils adaptés pour construire les notions et règles du raisonnement mathématique ?
- L'enseignement du raisonnement et de la logique ne doit pas se faire en même temps que l'apprentissage d'une notion nouvelle.
- Il est nécessaire de définir les notions à la base du raisonnement, et le langage associé.
- Quels problèmes sont pertinents ?

Exemples de questions

Les phrases suivantes sont-elles des propositions ? Si non, peut-on les compléter (ou les ré-écrire) pour avoir des propositions ?

- 2 est pair
- 3 est pair
- *n* est pair
- Il fera beau demain
- 2 est pair **ET** 3 est pair
- 2 est pair **OU** 3 est impair
- *n* est pair **OU** *n*+1 est pair
- *n* est pair **ET** *n*+1 est impair

Que peut-on faire en classe de mathématiques avec ce type de phrases (qui ne sont pas des propositions) ?

Un père dit à son enfant : « Si tu manges ta soupe, alors tu auras un dessert ».

Quel *sens* le père veut-il donner à cette phrase ?
Quel *sens* l'enfant donne t-il à cette phrase ?

Interprétation floue du « si … alors »
Confusions avec la réciproque, ou avec l'équivalence
Causalité et temporalité « gênantes »

L’ implication, une notion polysémique

Introduction

1) La polysémie de l’implication
2) Deux traitements de l’implication
   2.1. L’implication ouverte
   2.2. Implication et règles d’inférences

Introduction

L'implication : notion centrale en mathématique et particulièrement au cœur du raisonnement déductif.

Le terme *implication* recouvre une multiplicité de notions: conditionnel, syllogisme, inférence, implication matérielle, implication ouverte, implication formelle.

Quelques opérations requises dans le raisonnement mathématiques et qui relèvent d’une bonne maîtrise du concept d’implication:

- évaluer une implication matérielle,
- démontrer qu’une implication formelle est vraie,
- faire la distinction entre une implication ouverte et une implication formelle dont la quantification est implicite,
- reconnaitre des inférences valides.

1) La polysémie de l’implication

1) Le conditionnel qui est de la forme « si …, alors … ». Dans le langage courant, un énoncé de cette forme est appelé le conditionnel courant (Quine, 1950)
2) L’inférence: Modus Ponens, Tollens,
3) Implication ouverte: $P(x) \Rightarrow Q(x)$ où P et Q sont des lettres de prédicat
4) Implication formelle: clôture universelle de l’implication ouverte
5) La règle de transitivité d’antécédent à conséquent

Implication formelle et théorème

Forme générale des théorèmes:

$$\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$$

Démontrer un théorème sous cette forme n'est pas démontrer la vérité de l'implication formelle

$$\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$$

Montrer que $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ est vrai revient à montrer que pour chaque élément a de l'univers du discours, $P(a) \Rightarrow Q(a)$ est vrai

2) Deux traitements de l'implication

Effectif des étudiants: 68

Implication ouverte

Donner l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 qui vérifient la propriété (P) :

« *Si x est pair, alors son successeur est premier.* »

Formalisation: $P(x) \Rightarrow Q(x)$, implication ouverte.

Éléments cherchés: a tels que l'implication matérielle $P(a) \Rightarrow Q(a)$ soit vraie

<u>Les résultats</u>

Mise en œuvre de l'implication matérielle: 10, soit 16% de bonnes réponses (T1)

Mise en œuvre de l'implication courante: 29, soit 48% des étudiants (T2)

Autres réponses: 22 (T3)

Commentaires:

Les réponses (T1) proviennent de la maîtrise des règles de vérité de l'implication;

Les réponses (T2) se justifient en général par l'interprétation de $P \Rightarrow$ Q par $P \wedge Q$

« On prend les nombres qui sont tels que, lorsque ce nombre est pair, son successeur doit être premier »;
« On doit prendre les nombres dont les successeurs sont premiers. »

Cet exercice pourrait permettre :

- de travailler sur les règles de vérité de l’implication ;
- de mettre en valeur l’utilisation des tables de vérité ;
- de mettre en défaut la règle-en-acte qui consiste, pour évaluer une implication, à évaluer d’abord l’antécédent de cette implication, et de ce fait, faire un traitement de l’implication comme une conjonction ou une disjonction ;
- de préciser, du point de vue du langage, la différence entre les deux énonciations suivantes qu’on retrouve dans les débats des étudiants : « si … alors… », et « lorsque …, alors … ».

2.2. Implication et règles d’inférence

Des exemples:

- Le Modus Ponens:

(si P alors Q) est vrai et P est vrai

donc Q est vrai

- La règle de transitivité d’antécédent à conséquent:

(si P, alors Q) est vrai

(si Q, alors R) est vrai

donc (P alors R) est vrai

- Le Modus Tollens:

(si P, alors Q) est vrai

(non Q) est vrai

donc (non P) est vrai

Dans ce qui suit, (u_n) *désigne une suite définie par récurrence sous la forme «* $u_{n+1} = f(u_n)$ *», où* f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*. On a alors le résultat suivant :*

(P) « Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation *f(x)=x* »

Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) *si :*

- *L'équation « f(x)=x » n'a pas de solution*
- *L'équation « f(x)=x » a au moins une solution.*

- *Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « f(x)=x » si :*
  - *La suite* (u_n) *est convergente*
  - *La suite* (u_n) *n'est pas convergente*

Résultats et commentaires:

Taux moyen de réponses 68%.

Question 1: Taux de réussite de 83%. Mais les débats montrent l'indisponibilité de la règle du Modus Tollens

Question 2: Taux de réussite de 16%. 48% donnent la réponse « *la suite converge* ». Débats fructueux et très intéressants entre les étudiants. Deux camps:

- La suite converge
- On ne peut rien dire

Indisponibilité de la règle du Modus Tollens dans les groupes de discussion et recours aux connaissances mathématiques.

Dans l'un des groupes:

Trouver une suite récurrente dont la fonction associée admet un point fixe et qui ne converge pas

Ils trouvent $u_0 = 2$ et $f(u_n) = {u_n}^2$

3 modes de raisonnement:

- Trouver un contre-exemple à l’énoncé quantifié universellement, dont la quantification est implicite;
- Utiliser les exemples du cours pour répondre;
- Utiliser un argument logique

Conclusions de cet exercice

- Importance de lever les implicites de la langue dans les énoncés (6.1)
- L’utilisation de certaines abréviations en mathématiques peut modifier la structure d’une phrase et modifier le problème posé: « $f(x) = x$ n’a pas de solution » et « $f(x) \neq x$ » n’ont pas le même statut.

- les inférences établies se font en acte, indisponibilité des connaissances prédicatives en logique qui leur permettraient de soutenir leur raisonnement.
- conduites inférentielles qui renvoient à celles de l'équivalence (6.2)

Importance de prendre en compte la théorie de la logique dans le raisonnement mathématique; elle fournit des moyens de contrôle de la validité du raisonnement

Quelques problèmes qui permettent de travailler le raisonnement logique

(Groupe « logique » de la CII Lycée)

Strasbourg,le 04 juin 2016

Le « problème de Wason »

On présente quatre cartes sur lesquelles sont écrits respectivement A, B, 4 et 7. On sait que sur chaque carte, il y a une lettre sur une des faces et un nombre sur l'autre face. On ne peut pas voir l'autre face.

A	B	4	7

Quelle(s) carte(s) faut-il retourner pour déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Si une carte a une voyelle écrite sur une face, alors il y a un nombre pair écrit sur l'autre face » ?

L'implication avec prémisse fausse

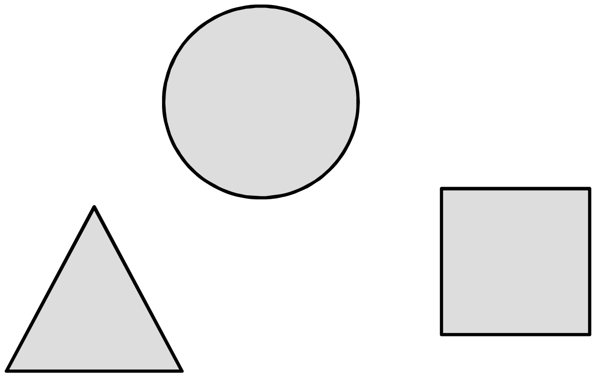
On dispose de trois jetons de trois formes différentes (Carré, Rond et Triangle) et de trois couleurs différentes (Rouge, Vert et Bleu).

On suppose que les trois affirmations suivantes sont vraies :

A1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert.

A2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge.

A3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert.



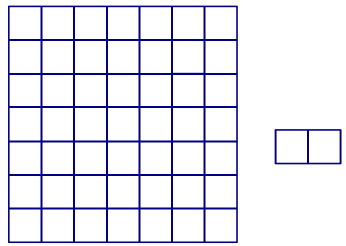
Solution(s)

Pavages de polyminos (une situation fondamentale

Trois problèmes

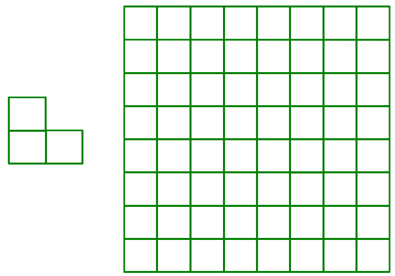
P1. Rectangle avec un trou quelconque

dominos

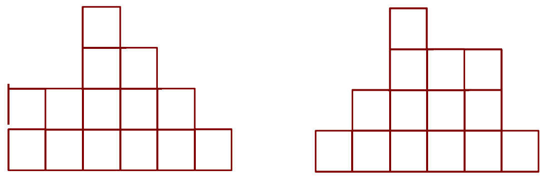


P2. Carré avec un trou quelconque

triminos en L



P3. Trapèze sans trou / dominos



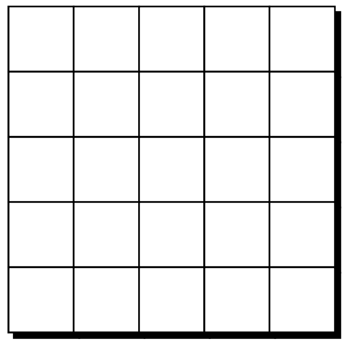
Chasse à la bête

On veut protéger un champ quadrillé (ici, un polymino carré 5x5) d'un nuage de bêtes. On dispose pour cela de pièges que l'on va placer dans le champ de manière à ce qu'aucune bête ne puisse se poser sans toucher un piège.

Trois types de bête :domino, trimino long, trimino en L.

pièges

bêtes



Question : pour chacun des 3 types de bêtes, trouver le plus petit nombre de pièges (et leurs dispositions) qui assure la protection du champ

Strasbourg,le 04 juin 2016